PROBLEMAS DE GEOMETRÍA

ANALÍTICA Y DIFERENCIAL

Ubaldo Usunáriz Balanzategui
Ignacio Usunáriz Sala

ÍNDICE



PRÓLOGO

Este libro, *Problemas de Geometría Analítica y Diferencial*, junto con otros dos, *Problemas de Matemáticas* y *Problemas de Geometría*, están dedicados a la presentación y resolución de problemas que se planteaban hace unas décadas, en la preparación para ingreso en las carreras de ingeniería técnica superior.

Incluye 907 problemas, de los que 707 se refieren a la geometría analítica y 200 a la geometría diferencial. Los correspondientes a la geometría analítica se reparten entre la geometría del plano, con 491 problemas (elementos, circunferencia, lugares geométricos, cónicas, curvas), y la del espacio, con 216 problemas (elementos, lugares geométricos, cuádricas, otras superficies y curvas). Los referentes a la geometría diferencial se reparten entre los correspondientes al plano, con 123 problemas, y los correspondientes al espacio, con 77 problemas.

Esta segunda edición de *Problemas de Geometría Analítica y Diferencial* tiene por objeto su puesta a disposición de la Escuela de Ingenieros de Minas de la Universidad Politécnica de Madrid.

Madrid, verano 2012

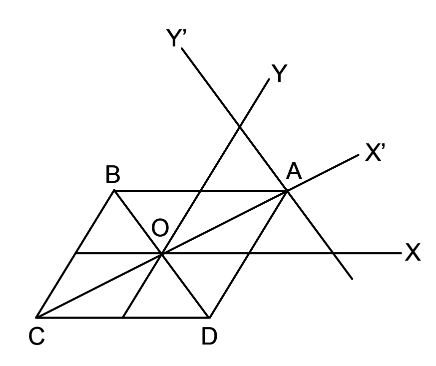
Problemas de Geometría Analítica

Geometría Analítica del Plano

Sección A - ELEMENTOS: PUNTOS, RECTAS, ÁNGULOS

A 1- En ejes oblicuos de ángulo 60º, se considera el paralelogramo $ABCD$, $A(a,b)$, $B(-a,b)$, $C(-a,-b)$, $D(a,-b)$. Se toma como nuevo eje X', la diagonal AC, sentido positivo hacia la derecha. Como nuevo eje Y', la paralela por A a la diagonal BD, sentido positivo hacia arriba. Hallar las coordenadas de los cuatro vértices referidas al nuevo sistema.

Solución:



El punto A coincide con el origen de los nuevos ejes, luego sus nuevas coordenadas son $(0,0)$. Siendo (x,y) las coordenadas en los nuevos ejes, del centro O del paralelogramo, se tiene:
$x^2 = a^2+b^2+2ab\cos 60º = a^2+b^2+ab$, $y^2 = a^2+b^2-2ab\cos 60º = a^2+b^2-ab$.
Luego las coordenadas pedidas, son:
$B\left(-\sqrt{a^2+b^2+ab}\,,\sqrt{a^2+b^2-ab}\right)$, $C\left(-2\sqrt{a^2+b^2+ab}\,,0\right)$, $D\left(-\sqrt{a^2+b^2+ab}\,,-\sqrt{a^2+b^2-ab}\right)$.

A 2- En ejes rectangulares se dan las rectas $mx+(2m-1)y+3=0$, $(4m-7)x-(m+2)y-8=0$. Hallar: 1º) El valor de m para que sean perpendiculares. 2º) En este caso, hallar las coordenadas de su punto de intersección. 3º) En el mismo caso, hallar el ángulo que forma la primera recta con el eje OX. 4º) Hallar la forma continua de la segunda recta en función del punto de intersección de ambas.

Solución: 1º) Para que sean perpendiculares, ha de verificarse que: $\frac{-m}{2m-1}\cdot\frac{4m-7}{m+2}=-1$. Es decir: $m^2-5m+1=0$. De donde: $m=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$. 2º) Las coordenadas del punto de intersección, son: $\left(\frac{37\pm 13\sqrt{21}}{141\pm 29\sqrt{21}},\frac{58\pm 20\sqrt{21}}{-141\mp 29\sqrt{21}}\right)$. 3º) El ángulo pedido es: $\theta=\arctan\frac{-m}{2m-1}=\arctan\frac{-5\mp\sqrt{21}}{8\pm 2\sqrt{21}}$, de donde θ toma los valores $-29º10'22''$ y $19º42'37''6$. 4º) La forma continua de la segunda recta en función del punto de intersección, es: $\dfrac{x-\frac{37\pm 13\sqrt{21}}{141\pm 29\sqrt{21}}}{\frac{9\pm\sqrt{21}}{2}}=\dfrac{y-\frac{58\pm 20\sqrt{21}}{-141\mp 29\sqrt{21}}}{3\pm 2\sqrt{21}}$.

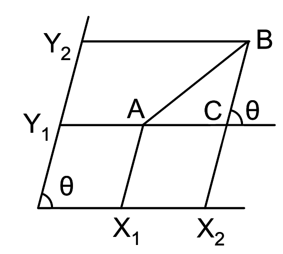
A 3- En ejes de ángulo 60º se considera la recta que pasa por $M(4,4)$ y es perpendicular a OM. 1º) Hallar la ecuación de esta recta. 2º) Hallar las coordenadas de los puntos de esta recta que distan de M, 2 unidades.

3º) Halla la bisectriz del ángulo formado por dicha recta y el eje OX.

Solución: 1º) Ecuación de OM: $y-x=0$. Ecuación de las rectas que pasan por M: $y-4=\lambda(x-4)$. La condición de perpendicularidad es: $1+mm'+(m+m')\cos\theta = 1+\lambda+\dfrac{1+\lambda}{2}=0$. Luego $\lambda=-1$. La ecuación pedida es: $x+y-8=0$. 2º) El cuadrado de la distancia de $(x,8-x)$ a $(4,4)$, es: $(x-4)^2+(8-x-4)^2-\ -2(x-4)(8-x-4)\cos 60º=4$. De donde las coordenadas pedidas son: $x=4\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, $y=4\mp\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. 3º) Las ecuaciones de las bisectrices del ángulo formado por $x+y-8=0$, $y=0$, son: $\dfrac{x+y-8}{\sqrt{1+1-2\cos 60º}}=\pm\dfrac{y}{\sqrt{1}}$, es decir: $x-8=0$, $x+2y-8=0$.

A 4- En ejes de ángulo $\theta=60º$, se pide: 1º) Ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1,3)$ y forma con la recta $y=2x$ un ángulo de 45º. De las dos soluciones, se hallará aquella recta que corta a OY en el punto más cercano al origen. 2º) Coordenadas de los puntos B de esa recta que distan de A, 3 unidades.

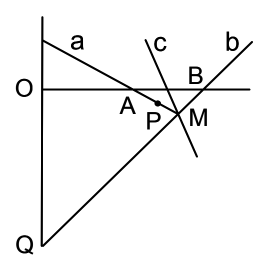
Solución:



1º) Recta pedida: $y-3=\lambda(x-1)$. Ángulo de las dos rectas: $\tan 45º=\dfrac{\pm(\lambda-2)\sin 60º}{1+2\lambda-(\lambda+2)\cos 60º}$. De donde: $\lambda=-1\pm\sqrt{3}$. Las ordenadas de los puntos de corte con $x=0$, son: $y=4\pm\sqrt{3}$, siendo el punto más cercano al origen el correspondiente a $\lambda=-1+\sqrt{3}$. En consecuencia, la ecuación de la recta pedida, es: $y=\left(\sqrt{3}-1\right)x+4-\sqrt{3}$. 2º) Siendo un punto de esta recta: $\left[x,\left(\sqrt{3}-1\right)x+4-\sqrt{3}\right]$, se tienen las siguientes distancias: $AC=x-1$, $BC=\left(\sqrt{3}-1\right)(x-1)$. Por tanto, el cuadrado de la distancia entre los puntos A y B, es: $AB^2=(x-1)^2+\left[\left(\sqrt{3}-1\right)(x-1)\right]^2-2(x-1)\left(\sqrt{3}-1\right)(x-1)\cos(\pi-60º)=9$. De donde se tiene que la abscisa de B es: $x=1\pm\dfrac{3}{\sqrt{4-\sqrt{3}}}$, siendo su ordenada: $3\pm\dfrac{3\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{4-\sqrt{3}}}$.

A 5- En ejes rectangulares se da la recta a, de ecuación $2x+4y-7=0$. 1º) Hallar la ecuación de la recta c, simétrica de la dada, respecto de la recta b, de ecuación $x-y-6=0$. 2º) Sea M el punto de intersección de las tres rectas, y A el punto de intersección de a con OX. Hallar un punto P de a tal que $\dfrac{PM}{PA}=\dfrac{-2}{3}$.

Solución:



1º) Ecuación de a: $2x+4y-7=0$. Ecuación de b: $x-y-6=0$. Coordenadas de su intersección $M\left(\dfrac{31}{6},\dfrac{-5}{6}\right)$. Ecuación de c: $y+\dfrac{5}{6}=m\left(x-\dfrac{31}{6}\right)$. Como $\dfrac{m_a-m_b}{1+m_am_b}=\dfrac{m_b-m_c}{1+m_bm_c}$, $m_a=\dfrac{-1}{2}$, $m_b=1$, se tiene $m_c=-2$, con lo que la ecuación de c es: $4x+2y-19=0$. 2º) Siendo $A\left(\dfrac{7}{2},0\right)$, las coordenadas de P son: $x=\dfrac{\frac{31}{6}+\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{2}}{1+\frac{2}{3}}=\dfrac{9}{2}$; $y=\dfrac{\frac{-5}{6}+\frac{2}{3}\cdot 0}{1+\frac{2}{3}}=\dfrac{-1}{2}$. Es decir: $P\left(\dfrac{9}{2},\dfrac{-1}{2}\right)$.

A 6- En ejes rectangulares se dan las rectas $y^2-7xy+4x^2=0$. Hallar la ecuación que da el conjunto de sus bisectrices.

Solución: Sea $y = \lambda x$, una de las bisectrices, y sean m y m' las pendientes de las rectas dadas. Se tiene: $\dfrac{\lambda - m}{1 + \lambda m} = \dfrac{m' - \lambda}{1 + \lambda m'}$, es decir: $(m + m')\lambda^2 - 2(mm' - 1)\lambda - (m + m') = 0$. Como $m + m' = 7$, $mm' = 4$, $\lambda = \dfrac{y}{x}$, sustituyendo se tiene: $7x^2 - 7y^2 + 6xy = 0$.

A 7- En ejes rectangulares se considera el triángulo ABC, cuyos vértices son: $A(1,2)$, $B(4,-5)$, $C(6,-2)$. Se pide: 1º) Ecuación de la bisectriz interior del ángulo $\widehat{A}$. 2º) Ecuación de la altura BH trazada desde el vértice B sobre AC. 3º) Coordenadas de los puntos de esta altura que distan 4 unidades del vértice B.

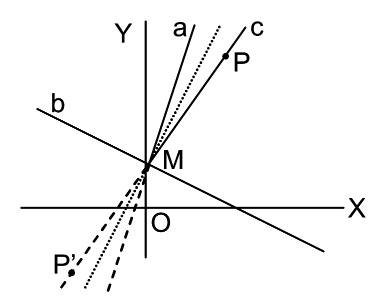
Solución: 1º) $AB \equiv 7x + 3y - 13 = 0$, $AC \equiv 4x + 5y - 14 = 0$. Ecuación de las bisectrices: $\dfrac{7x + 3y - 13}{\sqrt{49 + 9}} = \dfrac{4x + 5y - 14}{\pm\sqrt{16 + 25}}$. Las abscisas de los puntos de corte con OX, de AB, AC y de las bisectrices, son, respectivamente: 1.8, 3.5, -1.6, 2.5. Luego la bisectriz interior corresponde al signo negativo de la raíz (abscisa 2.5), siendo su ecuación: $\left(4\sqrt{58} + 7\sqrt{41}\right)x + \left(5\sqrt{58} + 3\sqrt{41}\right)y - 14\sqrt{58} - 13\sqrt{41} = 0$. 2º) $BH \equiv 5x - 4y - 40 = 0$. 3º) $x = \dfrac{164 \pm 16\sqrt{41}}{41}$, $y = \dfrac{-205 \pm 20\sqrt{41}}{41}$.

A 8- Dadas las rectas $P \equiv Ax + By + C = 0$, $Q \equiv A'x + B'y + C' = 0$, hallar la relación que debe existir entre λ y μ para que las rectas $P + \lambda Q = 0$, $P + \mu Q = 0$, sean perpendiculares.

Solución: Pendiente de $P + \lambda Q = 0$, $m = -\dfrac{A + \lambda A'}{B + \lambda B'}$; pendiente de $P' + \lambda Q' = 0$, $m' = -\dfrac{A + \mu A'}{B + \mu B'}$; la condición de perpendicularidad es: $mm' = -1$. Luego: $(A + \lambda A')(A + \mu A') + (B + \lambda B')(B + \mu B') = 0$. Es decir: $(A'^2 + B'^2)\lambda\mu + (AA' + BB')(\lambda + \mu) + A^2 + B^2 = 0$.

A 9- La recta $y = 3x + 1$ es la ecuación de un rayo incidente a, que se refleja al chocar con la recta b, cuya ecuación es: $2x + 4y - 5 = 0$. Se pide: 1º) Ecuación del rayo reflejado c. 2º) Coordenadas del punto de este rayo que diste del de intersección con la primera recta, 4 unidades.

Solución:



1º) Las coordenadas del punto de intersección son: $M\left(\dfrac{1}{14}, \dfrac{17}{14}\right)$. La ecuación del rayo reflejado c, es: $13x - 9y + 10 = 0$. 2º) El punto pedido es: $P\left(\dfrac{1}{14} + \dfrac{18\sqrt{10}}{25}, \dfrac{17}{14} + \dfrac{26\sqrt{10}}{25}\right)$, si a se sitúa en el semiplano superior definido por b (línea continua en la figura). Si se sitúa en el semiplano inferior (línea de trazos), el punto pedido es $P'\left(\dfrac{1}{14} - \dfrac{18\sqrt{10}}{25}, \dfrac{17}{14} - \dfrac{26\sqrt{10}}{25}\right)$.

A 10- Calcular el ángulo V que forman las rectas: $(ax + by)\cos\theta + (bx - ay)\sin\theta + cx + dy = 0$, $(cx + dy)\cos\theta - (dx - cy)\sin\theta + ax + by = 0$.

Solución: Las pendientes de estas rectas son: $m_1 = \dfrac{a\cos\theta + b\sin\theta + c}{a\sin\theta - b\cos\theta - d}$, $m_2 = \dfrac{d\sin\theta - c\cos\theta - a}{d\cos\theta + c\sin\theta + b}$. Haciendo: $\tan\dfrac{\theta}{2} = t$, $\sin\theta = \dfrac{2t}{1 + t^2}$, $\cos\theta = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$, $\tan\theta = \dfrac{2t}{1 - t^2}$, se tiene: $\tan V = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \dfrac{2t}{1 - t^2} = \tan\theta$. Por tanto, $V = \theta$.

A 11- Dada la recta $r \equiv 3x + 2y - 5 = 0$, se pide: 1º) Ecuaciones de las rectas que pasan por $(2,-1)$ y forman un ángulo de 45º con r. 2º) Ecuaciones de las rectas que forman con las anteriores un cuadrado de diagonal la recta r. 3º) Longitud del lado del cuadrado.

Solución: 1º) Siendo m la pendiente de las rectas pedidas, se tiene: $\dfrac{m+\frac{3}{2}}{1-\frac{3m}{2}}=\pm 1$, $m_1=\dfrac{-1}{5}$, $m_2=5$. Las ecuaciones pedidas son: $5x-y-11=0$, $x+5y+3=0$. 2º) Los puntos de intersección de estas dos rectas con la recta dada, son: $\left(\frac{27}{13},\frac{-8}{13}\right)$ y $\left(\frac{31}{13},\frac{-14}{13}\right)$. Las ecuaciones pedidas son: $x+5y+1=0$, $5x-y-13=0$. 3º) El lado mide $\sqrt{\left(2-\frac{31}{13}\right)^2+\left(-1+\frac{14}{13}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{26}}{13}$.

A 12- En ejes rectangulares se proyecta un punto $P(a,b)$ en A sobre OX, y en B sobre OY. Se une A con B. Por P se traza la perpendicular a AB. Demostrar que esta perpendicular pasa por un punto fijo cuando P describe una recta paralela a la bisectriz $x-y=0$.

Solución: El punto P recorre la recta $y-b=x-a$, siendo sus coordenadas $(a+\lambda,b+\lambda)$. La ecuación de AB es: $\dfrac{x}{a+\lambda}+\dfrac{y}{b+\lambda}=1$. La perpendicular por P es: $y-b-\lambda=\dfrac{a+\lambda}{b+\lambda}(x-a-\lambda)$, de donde $\lambda=\dfrac{ax-by-a^2+b^2}{y-x+2a-2b}$. Se forma el sistema: $ax-by-a^2+b^2=0$, $y-x+2a-2b=0$, cuya solución es: $x=a-b$, $y=b-a$, que son las coordenadas del punto fijo.

A 13- Dado el haz de rectas $x^2+4xy+y^2+\lambda(2x^2-2xy-y^2)=0$, hallar: 1º) Valor de λ para que las rectas formen un ángulo dado V. 2º) Valor mínimo de V.

Solución: 1º) Ordenando la ecuación del haz según las potencias de y, se obtiene la ecuación: $y^2+\dfrac{4-2\lambda}{1-\lambda}xy+\dfrac{1+2\lambda}{1-\lambda}x^2=0$. De donde: $\tan V=\dfrac{2\sqrt{\left(\frac{2-\lambda}{1-\lambda}\right)^2-\frac{1+2\lambda}{1-\lambda}}}{1+\frac{1+2\lambda}{1-\lambda}}=\dfrac{2\sqrt{3\lambda^2-5\lambda+3}}{\lambda+2}$. Luego, $\lambda=\dfrac{10+2\tan^2 V\pm 2\sqrt{25\tan^2 V-11}}{12-\tan^2 V}$. 2º) Derivando $\tan V$, respecto a λ, e igualando a cero, se tiene: $\lambda=\dfrac{16}{17}$, $\tan V=\dfrac{\sqrt{11}}{5}$, $V=33º33'26''3$.

A 14- En ejes oblicuos se dan los puntos $A(a,0)$, $B(0,b)$. Se consideran dos puntos variables P y Q, P está sobre OX, y Q sobre OY, de forma que $\dfrac{OA}{OP}+\dfrac{OB}{OQ}=k$. Demostrar que la recta PQ pasa por un punto fijo y hallar sus coordenadas.

Solución: $P(\lambda,0)$, $Q\left(0,\dfrac{b\lambda}{k\lambda-a}\right)$, $PQ\equiv\dfrac{x-\lambda}{-\lambda}=\dfrac{(k\lambda-a)y}{b\lambda}$. De donde, $\lambda=\dfrac{ay-bx}{ky-b}$. Luego, $y=\dfrac{b}{k}$, $x=\dfrac{a}{k}$. Por tanto, PQ pasa por el punto $\left(\dfrac{a}{k},\dfrac{b}{k}\right)$.

A 15- Se da el triángulo ABC: $A(0,h)$, $B(b,0)$, $C(-b,0)$. Sea el punto $P(\lambda,\mu)$. Se llaman A', B', C' los simétricos de P respecto de los puntos medios de BC, AC, AB. Demostrar que AA', BB', CC' concurren en un punto M, cuyas coordenadas se hallarán en función de las de P. Demostrar que la recta PM pasa por un punto fijo cuando P se mueve en el plano, hallando sus coordenadas.

Solución: Los puntos simétricos de P, son: $A'(-\lambda,-\mu)$, $B'(-b-\lambda,h-\mu)$, $C'(b-\lambda,h-\mu)$. Las ecuaciones de las rectas son: $AA'\equiv(h+\mu)x-\lambda y+\lambda h=0$; $BB'\equiv(h-\mu)x+(2b+\lambda)y-bh+b\mu=0$; $CC'\equiv(h-\mu)x+(\lambda-2b)y+bh-b\mu=0$. Como $\begin{vmatrix} h+\mu & -\lambda & \lambda h \\ h-\mu & 2b+\lambda & -bh+b\mu \\ h-\mu & \lambda-2b & bh-b\mu \end{vmatrix}=0$, las tres rectas pasan por un punto cuyas coordenadas son: $M\left(\dfrac{-\lambda}{2},\dfrac{h-\mu}{2}\right)$. La ecuación de la recta PM es: $(h-3\mu)x+3\lambda y-\lambda h=0$. Para que pase por un punto independiente de λ,μ, ha de cumplirse que sus coeficientes se anulen, es decir: $x=0$, $3y-h=0$. Luego PM pasa por el punto fijo $\left(0,\dfrac{h}{3}\right)$.

A 16- Hallar las coordenadas de un punto tal que la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\ldots(x_n,y_n)$, sea mínima.

Solución: La suma Σ de los cuadrados de las distancias del punto (x,y), a los puntos dados, es:

$\Sigma = (x-x_1)^2 + \ldots + (x-x_n)^2 + (y-y_1)^2 + \ldots + (y-y_n)^2 = \Sigma_x + \Sigma_y$, siendo $\Sigma_x = (x-x_1)^2 + \ldots + (x-x_n)^2$, $\Sigma_y = (y-y_1)^2 + \ldots + (y-y_n)^2$. Derivando e igualando a cero: $\Sigma'_x = 2(nx - x_1 - \ldots - x_n) = 0$, de donde $x = \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$. Análogamente, $y = \dfrac{y_1 + \ldots + y_n}{n}$.

A 17- Dadas las rectas $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, $A_3x + B_3y + C_3 = 0$, hallar el área del triángulo que forman.

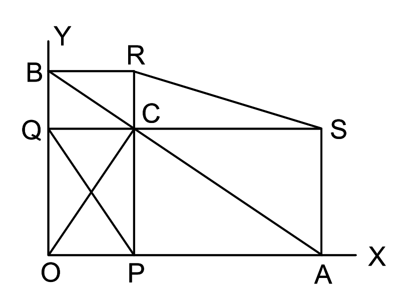
Solución: Sea $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$. Las coordenadas de los vértices del triángulo son: $x_3 = \dfrac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = \dfrac{a_3}{c_3}$, $y_3 = \dfrac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = \dfrac{b_3}{c_3}$ (siendo a_i, b_i, c_i, los adjuntos de A_i, B_i, C_i, en Δ), y las expresiones análogas para los otros dos vértices.

Luego, $S = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{a_3}{c_3} & \frac{b_3}{c_3} & 1 \\ \frac{a_2}{c_2} & \frac{b_2}{c_2} & 1 \\ \frac{a_1}{c_1} & \frac{b_1}{c_1} & 1 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2c_1c_2c_3}\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = \dfrac{\Delta^2}{2c_1c_2c_3}$.

Nota: El determinante adjunto de un determinante de orden n, es igual a la potencia $n-1$ de este.

A 18- Se considera la recta AB, $A(a,0)$, $B(0,b)$, en un sistema rectangular. Por el origen se traza la perpendicular a AB, que la corta en C. Por C se traza la paralela al eje OX, que corta al eje OY en Q, y en S a la paralela al eje OY trazada por A. Por C se traza la paralela al eje OY que corta en P al eje OX, y en R a la paralela a OX trazada por B. 1º) Demostrar que el coeficiente angular de la recta RS es el cubo del de la recta AB 2º) Demostrar que las rectas AB, PQ y RS son concurrentes.

Solución:



1º) $AB \equiv bx + ay - ab = 0$, $OC \equiv ax - by = 0$, $C\left(\dfrac{ab^2}{a^2+b^2}, \dfrac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$, $Q\left(0, \dfrac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$, $S\left(a, \dfrac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$, $P\left(\dfrac{ab^2}{a^2+b^2}, 0\right)$, $R\left(\dfrac{ab^2}{a^2+b^2}, b\right)$. La pendiente de la recta RS es: $\dfrac{\dfrac{a^2b}{a^2+b^2} - b}{a - \dfrac{ab^2}{a^2+b^2}} = \left(-\dfrac{b}{a}\right)^3$, que es el cubo de la pendiente de la recta AB, que es: $-\dfrac{b}{a}$. 2º) Las coordenadas del punto medio de PS son: $\left(\dfrac{a(a^2+2b^2)}{2(a^2+b^2)}, \dfrac{a^2b}{2(a^2+b^2)}\right)$, luego está sobre AB. Las coordenadas del punto medio de QR son: $\left(\dfrac{ab^2}{2(a^2+b^2)}, \dfrac{b(2a^2+b^2)}{2(a^2+b^2)}\right)$, luego está sobre AB. Por tanto, PQ y RS son simétricas respecto de AB, por lo que las tres rectas son concurrentes.

A 19- Hallar la ecuación de la curva simétrica de $x^3 + x^2y - 3y^2 + 1 = 0$, respecto de $y = x + 1$.

Solución: El punto simétrico de (a,b) respecto de $y = x+1$, es la solución del sistema: $x - y + 1 = 0$, $x - a + y - b = 0$, es decir: $\left(\dfrac{a+b-1}{2}, \dfrac{a+b+1}{2}\right)$. Luego: $a = y - 1$, $b = x + 1$. La curva simétrica es:

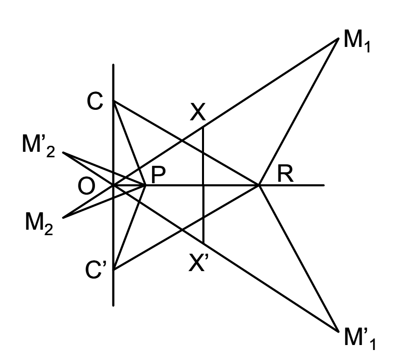
$(y-1)^3+(y-1)^2(x+1)-3(x+1)^2+1=0$, o bien: $xy^2+y^3-3x^2-2xy-2y^2-5x+y-2=0$.

A 20- Se da el haz de rectas $2\lambda x+y+\lambda^2=0$, 1º) Demostrar que por cada punto del plano pasan dos rectas del haz. 2º) Hallar el ángulo que forman entre sí las dos rectas del haz que pasan por $(1,-8)$. 3º) Lugar geométrico de los puntos en los que las dos rectas del haz son perpendiculares. 4º) Hallar la recta del haz que forma un ángulo de 45º con la recta $3x-y+8=0$, perteneciente al haz.

Solución: 1º) Para el punto (α,β), se obtiene $\lambda^2+2\alpha\lambda+\beta=0$, de donde $\lambda=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\beta}$. Luego hay dos valores de λ, por lo que hay dos rectas del haz que pasan por cada punto del plano, de ecuaciones: $\left(-2\alpha+2\sqrt{\alpha^2-\beta}\right)x+y+\left(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta}\right)^2=0$, $\left(-2\alpha-2\sqrt{\alpha^2-\beta}\right)x+y+\left(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta}\right)^2=0$. 2º) $m_1=2-2\sqrt{1+8}=-4$, $m_2=8$. Luego se tiene que: $\tan V=\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\dfrac{12}{31}$. Por tanto: $V=21º09'40''5$. 3º) $m_1m_2=\left(2\alpha-2\sqrt{\alpha^2-\beta}\right)\left(2\alpha+2\sqrt{\alpha^2-\beta}\right)=-1$. Operando, se tiene: $y=\dfrac{-1}{4}$. 4º) $\dfrac{3-m}{1+3m}=\pm1$, de donde m toma los valores $\dfrac{1}{2}$ y -2, obteniéndose dos rectas: $8x-16y-1=0$, $2x+y+1=0$.

A 21- Un pirata enterró su tesoro en una isla. Se valió de tres puntos de referencia no alineados: un cocotero C, una roca R y un pozo P. En la perpendicular por R a CR, tomó la distancia RC obteniendo un punto M_1 situado en el semiplano contrario a P respecto a la recta RC. Análogamente, en la perpendicular por P a CP, tomó la distancia CP obteniendo M_2 en el semiplano contrario a aquel en que se encuentra R respecto de la recta CP. Enterró el tesoro en el punto medio de M_1M_2. Posteriormente se encontró que el cocotero había desaparecido. ¿Cómo podía determinar la situación del tesoro? Nota: El pirata sólo puede tomar distancias y trazar alineaciones perpendiculares a otras ya trazadas.

Solución:



Sean las coordenadas del cocotero C, del pozo P y de la roca R, las siguientes: $C(0,c)$, $P(a,0)$, $R(b,0)$. Por tanto, se tiene que: $CP\equiv cx+ay-ac=0$, $CR\equiv cx+by-bc=0$, $RM_1\equiv bx-cy-b^2=0$, $M_1\left(b+\lambda,\dfrac{b\lambda}{c}\right)$, $PM_2\equiv ax-cy-a^2=0$, $M_2\left(a+\mu,\dfrac{a\mu}{c}\right)$. Como $RM_1=RC$, $\lambda=\pm c$, se tiene que: $M_1(b\pm c,\pm b)$. Introduciendo en la ecuación de RC, las coordenadas de P, se obtiene: $c(a-b)$; introduciendo las de M_1, se obtiene: $\pm(b^2+c^2)$. Para que sean de signo contrario según lo indicado en el enunciado, en el caso de signo positivo, es decir (b^2+c^2), la posición de CRP es dextrógira (como en la figura), y en el caso de signo negativo, es decir $(-b^2-c^2)$, la posición de CRP es levógira. Al desaparecer el cocotero, no se sabe de qué tipo era la secuencia CRP. El mismo razonamiento es válido para $M_2(a\pm c,\pm a)$, aunque en este caso para la posición dextrógira, el signo ha de ser el negativo, y para la levógira, el positivo. Teniendo en cuenta estas consideraciones, las coordenadas del punto medio de M_1M_2, son: $\left(\dfrac{a+b}{2},\pm\dfrac{a-b}{2}\right)$. Para encontrar el tesoro, el pirata trazará la alineación PR, hallando su punto medio. Por este, trazará la alineación perpendicular a PR, y sobre esta llevará a un lado y otro de PR, una distancia igual a la mitad de PR, obteniendo los puntos X y X'. El tesoro estará en una de estas dos posiciones.

A 22- Se da el haz de rectas $x^3+y^3+3\lambda x^2y=0$. Calcular el valor de λ para que dos rectas del haz estén igualmente inclinadas respecto a la tercera. Hallar las ecuaciones de estas tres rectas.

Solución: Siendo α,β,γ las pendientes de las tres rectas, se tiene: $\dfrac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}=\dfrac{\beta-\gamma}{1+\beta\gamma}$, de donde: $\beta^2(\alpha+\gamma)-2\alpha\beta\gamma+2\beta-\alpha-\gamma=0$. Como las pendientes verifican la ecuación: $m^3+3\lambda m+1=0$, se tiene que: $\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=3\lambda$, $\alpha\beta\gamma=-1$. Introduciendo estos valores en la primera

ecuación, se tiene: $\beta^2(-\beta) + 2 + 3\beta = 0$, cuyas raíces son: -1 (doble), y 2. Para $\beta = -1$, α y γ son imaginarias. Para $\beta = 2$, $\alpha = \frac{-2+\sqrt{6}}{2}$, $\gamma = \frac{-2-\sqrt{6}}{2}$, $\lambda = \frac{-3}{2}$. Las ecuaciones de las tres rectas son: $y = \frac{-2 \pm \sqrt{6}}{2}x$, $y = 2x$.

Sección B - CIRCUNFERENCIA

B 1- Dada la circunferencia $x^2+y^2+x-3y=0$, hallar: 1º) Su centro y su radio. 2º) Las tangentes que pasan por el punto $\left(\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)$.

Solución: 1º) Derivando e igualando a cero: $f'_x=2x+1=0$, $f'_y=2y-3=0$. Luego: $x_o=\frac{-1}{2}$, $y_0=\frac{3}{2}$. El centro es: $\left(\frac{-1}{2},\frac{3}{2}\right)$. El radio es: $r=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$. 2º) La ecuación homogeneizada es: $x^2+y^2+xz-3yz=0$. Luego derivando se tiene que: $f'_x(1,7,2)=2x+z=4$, $f'_y(1,7,2)=2y-3z=8$, $f'_z(1,7,2)=x-3y=-20$. Por tanto, siendo la ecuación del conjunto de las tangentes: $(xf'_\alpha+yf'_\beta+zf'_\gamma)^2-4f(\alpha\beta\gamma)f(xyz)=0$, se tiene que: $(4x+8y-20)^2-40(x^2+y^2+x-3y)=0$, es decir: $3x^2-3y^2-8xy+25x+25y-50=0$. Las tangentes son: $x-3y+10=0$, $3x+y-5=0$.

B 2- Dada la circunferencia $2x^2+2y^2-4x-3y=0$, hallar: 1º) La ecuación del conjunto de las tangentes que pasan por el punto $(3,4)$. 2º) El centro y el radio. 3º) Polo de la recta $4x-3y-3=0$. 4º) Polar del punto impropio de la recta $3x-y=0$.

Solución: 1º) Ecuación homogeneizada: $2x^2+2y^2-4xz-3yz=0$. De donde: $f'_x=4x-4z$, $f'_y=4y-3z$, $f'_z=-4x-3y$. La ecuación conjunta de las tangentes es: $(xf'_\alpha+yf'_\beta+zf'_\gamma)^2-4f(\alpha\beta\gamma)f(xyz)=0$. Luego: $144x^2+39y^2-208xy-32x+312y-576=0$. 2º) El centro es: $\left(1,\frac{3}{4}\right)$, y el radio: $r=\frac{5}{4}$. 3º) Siendo el polo (α,β), se tiene: $\frac{4\alpha-4}{4}=\frac{4\beta-3}{-3}=\frac{-4\alpha-3\beta}{-3}$. De donde se obtiene el polo: $(6,-3)$. 4º) El punto impropio es: $(1,3,0)$, luego la polar es: $xf'_1+yf'_3+zf'_0=0$, es decir: $4x+12y-13=0$.

B 3- Dada la circunferencia $x^2+y^2-4x-6y=0$, hallar: 1º) Las tangentes paralelas a $y=x$. 2º) El conjunto de las tangentes paralelas a $y=4x$.

Solución: 1º) La ecuación de las tangentes es: $y=x+\lambda$. Obligando a un solo punto de corte, se tiene: $(5-\lambda)^2-2(\lambda^2-6\lambda)=0$, $\lambda=1\pm\sqrt{26}$. Las tangentes son: $y=x+1\pm\sqrt{26}$. 2º) El punto por el que pasan las tangentes, es: $(1,4,0)$. Luego: $f'_x=2$, $f'_y=8$, $f'_z=-28$. La ecuación conjunta de las tangentes es: $(2x+8y-28z)^2-4\cdot 17(x^2+y^2-4xz-6yz)=0$, es decir, desarrollando y operando: $16x^2+y^2-8xy-40x+10y-196=0$.

B 4- Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a la recta $x-y+3=0$, y que pasa por los puntos $A(1,0)$, $B(4,0)$.

Solución: El centro de la circunferencia es: $\left(\frac{5}{2},\beta\right)$, luego la ecuación de la circunferencia, es: $x^2+y^2-5x-2\beta y+4=0$. Su intersección con la recta dada, corresponde a las raíces de la ecuación: $x^2+(x+3)^2-5x-2\beta(x+3)+4=0$, es decir: $2x^2+(1-2\beta)x+13-6\beta=0$. Haciendo que tenga una raíz doble, se tiene: $4\beta^2+44\beta-103=0$, de donde se obtiene: $\beta=\frac{-11\pm4\sqrt{14}}{2}$. La ecuación pedida es: $x^2+y^2-5x+\left(11\pm4\sqrt{14}\right)y+4=0$.

B 5- Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por $(0,0)$, es tangente a la recta $y=1+\sqrt{2}$, y corta ortogonalmente a la circunferencia $x^2+y^2-8x=0$.

Solución: La ecuación general particularizada por pasar por $(0,0)$, es: $x^2+y^2+ax+by=0$. Obligando a que el punto de corte con $y=1+\sqrt{2}$, sea único, se obtiene: $b=\frac{a^2\left(\sqrt{2}-1\right)-4\sqrt{2}-4}{4}$. Es decir: $x^2+y^2+ax+\frac{a^2\left(\sqrt{2}-1\right)-4\sqrt{2}-4}{4}y=0$. La condición de ortogonalidad de las circunferencias $A(x^2+y^2)+2Dx+2Ey+F=0$ y $A'(x^2+y^2)+2D'x+2E'y+F'=0$, es: $AF'+A'F=2DD'+2EE'$. Luego ha de cumplirse que $a=0$, por lo que la ecuación pedida es: $x^2+y^2-\left(1+\sqrt{2}\right)y=0$.

B 6- Hallar las tangentes comunes a las siguientes circunferencias: $\left(x-\sqrt{2}\right)^2+\left(y-\sqrt{2}\right)^2=4$, $\left(x-3\sqrt{2}-4\right)^2+\left(y-3\sqrt{2}-4\right)^2=\left(3\sqrt{2}+4\right)^2$.

Solución: La ecuación de una tangente es: $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$. La distancia del centro (x_0, y_0) a la tangente, viene dada por: $x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p = \pm R$. Luego se tiene: $\sqrt{2}\cos\alpha + \sqrt{2}\sin\alpha - p = \pm 2$, $\left(3\sqrt{2}+4\right)\cos\alpha + \left(3\sqrt{2}+4\right)\sin\alpha - p = \pm(3\sqrt{2}+4)$, teniendo las tangentes exteriores el mismo signo, y las interiores el signo cambiado. Desarrollando, se tiene para las tangentes exteriores: $p = \frac{-\sqrt{2}}{2}$, $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}-1\pm\sqrt{4\sqrt{2}-1}}{4}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}-1\mp\sqrt{4\sqrt{2}-1}}{4}$, siendo por tanto sus ecuaciones: $\left(2\sqrt{2}-1\mp\sqrt{4\sqrt{2}-1}\right)x + \left(2\sqrt{2}-1\pm\sqrt{4\sqrt{2}-1}\right)y + 2\sqrt{2} = 0$. Para las tangentes interiores se tiene: $p = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}-1\pm\sqrt{-1-4\sqrt{2}}}{4}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}-1\mp\sqrt{-1-4\sqrt{2}}}{4}$, por lo que sus ecuaciones son: $\left(2\sqrt{2}-1\mp\sqrt{-4\sqrt{2}-1}\right)x + \left(2\sqrt{2}-1\pm\sqrt{-4\sqrt{2}-1}\right)y - 2\sqrt{2} = 0$ (tangentes imaginarias).

B 7- Hallar las tangentes comunes a las siguientes circunferencias: $\left(x-\sqrt{2}\right)^2 + \left(y-\sqrt{2}\right)^2 = 2$, $\left(x-3\sqrt{2}-4\right)^2 + \left(y-3\sqrt{2}-4\right)^2 = \left(3\sqrt{2}+4\right)^2$.

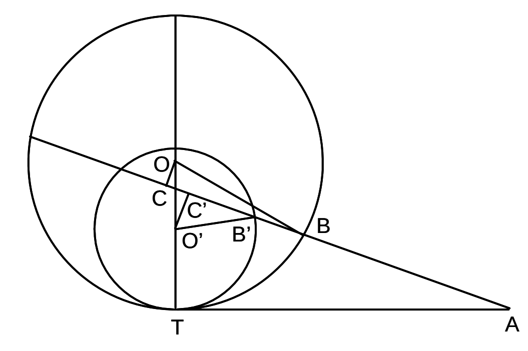
Solución: Procediendo como en el problema B 6, se tiene para las tangentes exteriores: $p = 0$, $\cos\alpha = 1$, $\sin\alpha = 0$, o bien: $\sin\alpha = 1$, $\cos\alpha = 0$, siendo sus ecuaciones $x = 0$, $y = 0$. Para las tangentes interiores, se tiene: $p = 2+\sqrt{2}$, $\cos\alpha = \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, siendo: $x + y - 2\sqrt{2} - 2 = 0$ la ecuación de la única tangente interior.

B 8- Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(4,0)$, y tal que el polo de $3x - y - 16 = 0$ sea $(5,2)$.

Solución: Sea la ecuación general homogeneizada de la circunferencia de centro (a,b) y radio r: $(x-az)^2 + (y-bz)^2 - r^2z^2 = 0$. Sus derivadas parciales son: $f'_x = 2(x-az) = 2(5-a)$, $f'_y = 2(y-bz) = 2(2-b)$, $f'_z = -2a(x-az) - 2b(y-bz) - 2r^2z = 2a^2 + 2b^2 - 10a - 4b - 2r^2$. Por tanto, se tiene que: $\frac{10-2a}{3} = \frac{4-2b}{-1} = \frac{2a^2+2b^2-10a-4b-2r^2}{-16}$. Este último término es igual a: $\frac{6a-4b-32}{-16}$, puesto que: $r^2 = (4-a)^2 + b^2$. Operando, eliminando a y b, se tiene: $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$.

B 9- Se dan dos circunferencias de radios R y r, tangentes interiores entre sí. Por el punto de contacto T, se traza la tangente común y sobre ella se toma una distancia $TA = d$. Se pide determinar el ángulo que formará con la tangente, una secante trazada desde A, que corta a las circunferencias según cuerdas que sean una doble de la otra. Se supone $R > r$. Aplicar al caso en que $R = 2r$ y $d = \frac{2r}{3}$.

Solución:



Sean las circunferencias dadas, tangentes interiores entre sí: $x^2 + (y-R)^2 = R^2$, $x^2 + (y-r)^2 = r^2$. La tangente común es: $y = 0$. Las coordenadas de A son $(d,0)$. La secante por A es: $y = m(x-d)$. Corta a la primera circunferencia, en el punto B, y a la segunda en B'. Las distancias desde los centros $O(0,R)$ y $O'(0,r)$ de las circunferencias, a dicha secante, son: $OC = \frac{R+md}{\sqrt{1+m^2}}$, $O'C' = \frac{r+md}{\sqrt{1+m^2}}$. Los cuadrados de las correspondientes semicuerdas, son: $CB^2 = R^2 - \frac{(R+md)^2}{1+m^2}$, $C'B'^2 = r^2 - \frac{(r+md)^2}{1+m^2}$. Luego se tiene: $R^2 - \frac{(R+md)^2}{1+m^2} = 4\left(r^2 - \frac{(r+md)^2}{1+m^2}\right)$. Operando: $m = \tan\theta = \frac{2d(R-4r)}{R^2-4r^2+3d^2}$. Para $R = 2r$, $d = \frac{2r}{3}$, obteniéndose que $\theta = \arctan(-2) = 116º33'54''2$.

B 10- Hallar la ecuación de la circunferencia ortogonal a otras tres, cuyas ecuaciones son: $x^2+y^2-4=0$, $x^2+y^2-10x+20=0$, $2x^2+2y^2+2y-1=0$.

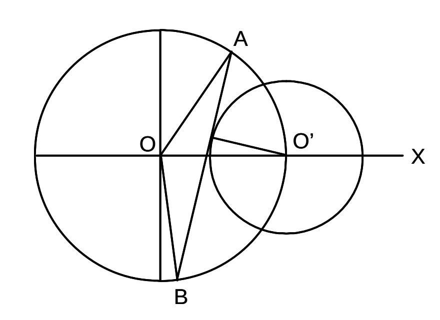
Solución: El eje radical de las dos primeras, es: $x=\frac{12}{5}$. El eje radical de la 1ª y 3ª, es: $y=\frac{-7}{2}$. El centro radical es: $\left(\frac{12}{5},\frac{-7}{2}\right)$. La potencia de este punto con relación a la primera circunferencia, es: $\left(\frac{12}{5}\right)^2+\left(\frac{-7}{2}\right)^2-4=R^2=\frac{1401}{100}$. La ecuación pedida es: $\left(x-\frac{12}{5}\right)^2+\left(y+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{1401}{100}=0$. Operando: $5x^2+5y^2-24x+35y+20=0$.

B 11- Dadas las circunferencias $x^2+y^2-2x+8y+11=0$, $x^2+y^2+4x+2y+5=0$, hallar las coordenadas de los puntos límites del haz que definen.

Solución: La segunda circunferencia tiene por centro $(-2,-1)$, siendo su radio 0. Por tanto, dicho centro es uno de los puntos límites. El eje radical de ambas circunferencias es: $x-y-1=0$. La línea de centros es: $x+y+3=0$. Ambas rectas se cortan en el punto $(-1,-2)$. El simétrico de $(-2,-1)$ respecto de $(-1,-2)$, es $(0,-3)$, que es el segundo punto límite.

B 12- Dadas las circunferencias $x^2+y^2-R^2=0$, $(x-R)^2+y^2-r^2=0$, y siendo A y B dos puntos de la primera, hallar la relación entre los ángulos $\widehat{AOX}=\alpha$, $\widehat{BOX}=\beta$, para que la cuerda AB sea tangente a la segunda circunferencia.

Solución:



Las coordenadas de A son: $A(R\cos\alpha,R\sin\alpha)$. Las coordenadas de B son: $(R\cos\beta,R\sin\beta)$. La ecuación de AB es: $\frac{y-R\sin\alpha}{R\sin\beta-R\sin\alpha}=\frac{x-R\cos\alpha}{R\cos\beta-R\cos\alpha}$. Como la distancia a $(R,0)$ es igual a r, se tiene que: $\frac{\sin\beta-\sin\alpha+\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\sqrt{2-2\sin\alpha\sin\beta-2\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{r}{R}$. Operando: $\frac{r}{R}=2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$.

B 13- Hallar en polares la ecuación de la circunferencia tangente a la cónica $\rho=\frac{p}{1+e\cos\omega}$, en el punto $\omega=\theta$, y que pasa por el polo.

Solución: La ecuación de una circunferencia que pasa por el polo es $r=2R\cos(\omega-\alpha)$, siendo R el radio, y α el argumento de su centro. En el punto definido por $\omega=\theta$, los radios vectores de la cónica y de la circunferencia, son iguales, así como sus respectivas derivadas, por ser común la tangente. Por tanto: $\frac{p}{1+e\cos\theta}=2R\cos(\theta-\alpha)$, $\frac{pe\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2}=-2R\sin(\theta-\alpha)$. Dividiendo estas dos ecuaciones entre sí, se tiene que: $\tan(\theta-\alpha)=\frac{-e\sin\theta}{1+e\cos\theta}$, de donde $\alpha=\theta+\arctan\frac{e\sin\theta}{1+e\cos\theta}$. Por tanto se deduce que: $2R=\frac{p}{(1+e\cos\theta)\cos\left(\arctan\frac{e\sin\theta}{1+e\cos\theta}\right)}$. Siendo: $\arctan\frac{e\sin\theta}{1+e\cos\theta}=\arcsin\frac{e\sin\theta}{\sqrt{1+2e\cos\theta+e^2}}=$ $=\arccos\frac{1+e\cos\theta}{\sqrt{1+2e\cos\theta+e^2}}$, se tiene que: $2R=\frac{p\sqrt{1+2e\cos\theta+e^2}}{(1+e\cos\theta)^2}$. Por tanto, la ecuación de la circunferencia es: $r=\frac{p\sqrt{1+2e\cos\theta+e^2}}{(1+e\cos\theta)^2}\cos\left(\omega-\theta-\arctan\frac{e\sin\theta}{1+e\cos\theta}\right)=$

$$=\frac{p\sqrt{1+2e\cos\theta+e^2}}{(1+e\cos\theta)^2}\left[\cos(\omega-\theta)\cdot\frac{1+e\cos\theta}{\sqrt{1+2e\cos\theta+e^2}}+\sin(\omega-\theta)\cdot\frac{e\sin\theta}{\sqrt{1+2e\cos\theta+e^2}}\right]=$$

$$=\frac{p}{(1+e\cos\theta)^2}[\cos(\omega-\theta)+e\cos\theta\cos(\omega-\theta)+e\sin\theta\sin(\omega-\theta)]=$$

$$=\frac{p}{(1+e\cos\theta)^2}[\cos(\omega-\theta)+e\cos(\theta-\omega+\theta)]=\frac{p}{(1+e\cos\theta)^2}[\cos(\omega-\theta)+e\cos(\omega-2\theta)].$$

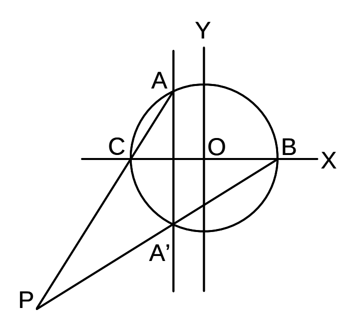
B 14- Hallar la ecuación de una circunferencia sabiendo que el origen de coordenadas es conjugado armónico del punto del infinito del eje OX, y que el polo de la recta $x+y=0$, es el punto $(-2,0)$.

Solución: La ecuación genérica homogeneizada es: $(x-az)^2+(y-bz)^2-R^2z^2=0$. Las derivadas parciales son: $f'_x=2(x-az)$, $f'_y=2(y-bz)$, $f'_z=-2a(x-az)-2b(y-bz)-2R^2z$. Como el punto $(0,0,1)$ es conjugado armónico de $(1,0,0)$, ha de cumplirse que: $x_1f'_{x_2}+y_1f'_{y_3}+z_1f'_{z_2}=0$. Luego, $a=0$. Particularizando para $(-2,0,1)$: $f'_x=-4$, $f'_y=-2b$, $f'_z=2b^2-2R^2$. Por tanto la ecuación de la polar es: $-4x-2by+2b^2-2R^2=0$. De donde: $\frac{-4}{1}=\frac{-2b}{1}=\frac{2b^2-2R^2}{0}$, es decir: $b=2$, $R^2=4$. La ecuación de la circunferencia es: $x^2+(y-2)^2-4=x^2+y^2-4y=0$.

Sección C - LUGARES GEOMÉTRICOS

C 1- Se considera un círculo de centro el origen de coordenadas y radio R. Se consideran rectas paralelas al eje OY, que cortan a la circunferencia en los puntos A y A'. Se unen los extremos del diámetro BC, perpendicular a AA', con A y A'. Hallar el lugar geométrico de los puntos P de intersección de estas rectas, cuando varía la cuerda.

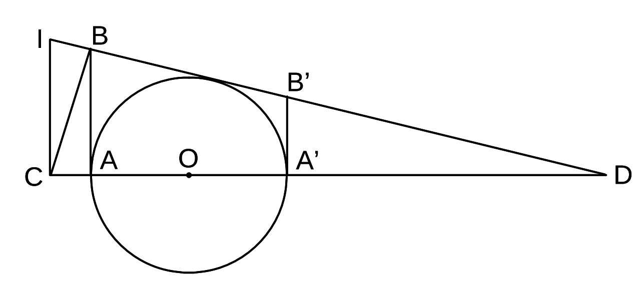
Solución:



Ecuación de la circunferencia: $x^2+y^2-R^2=0$. Ecuación de la recta AA': $x=\lambda$. Coordenadas de los puntos A y A': $\left(\lambda,\pm\sqrt{R^2-\lambda^2}\right)$. Coordenadas de los extremos B y C del diámetro perpendicular a AA': $B(R,0)$, $C(-R,0)$. La ecuación de AB es: $y(\lambda-R)=(x-R)\sqrt{R^2-\lambda^2}$. La ecuación de $A'C$ es: $y(\lambda+R)=-(x+R)\sqrt{R^2-\lambda^2}$. Dividiendo ambas ecuaciones, se tiene: $\lambda=\frac{R^2}{x}$. Sustituyendo este valor, se obtiene la ecuación pedida: $x^2-y^2-R^2=0$.

C 2- Sea AA' un diámetro fijo del círculo O. Una tangente variable corta a las tangentes trazadas en A y A', en los puntos B y B', respectivamente. La perpendicular por B a BB', corta a AA' en C. La perpendicular por C a AA', corta a BB' en I. Hallar el lugar geométrico de I.

Solución:



Tomando como ejes AA' y AB, la ecuación de la circunferencia es: $x^2+y^2-2Rx=0$. La ecuación de la tangente trazada desde $B(0,\lambda)$ es: $(\lambda^2-R^2)x+2\lambda Ry-2\lambda^2R=0$. La ecuación de la recta BC es: $y-\lambda=\frac{2\lambda Rx}{\lambda^2-R^2}$. Las coordenadas de C son: $\left(\frac{R^2-\lambda^2}{2R},0\right)$. Las coordenadas del punto I vienen dadas por la intersección de la recta: $x=\frac{R^2-\lambda^2}{2R}$, con la recta: $(\lambda^2-R^2)x+2\lambda Ry-2\lambda^2R=0$. Eliminando $\lambda=\frac{(x-R)^2}{y}$, se tiene la ecuación del lugar pedido: $(x-R)^4-R^2y^2+2Rxy^2=0$.

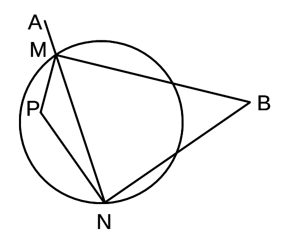
C 3- Dada la circunferencia $x^2+y^2-R^2=0$, hallar el lugar geométrico de los polos de las tangentes a la circunferencia $x^2+y^2-2rx=0$, con relación a la primera circunferencia.

Solución: Sea (α,β) uno de los polos buscados. Su polar especto a la primera circunferencia, es: $\alpha x+\beta y-R^2=0$. Obligando a que sea tangente a la segunda circunferencia, se tiene: $\frac{\alpha r-R^2}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=r$.

Sustituyendo α,β por x,y, se tiene la ecuación pedida: $r^2y^2+2rR^2x-R^4=0$.

C 4- Se da una circunferencia y dos puntos exteriores A y B. Por A se traza una secante que corta a la circunferencia en M y N. Por M se traza la perpendicular a BM, y por N la perpendicular a BN. Hallar el lugar geométrico de P, punto de intersección de ambas perpendiculares.

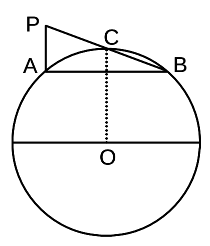
Solución:



Sean $A(a,b)$, $B(c,d)$, $P(\alpha,\beta)$, y sea la circunferencia dada: $x^2+y^2-R^2=0$. Como $\widehat{BMP}=\widehat{BNP}=90º$, los cuatro puntos son concíclicos, siendo el centro de la circunferencia $\left(\frac{\alpha+c}{2},\frac{\beta+d}{2}\right)$ y su radio $\sqrt{\frac{(\alpha-c)^2+(\beta-d)^2}{4}}$. Por tanto, operando y simplificando, la ecuación de esta circunferencia, es: $x^2+y^2-(\alpha+c)x-(\beta+d)y+\alpha c+\beta d=0$. El eje radical de esta circunferencia y de la dada, es: $(\alpha+c)x+(\beta+d)y-\alpha c-\beta d-R^2=0$. Como esta recta ha de pasar por el punto $A(a,b)$, se tiene: $(\alpha+c)a+(\beta+d)b-\alpha c-\beta d-R^2=0$. Sustituyendo α,β por x,y, se tiene la ecuación pedida: $(a-c)x+(b-d)y+ac+bd-R^2=0$.

C 5- En una circunferencia se traza una cuerda variable *AB* de dirección fija. Se une *B* con el punto medio *C* del arco *AB*. Hallar el lugar geométrico de la intersección *P* de *BC* con la perpendicular en *A* a *AB*.

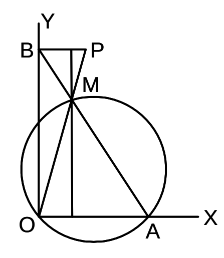
Solución:



Tomando como eje *OX* la paralela a la dirección dada por el centro *O* de la circunferencia, y como eje *OY* su perpendicular por *O*, se tiene que la ecuación de la circunferencia es: $x^2+y^2-R^2=0$, la de *AB* es: $y=\lambda$, las coordenadas de *A* y *B* son: $\left(\pm\sqrt{R^2-\lambda^2},\lambda\right)$, y las de $C(0,R)$. La ecuación de *BC* es: $y=\frac{\lambda-R}{\sqrt{R^2-\lambda^2}}x+R$. La ecuación de *AP* es: $x=-\sqrt{R^2-\lambda^2}$. Por tanto, las coordenadas del punto *P* son: $x=-\sqrt{R^2-\lambda^2}$, $y=2R-\lambda$. Eliminando λ, se obtiene la ecuación pedida: $x^2+y^2-4Ry+3R^2=0$, que corresponde a una circunferencia simétrica de la dada con relación a *C*.

C 6- Dado el punto $A(2,0)$, se considera la circunferencia que pasa por el origen *O* y por *A*, siendo su radio $\sqrt{2}$. Se une *A* con un punto *M* variable de la circunferencia. La recta *MA* corta en *B* al eje *OY*. Por *B* se traza una paralela al eje *OX* que corta en *P* a *OM*. Hallar el lugar geométrico de *P*.

Solución:

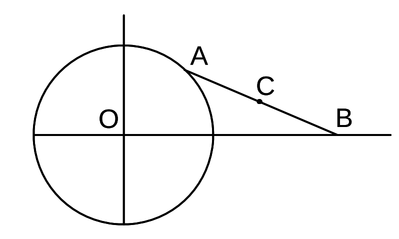


Sea la ecuación de la circunferencia: $x^2+y^2-2x-2y=0$, y sea $M(\lambda,\mu)$ un punto de ella. La ecuación de *AM* es: $\mu x-(\lambda-2)y-2\mu=0$, y las coordenadas de *B*: $\left(0,\frac{2\mu}{2-\lambda}\right)$. La ecuación de *BP* es: $y=\frac{2\mu}{2-\lambda}$, y la de *OM* es: $\mu x-\lambda y=0$. Las coordenadas del punto *P* son: $x=\frac{2\lambda}{2-\lambda}$, $y=\frac{2y}{2-\lambda}$. De donde se obtiene: $\lambda=\frac{2x}{2+x}$, $\mu=\frac{2y}{2+x}$. Como λ,μ satisfacen a la ecuación de la circunferencia, se tiene que:

$\left(\frac{2x}{2+x}\right)^2 + \left(\frac{2y}{2-\lambda}\right)^2 - \frac{4x}{2+x} - \frac{4y}{2+x} = 0$. Simplificando y operando, se tiene la ecuación del lugar geométrico pedido: $y^2 - xy - 2x - 2y = 0$.

C 7- Se considera una circunferencia de centro el origen de coordenadas y radio R. Se une un punto A de la circunferencia con un punto B del eje OX, de forma que $AB = 2R$. Hallar el lugar geométrico del punto C medio de AB.

Solución:



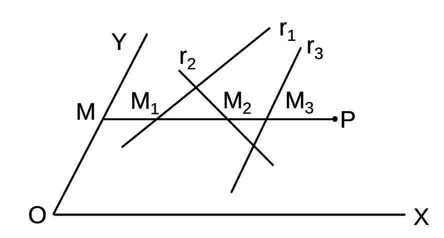
Sea la ecuación de la circunferencia: $x^2 + y^2 - R^2 = 0$, y sean: $B(a,0)$, $A(\lambda,\mu)$, $C(\alpha,\beta)$. Se tiene: $\alpha = \frac{\lambda + a}{2}$, $\beta = \frac{\mu}{2}$, es decir: $\lambda = 2\alpha - a$, $\mu = 2\beta$. Introduciendo estos valores en la ecuación de la circunferencia, sustituyendo α,β por x,y, y operando, se tiene la ecuación del lugar geométrico pedido: $x^4 + 9y^4 + 10x^2y^2 - 4R^2x^2 = 0$.

C 8- Se dan dos circunferencias O y O', y una recta d perpendicular a OO'. Se toma sobre d un punto variable P, y se pide el lugar geométrico de los puntos de intersección de las polares de P con relación a O y O'. Se tomará la recta d como eje OY, y las ecuaciones de las circunferencias serán $(x-a)^2 + y^2 - R^2 = 0$, $(x-b)^2 + y^2 - r^2 = 0$.

Solución: Sea $P(0,\beta)$. Las ecuaciones homogeneizadas de O y O', son: $(x-az)^2 + y^2 - R^2z^2 = 0$, $(x-bz)^2 + y^2 - r^2z^2 = 0$. Las derivadas parciales de O, particularizadas para el punto P, son: $f'_x = 2(x-az) = -2a$, $f'_y = 2y = 2\beta$, $f'_z = -2a(x-az) - 2R^2z = 2a^2 - 2R^2$. Y las de O', son: $f'_x = 2(x-b) = -2b$, $f'_y = 2y = 2\beta$, $f'_z = -2b(x-bz) - 2r^2z = 2b^2 - 2r^2$. Las polares respectivas son: $-2ax + 2\beta y + 2(a^2 - R^2) = 0$, $-2bx + 2\beta y + 2(b^2 - r^2) = 0$. Eliminando β, la ecuación del lugar pedido es: $(a-b)x - a^2 + b^2 + R^2 - r^2 = 0$.

C 9- En un sistema de ejes oblicuos XOY, se dan n rectas $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Una recta variable, paralela a OX, corta en M a OY, y en $M_1, \ldots, M_n$ a las citadas rectas. Se toma sobre esta recta variable, un punto P tal que $MP = k(BM_1 + BM_2 + \ldots + BM_n)$. Hallar el lugar geométrico de P.

Solución:



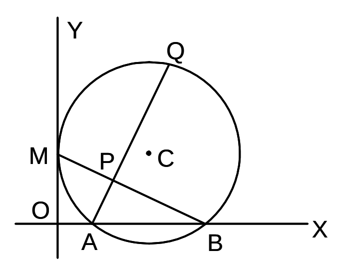
Sea la recta r_n de ecuación $x + a_ny + b_n = 0$. Al cortarla por $y = \lambda$, se tiene $M_n(b_n + a_n\lambda, \lambda)$. Las coordenadas de P son: $[k(b_1 + a_1\lambda + \ldots + b_n + a_n\lambda), \lambda]$. Luego la ecuación del lugar geométrico de P, es: $x = k(b_1 + a_1y + \ldots + b_n + a_ny)$, es decir, la recta: $x + k(a_1 + \ldots + a_n)y + k(b_1 + \ldots + b_n) = 0$.

C 10- Dados los puntos $A(a,0)$ y $B(b,0)$, hallar el lugar geométrico del centro del círculo inscrito en el triángulo MAB, cuando M describe el eje OY.

Solución: Siendo $M(0,\lambda)$, las ecuaciones de los lados del triángulo son: $y = 0$, $\lambda x + ay - a\lambda = 0$, $\lambda x + by - b\lambda = 0$. Siendo (x,y) las coordenadas del incentro, las distancias de este punto a los tres lados, son iguales. Por tanto: $y = \frac{\lambda x + ay - a\lambda}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} = \frac{\lambda x + by - b\lambda}{\sqrt{b^2 + \lambda^2}}$. Eliminando λ entre estas ecuaciones, se tiene la ecuación del lugar geométrico pedido: $x^3 - xy^2 - (a+b)x^2 + (a+b)y^2 + abx = 0$.

C 11- Una circunferencia variable pasa por $A(a,0)$, corta a OX en B, y es tangente a OY en M. Hallar el lugar geométrico del punto P, proyección de A sobre MB, y el del punto Q, intersección de AP con la circunferencia.

Solución:



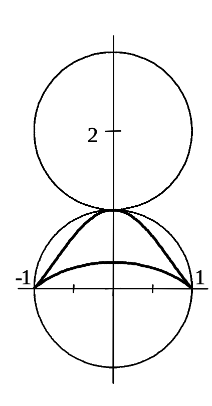
Sean: $C(\alpha,\beta)$ el centro de la circunferencia, $M(0,\beta)$, $B(2\alpha-a,0)$. La ecuación de la circunferencia es: $x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\beta^2=0$. Como pasa por A, la ecuación queda: $x^2+y^2-\frac{a^2+\beta^2}{a}x-2\beta y+\beta^2=0$, que corta a OX en $B\left(\frac{\beta^2}{a},0\right)$. La ecuación de MB es: $\frac{ax}{\beta}+y-\beta=0$. Y la de su perpendicular por A, es: $\frac{\beta}{a}x-y-\beta=0$, de donde: $\beta=\frac{ay}{x-a}$, que sustituido en la ecuación de MB, da el lugar geométrico de P: $x^3+xy^2-2ax^2-2ay^2+a^2x=0$. Sustituyendo dicho valor de β, en la ecuación de la circunferencia, se obtiene la ecuación del lugar geométrico de Q: $x^4+x^2y^2-3ax^3-5axy^2+3a^2x^2+4a^2y^2-a^3x=0$.

C 12- Dado un círculo y una recta, hallar el lugar geométrico de los puntos tales que la longitud de la tangente al círculo, trazada desde un punto P del lugar, sea igual a la distancia del punto a la recta dada.

Solución: Sea el círculo: $x^2+y^2-R^2=0$. Tomando como eje OY la paralela por el centro del círculo a la recta dada, se tiene que la ecuación de esta es: $x-a=0$. Siendo (α,β) un punto de la circunferencia, la ecuación de la tangente en dicho punto, es: $\alpha x+\beta y-R^2=0$. Siendo $P(\lambda,\mu)$, estas coordenadas deben satisfacer a la ecuación de la tangente, luego se tiene que: $\alpha\lambda+\beta\mu-R^2=0$. Según el enunciado, $(\alpha-\lambda)^2+(\beta-\mu)^2=(\lambda-a)^2$. Por tanto, se tiene el sistema de tres ecuaciones: $\alpha^2+\beta^2-R^2=0$, $\alpha\lambda+\beta\mu-R^2=0$, $(\alpha-\lambda)^2+(\beta-\mu)^2-(\lambda-a)^2=0$. Desarrollando esta última ecuación, se tiene: $\alpha^2+\lambda^2-2\alpha\lambda+\beta^2+\mu^2-2\beta\mu-\lambda^2-a^2+2a\lambda=0$. Introduciendo las sustituciones: $\alpha^2+\beta^2=R^2$, $\alpha\lambda+\beta\mu=R^2$, y cambiando λ,μ por x,y, se tiene la ecuación pedida: $y^2+2ax-R^2-a^2=0$.

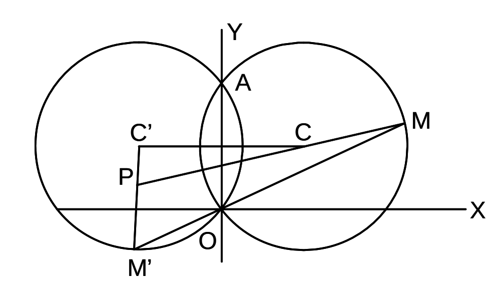
C 13- Se dan las circunferencias $x^2+y^2-4y+3=0$, $x^2+y^2-1=0$. Por cada punto P de la primera se traza la polar respecto a la segunda, y además, por dicho punto, se traza una paralela al eje OY. Hallar el lugar geométrico de los puntos de intersección de ambas rectas.

Solución: Sea $P(\alpha,\beta)$, siendo: $\alpha^2+\beta^2-4\beta+3=0$. La polar de P respecto a la segunda circunferencia, es: $\alpha x+\beta y-1=0$. La paralela a OY es: $x-\alpha=0$. Luego, $y=\frac{1-\alpha^2}{\beta}$. Por tanto, la ecuación pedida es: $\alpha^2+\left(\frac{1-\alpha^2}{\beta}\right)^2-4\left(\frac{1-\alpha^2}{\beta}\right)+3=0$. Es decir, sustituyendo α,β por x,y, y operando, se tiene la ecuación pedida: $x^4+x^2y^2+4x^2y-2x^2+3y^2-4y+1=0$. En el siguiente dibujo se ha incluido esta curva en línea gruesa y las dos circunferencias dadas en línea fina.



C 14- Se consideran dos circunferencias C y C' que pasan por el origen y cuyo eje radical es el eje OY. El centro de C es (a,b) y el de C' $(-a,b)$. Por el origen se traza una recta variable que corta a C en M y a C' en M'. Hallar el lugar geométrico del punto P, intersección de las rectas MC y $M'C'$. Se estudiará la posición del lugar obtenido, con relación al triángulo ACC', siendo A el segundo punto de intersección de dichas circunferencias.

Solución:



La ecuación de C es: $x^2+y^2-2ax-2by=0$. Y la de C': $x^2+y^2+2ax-2by=0$. Siendo $M(\alpha,\beta)$, la ecuación de MC es: $\frac{x-a}{\alpha-a}=\frac{y-b}{\beta-b}$. Siendo $M'(\lambda,\mu)$, la de $M'C'$ es $\frac{x+a}{\lambda+a}=\frac{y-b}{\mu-b}$. La recta MM' es: $\frac{x-\alpha}{\lambda-\alpha}=\frac{y-\beta}{\mu-\beta}$. Como esta recta pasa por el origen, se tiene que: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\lambda}{\mu}$. Haciendo: $\alpha=k\beta$, $\lambda=k\mu$, y sustituyendo estos valores en las ecuaciones de C y C', se tiene: $\beta=\frac{2ak+2b}{k^2+1}$, $\mu=\frac{-2ak+2b}{k^2+1}$. Sustituyendo estos valores en las ecuaciones de MC y $M'C'$, se tienen dos ecuaciones de segundo grado en k, cuyos coeficientes han de ser proporcionales, por lo que se tienen las siguientes igualdades: $\frac{-b(x-a)-a(y-b)}{-b(x+a)+a(y-b)}=\frac{2a(x-a)-2b(y-b)}{-2a(x+a)-2b(y-b)}=\frac{b(x-a)+a(y-b)}{b(x+a)-a(y-b)}$. Operando en la primera igualdad, se obtiene: $x^2+y^2+\frac{a^2-3b^2}{b}y-2a^2+2b^2=0$, que es la ecuación del lugar pedido. Como las coordenadas de C, C' y $A(0,2b)$ satisfacen a esta ecuación, el lugar es la circunferencia circunscrita a $CC'A$.

Nota: $\widehat{MPM'}=\widehat{C'OC}=\widehat{C'AC}$, luego $\widehat{C'PC}$ es suplementario de $\widehat{C'AC}$, y el cuadrilátero $CAC'P$ es inscriptible en un círculo.

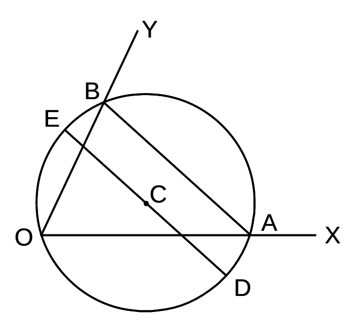
C 15- Los vértices de un triángulo son los puntos $A(0,3)$, $B(0,0)$, $C(4,0)$, que son respectivamente, centros de tres círculos de radios 1, 1 y 2. Determinar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuyas polares respecto a los tres círculos, son concurrentes. Calcular el área encerrada por el lugar.

Solución: Las ecuaciones homogeneizadas de las tres circunferencias y sus derivadas parciales, son: a) $x^2+y^2-6yz+8z^2=0$, $f'_x=2x$, $f'_y=2y-6z$, $f'_z=-6y+16z$; b) $x^2+y^2-z^2=0$, $f'_x=2x$, $f'_y=2y$, $f'_z=-2z$; c) $x^2+y^2-8xz+12z^2=0$, $f'_x=2x-8z$, $f'_y=2y$, $f'_z=-8x+24z$. Para que sean concurrentes las tres polares, ha de cumplirse que: $\begin{vmatrix} 2x & 2x & 2x-8 \\ 2y-6 & 2y & 2y \\ -6y+16 & -2 & -8x+24 \end{vmatrix}=0$. De donde la ecuación del lugar pedido es: $x^2+y^2-\frac{13}{4}x-3y+1=0$. El centro de esta circunferencia es el punto $\left(\frac{13}{8},\frac{3}{2}\right)$, siendo su radio $\sqrt{\frac{249}{64}}$. El área encerrada por el lugar es: $\frac{249\pi}{64}$.

C 16- En ejes oblicuos de ángulo θ, se traza un círculo de radio constante, que pasa por el origen. Corta a los ejes en A y B. Hallar el lugar geométrico de los extremos del diámetro paralelo a AB.

Solución: La ecuación general de la circunferencia que tiene por centro el punto (a,b) y cuyo radio constante es R, es: $(x-a)^2+(y-b)^2+2(x-a)(y-b)\cos\theta=R^2$. Por pasar por el origen de coordenadas se tiene que: $a^2+b^2+2ab\cos\theta=R^2$ (**I**). Sustituyendo este valor de R^2 en la ecuación de la circunferencia, se tiene: $x^2+y^2-2(a+b\cos\theta)x-2(b+a\cos\theta)y=0$ (**II**). De donde se obtiene: $A[2(a+b\cos\theta),0]$, $B[0,2(b+a\cos\theta)]$. La pendiente de AB es: $\frac{b+a\cos\theta}{-a-b\cos\theta}$. La ecuación del diámetro DE es: $y-b=\frac{b+a\cos\theta}{-a-b\cos\theta}(x-a)$. De donde haciendo: $\frac{y-b}{b+a\cos\theta}=\frac{x-a}{-(a+b\cos\theta)}=\lambda$, se tienen las

igualdades: $x-a=-\lambda(a+b\cos\theta)$, $y-b=\lambda(b+a\cos\theta)$ (**III**). Sustituyendo estos valores en (**I**) y teniendo en cuenta (**II**), se obtiene: $\lambda^2=\dfrac{1}{1-\cos^2\theta}=\dfrac{1}{\sin^2\theta}$ (**IV**). Despejando a y b en las ecuaciones (**III**), se tiene: $a=\dfrac{y\lambda\cos\theta+x(\lambda+1)}{\lambda^2\cos^2\theta-\lambda^2+1}$, $b=\dfrac{-x\lambda\cos\theta-y(\lambda-1)}{\lambda^2\cos^2\theta-\lambda^2+1}$. Sustituyendo estos valores en la ecuación (**II**), se tiene: $x^2[\lambda^2(\cos^2\theta-1)+2\lambda(\cos^2\theta-1)-1]+y^2[\lambda^2(\cos^2\theta-1)+2\lambda(1-\cos^2\theta)-1]-$ $-4xy\cos\theta=0$. Operando y teniendo en cuenta (**IV**), se obtiene: $x^2(1\pm\sin\theta)+y^2(1\mp\sin\theta)+$ $+2xy\cos\theta=0$, ecuación que representa el conjunto de las dos rectas: $x(1+\sin\theta)+y\cos\theta=0$, $x(1-\sin\theta)+y\cos\theta=0$, que son el lugar pedido. Estas rectas son perpendiculares entre sí, y forman con los ejes coordenados ángulos de $\dfrac{90^\circ-\theta}{2}$.



Nota: Los arcos AD y BE son constantes e iguales a $\dfrac{90^\circ-\theta}{2}$, por lo que $\widehat{AOD}=\widehat{BOE}=\dfrac{90^\circ-\theta}{2}$, y el lugar geométrico pedido está formado por las rectas OD y OE.

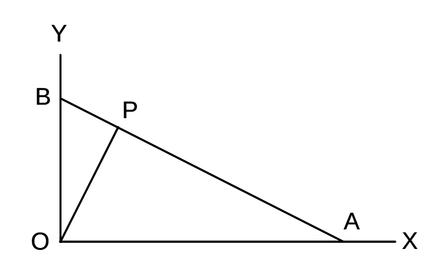
C 17- En ejes rectangulares se dan los puntos $A(a,0)$, $B(0,b)$. Por el origen se traza una paralela a AB. Se consideran tres círculos que tienen el mismo eje radical. El primero es tangente a OX en A. El segundo es tangente a OY en B. El tercero es tangente en O a la paralela a AB. 1º) Demostrar que el eje radical pasa por un punto fijo, hallándolo. 2º) Hallar el lugar geométrico de los puntos comunes a los tres círculos.

Solución: El centro de la primera circunferencia es (a,λ), el de la segunda (μ,b), el de la tercera $(\nu b,\nu a)$. Por tanto, sus ecuaciones son: $x^2+y^2-2ax-2\lambda y+a^2=0$, $x^2+y^2-2\mu x-2by+b^2=0$, $x^2+y^2-2\nu bx-2\nu ay=0$. La ecuación del eje radical de las circunferencias primera y tercera, es: $(-2a+2\nu b)x+(-2\lambda+2\nu a)y+a^2=0$. Y la del eje radical de las circunferencias segunda y tercera, es: $(-2\mu+2\nu b)x+(-2b+2\nu a)y+b^2=0$. Como es el mismo eje radical: $\dfrac{-a+\nu b}{-\mu+\nu b}=\dfrac{-\lambda+\nu a}{-b+\nu a}=\dfrac{a2}{b^2}$. De donde se obtiene que: $\lambda=\dfrac{-\nu a^3+a^2b+\nu ab^2}{b^2}$, $\mu=\dfrac{\nu a^2b+ab^2-\nu b^3}{a^2}$. Por tanto, la ecuación del eje radical es: $-2ax-\dfrac{2a^2y}{b}+a^2+\nu\left(2bx+\dfrac{2a^3y}{b^2}\right)=0$. Resolviendo el sistema: $-2ax-\dfrac{2a^2y}{b}+a^2=0$, $2bx+\dfrac{2a^3y}{b^2}=0$, el punto fijo es: $\left(\dfrac{a^3}{2a^2-2b^2},\dfrac{-b^3}{2a^2-2b^2}\right)$. 2º) Siendo $\nu=\dfrac{2ab^2x+2a^2by-a^2b^2}{2b^3x+2a^3y}$, introduciendo este valor en la ecuación de la tercera circunferencia, se tiene el lugar de los puntos comunes: $x^2+y^2-2(bx+ay)\dfrac{2ab^2x+2a^2by-a^2b^2}{2b^3x+2a^3y}=0$. Desarrollando esta ecuación y operando, se tiene la ecuación pedida: $b^3x^3+a^3x^2y+b^3xy^2+a^3y^3-2ab^3x^2-4a^2b^2xy-2a^3by^2+a^2b^3x+a^3b^2y=0$.

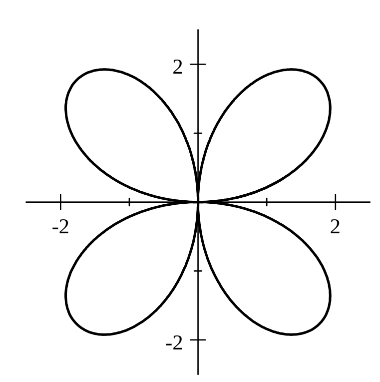
Nota: En el problema E 147, se ha dibujado esta curva para $a=1$, $b=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

C 18- Hallar el lugar geométrico de los pies P de las perpendiculares trazadas desde el origen sobre los segmentos AB de longitud a, cuyos extremos describen los ejes coordenados.

Solución:



Siendo $OA = m$, $OB = n$, la ecuación de AB es: $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$, y la de OP es: $mx - ny = 0$. De esta ecuación, y como $m^2 + n^2 = a^2$, se tiene: $m = \frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $n = \frac{ax}{\sqrt{x^2+y^2}}$ Sustituyendo estos valores en la ecuación de AB, se tiene la ecuación del lugar pedido: $x^6 + y^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 - a^2x^2y^2 = 0$. El dibujo de esta curva para $a = 5$, es el siguiente:



C 19- El haz de rectas: $x^2 - 3xy - 2y^2 + \lambda(3x^2 - 4xy + y^2) = 0$, corta a la recta $r \equiv 2x - y + 5 = 0$, en A y B. Por A se traza la perpendicular a OA, y por B la perpendicular a OB. Ambas perpendiculares se cortan en M, cuyo lugar geométrico se pide.

Solución: Los puntos $OAMB$ son concíclicos, siendo la ecuación homogeneizada de su circunferencia circunscrita: $x^2 + y^2 + axz + byz = 0$. La ecuación del haz de rectas que pasan por O y por los puntos A y B, de intersección de la circunferencia con la recta $r \equiv 2x - y + 5z = 0$, por lo que $z = \frac{-2x+y}{5}$, es: $x^2 + y^2 + ax\frac{-2x+y}{5} + by\frac{-2x+y}{5} = 0$. Operando. y ordenando esta ecuación, se tiene que: $(5-2a)x^2 + +(5+b)y^2 + xy(a-2b) = 0$. Por tanto, como la ecuación ordenada del haz dado es: $(1+3\lambda)x^2 - -(2-\lambda)y^2 - xy(3+4\lambda) = 0$, se tiene que: $\frac{5-2a}{1+3\lambda} = \frac{5+b}{-2+\lambda} = \frac{a-2b}{-3-4\lambda} = \mu$. De donde se obtiene: $a = \frac{5-\mu(1+3\lambda)}{2}$, $b = \mu(-2+\lambda) - 5$, $\mu = \frac{-25}{\lambda+13}$. Por tanto, sustituyendo μ, se tiene: $a = \frac{40\lambda+45}{\lambda+13}$, $b = \frac{-30\lambda-15}{\lambda+13}$. Como M es el simétrico de $(0,0)$, respecto del centro de la circunferencia $\left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}\right)$, sus coordenadas son $(-a,-b)$, es decir: $x = \frac{-40\lambda-45}{\lambda+13}$, $y = \frac{30\lambda+15}{\lambda+13}$. Eliminando λ entre estas dos igualdades, se tiene la ecuación del lugar pedido: $15x + 19y + 30 = 0$.

C 20- Dado un polígono regular de n lados, hallar el lugar geométrico de los puntos tales que la suma de los cuadrados de sus distancias a los vértices del polígono, sea igual a una constante dada k^2.

Solución: Siendo P un punto del lugar, O el centro del polígono, R el radio de su círculo circunscrito, los puntos A, B,..., N los vértices del polígono, $\theta = \widehat{AOP}$, $OP = d$, se tiene que los cuadrados de las distancias de P a los diferentes vértices, son: $PA^2 = d^2 + R^2 - 2Rd\cos\theta$, $PB^2 = d^2 + R^2 - 2Rd\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{n}\right)$,..., $PN^2 = d^2 + R^2 - 2Rd\cos\left(\theta + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)$. Sumando estas n igualdades y operando, se tiene que: $PA^2 + \ldots + PN^2 = n(d^2 + R^2) - 2Rd\sum_{i=0}^{n-1}\cos\left(\theta + \frac{2i\pi}{n}\right) = k^2$. Como $\sum_{i=0}^{n-1}\cos\left(\theta + \frac{2i\pi}{n}\right) = 0$, se obtiene: $d^2 = \frac{k^2}{n} - R^2$. Luego el lugar pedido es una circunferencia de centro O y radio $\sqrt{\frac{k^2}{n} - R^2}$.

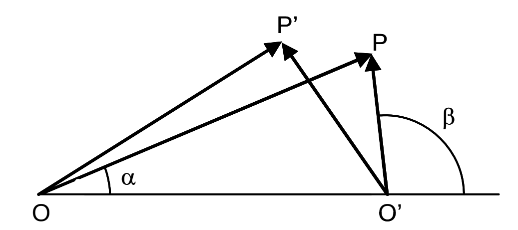
C 21- Sobre el eje OX se dan dos puntos, $A(a,0)$ y $B(b,0)$, que se proyectan en A' y B' sobre una recta variable que pasa por O. Hallar el lugar geométrico del punto P, intersección de las rectas AB' y $A'B$.

Solución: Sea la recta variable que pasa por O: $y = \frac{-x}{m}$. Las ecuaciones de las rectas AA' y BB' son: $y = m(x-a)$, $y = m(x-b)$. Sus puntos de corte con la recta variable, son: $A'\left(\frac{am^2}{m^2+1}, \frac{-am}{m^2+1}\right)$, $B'\left(\frac{bm^2}{m^2+1}, \frac{-bm}{m^2+1}\right)$. La ecuación de AB', es: $y = -bm\frac{x-a}{m^2(b-a)-a}$. La ecuación de BA', es: $y = -am\frac{x-b}{m^2(a-b)-b}$. Las coordenadas de su punto de intersección P, son: $x = \frac{ab(1+2m^2)}{(a+b)(1+m^2)}$,

$y = \dfrac{-mab}{(a+b)(1+m^2)}$. Eliminando m, se tiene el lugar pedido: $x^2 + y^2 - \dfrac{3abx}{a+b} + \dfrac{2a^2b^2}{(a+b)^2} = 0$.

C 22- Dos rayos giran con movimiento uniforme alrededor de dos centros O y O', con velocidades angulares ω y ω'. Hallar el lugar geométrico de los puntos de intersección de los rayos homólogos.

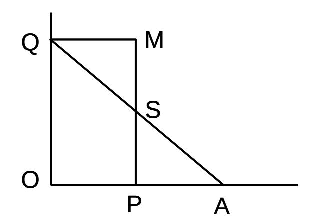
Solución:



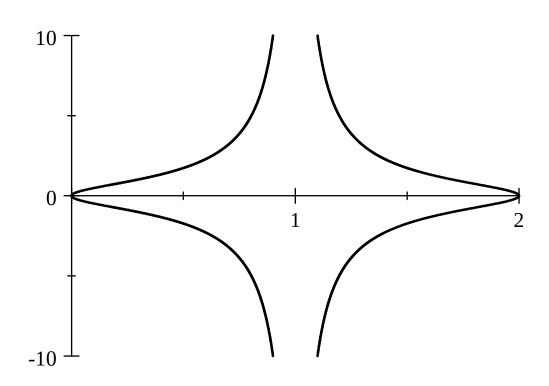
Sean $O(0,0)$ y $O'(d,0)$. Siendo P el punto de intersección de dos rayos homólogos, $\rho = OP$, $\rho' = O'P$, α y β los ángulos iniciales de los rayos homólogos con el eje OO', y siendo t el tiempo transcurrido desde el inicio del giro, se tiene que: $\rho e^{(\alpha+\omega t)i} = d + \rho'^{(\beta\pm\omega' t)i}$, correspondiendo el signo + o el signo −, según giren en el mismo u opuesto sentido. Desarrollando la parte real: $\rho\cos(\alpha+\omega t) = d + \rho'\cos(\beta\pm\omega' t)$, y la parte imaginaria: $\rho\sin(\alpha+\omega t) = \rho'\sin(\beta\pm\omega' t)$. Luego $\rho' = \rho\dfrac{\sin(\alpha+\omega t)}{\sin(\beta\pm\omega' t)}$. Sustituyendo este valor en la parte real: $\rho\cos(\alpha+\omega t) = d + \rho\dfrac{\sin(\alpha+\omega t)\cos(\beta\pm\omega' t)}{\sin(\beta\pm\omega' t)}$. De donde se obtiene la ecuación del lugar pedido: $\rho = \dfrac{d\sin(\beta\pm\omega' t)}{\sin[\beta-\alpha+t(\pm\omega'-\omega)]}$. Para el caso $\alpha=\beta=0$, se tiene: $\rho = \dfrac{d\sin(\pm\omega' t)}{\sin(t(\pm\omega'-\omega))}$. Para el caso $\omega' = -\omega$, $\rho = \dfrac{d}{2\cos\omega t}$, que es la mediatriz de OO'. Si $\omega' = +\omega$, $\rho = \infty$, que es la recta del infinito.

C 23- Dado el punto $A(a,0)$, siendo $a > 0$, hallar el lugar geométrico del punto M que proyectado en P y Q sobre OX y OY, sea tal que MP y AQ se corten en un punto S situado entre A y Q, a la distancia a de A.

Solución:



Sean $M(\lambda,\mu)$, $P(\lambda,0)$, $Q(0,\mu)$, $AQ \equiv \frac{x}{a} + \frac{y}{\mu} = 1$, $MP \equiv x - \lambda = 0$, $S\left[\lambda, \mu\left(1-\frac{\lambda}{a}\right)\right]$. Luego la distancia SA viene dada por: $SA^2 = (\lambda-a)^2 + \mu^2\left(\dfrac{a-\lambda}{a}\right)^2 = a^2$. Sustituyendo (λ,μ) por (x,y), se tiene: $(x-a)^2(y^2+a^2) = a^4$. O bien, desarrollando esta expresión: $x^2y^2 - 2axy^2 + a^2x^2 + a^2y^2 - 2a^3x = 0$. Esta curva tiene dos ramas, una en la que $x > a$ y otra en la que $x < a$, siendo ambas ramas simétricas respecto a la recta $x - a = 0$. El lugar geométrico pedido corresponde únicamente a la rama en la que $x < a$. El dibujo de esta curva para $a = 1$, es el siguiente, en el que se incluyen las dos ramas.



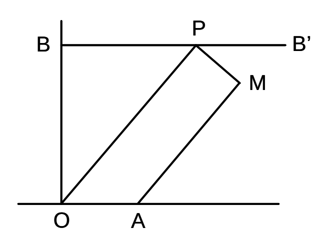
C 24- Sean $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),\ldots,N(x_n,y_n)$, una serie de puntos en un plano, y O un punto fijo en el mismo plano. Si se traza por este punto una recta cualquiera y sobre ella se determina un punto M tal que la distancia OM sea inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las distancias a la recta OM de cada uno de los puntos $A,B,\ldots,N$, se pide: 1º) La ecuación del lugar geométrico de M. 2º) Determinar las condiciones que deben cumplir las coordenadas de O, de forma que el lugar sea un círculo.

Solución: 1º) Tomando $O(\alpha,\beta)$ como origen de coordenadas, la ecuación de la recta es $y-mx=0$, $M(\lambda,m\lambda)$, y las coordenadas de los puntos dados son (x_i',y_i'), donde $x_i'=x_i-\alpha$, $y_i'=y_i-\beta$. La distancia OM es: $\lambda\sqrt{1+m^2}$, y la suma de los cuadrados de las distancias de los puntos dados a la recta, es: $\frac{(mx_1'-y_1')^2}{1+m^2}+\ldots+\frac{(mx_n'-y_n')}{1+m^2}=\frac{\sum(mx_i'-y_i')^2}{1+m^2}$. Luego, $\lambda\sqrt{1+m^2}=\frac{k}{\sqrt{\frac{\sum(mx_i'-y_i')^2}{1+m^2}}}$. Por tanto: $\lambda^2\sum(mx_i'-y_i')^2=k^2$. Sustituyendo, $\lambda=x$, $m=\frac{y}{x}$, se tiene la ecuación de la cónica lugar de M: $\sum(yx_i'-xy_i')^2=k^2$, que desarrollada es: $x^2\sum y_i'^2+y^2\sum x_i'^2-2xy\sum x_i'y_i'-k^2=0$. 2º) Las condiciones pedidas que debe cumplir O, son: $\sum x_i'^2=\sum y_i'^2$, $\sum x_i'y_i'=0$, es decir: $\sum(x_i-\alpha)^2=\sum(y_i-\beta)^2$, $\sum(x_i-\alpha)(y_i-\beta)=0$. Desarrolladas, se tiene: $n(\alpha^2-\beta^2)-2\alpha\sum x_i+2\beta\sum y_i+\sum x_i^2-\sum y_i^2=0$; $n\alpha\beta-\alpha\sum y_i-\beta\sum x_i+\sum x_iy_i=0$.

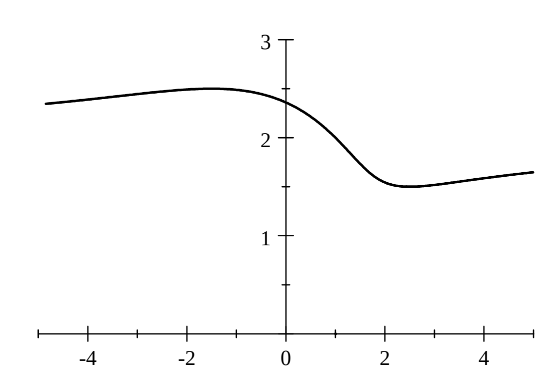
Nota: Las raíces α,β de estas dos últimas ecuaciones, corresponden a las coordenadas del foco de la cónica cuya ecuación tangencial es: $u^2\sum x^2+2uv\sum xy+v^2\sum y^2+2uw\sum x+2vw\sum y+nw^2=0$.

C 25- Se traza por O una recta variable OP, que corta en P a la recta BB', paralela a OX por el punto $B(0,b)$. Por P se traza la perpendicular PM sobre OP. Por $A(a,0)$ se traza una paralela AM a OP que corta a PM en M. Hallar el lugar geométrico de M.

Solución:

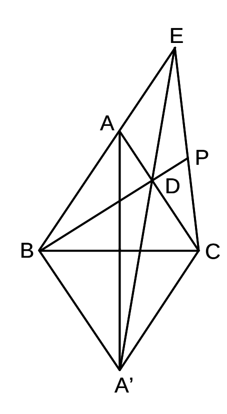


Sea la ecuación de la recta variable, $OP\equiv y-mx=0$. Siendo la ecuación de $BB'\equiv y-b=0$, se tiene que: $P\left(\frac{b}{m},b\right)$, $PM\equiv y-b+\frac{1}{m}\left(x-\frac{b}{m}\right)=0$, $AM\equiv y-m(x-a)=0$, $m=\frac{y}{x-a}$. Sustituyendo, se tiene que: $y-b=\frac{-(x-a)}{y}\left[x-\frac{b(x-a)}{y}\right]$. Operando y simplificando, se obtiene la ecuación pedida: $x^2y+y^3-bx^2-axy-by^2+2abx-a^2b=0$. El dibujo de esta curva para $a=1$, $b=2$, es el siguiente:



C 26- Se dan dos triángulos equiláteros ABC y $A'BC$. Por A' se traza una recta cualquiera que encuentra a AC en D, y a AB en E. Hallar el lugar geométrico del punto P, intersección de BD y CE.

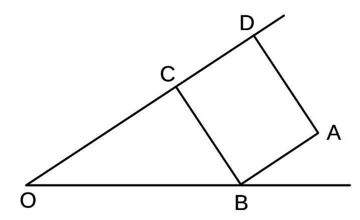
Solución:



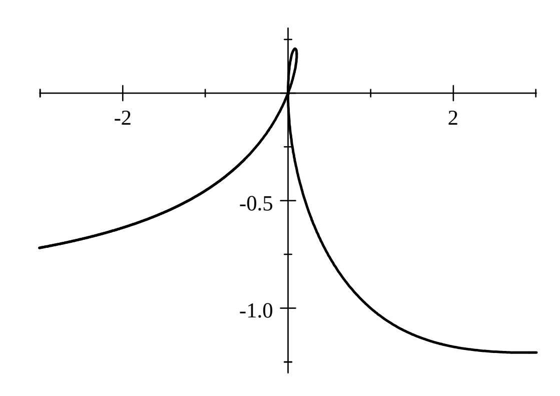
Tomando como origen el punto medio de BC, y siendo $2a$ el lado de los triángulos equiláteros, se tiene: $C(a,0)$, $B(-a,0)$, $A\left(0,a\sqrt{3}\right)$, $A'\left(0,-a\sqrt{3}\right)$, $AC \equiv \sqrt{3}\,x+y-a\sqrt{3}=0$, $AB \equiv -\sqrt{3}\,x+y-a\sqrt{3}=0$. La escuación de la recta que pasa por A', es: $A'DE \equiv mx-y-a\sqrt{3}=0$. Luego las coordenadas de D y E, son: $D\left(\dfrac{2a\sqrt{3}}{m+\sqrt{3}},\dfrac{2a\sqrt{3}\,m}{m+\sqrt{3}}-a\sqrt{3}\right)$, $E\left(\dfrac{2a\sqrt{3}}{m-\sqrt{3}},\dfrac{2a\sqrt{3}\,m}{m-\sqrt{3}}-a\sqrt{3}\right)$. Por tanto, se tiene que la ecuación de la recta BD, es: $\left(3a\sqrt{3}+am\right)y-(x+a)\left(a\sqrt{3}\,m-3a\right)=0$. Y la ecuación de la recta CE, es: $\left(3a\sqrt{3}-am\right)y-(x-a)\left(a\sqrt{3}\,m+3a\right)=0$. De la ecuación de BD, se obtiene $m=\dfrac{3\sqrt{3}\,y+3a}{\sqrt{3}\,x}$, y de la de CE, $m=\dfrac{3x}{a\sqrt{3}-y}$. Igualando estos dos valores de m, y operando, se obtiene la ecuación pedida: $x^2+y^2+\dfrac{(a-3)\sqrt{3}}{3}y-a^2=0$, que es una circunferencia.

C 27- Un rectángulo variable $ABCD$ tiene el vértice A fijo, CD pasa por un punto fijo O, y B se nueve sobre una recta fija que pasa por O. Hallar el lugar geométrico del vértice C, opuesto al vértice A.

Solución:

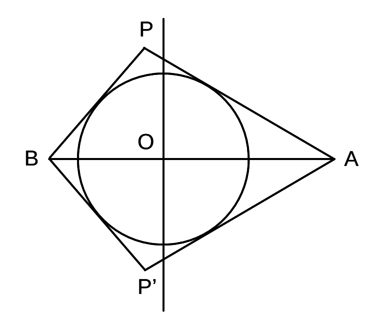


Siendo $OB \equiv y=0$, $O(0,0)$, $A(a,b)$, $B(\lambda,0)$, la ecuación de OC, paralela a AB, es: $y=\dfrac{-bx}{\lambda-a}$; $BC \equiv y=\dfrac{(\lambda-a)(x-\lambda)}{b}$. Luego $\lambda=\dfrac{ay-bx}{y}$. Sustituyendo y operando: $y^3+x^2y+bx^2-axy=0$. El dibujo de esta curva para $a=b=1$, es el siguiente:



C 28- Se dan dos puntos fijos $A(a,0)$ y $B(-b,0)$. Por ellos se trazan tangentes a una circunferencia de centro el origen y radio variable. Hallar el lugar geométrico de los puntos de intersección de dichas tangentes.

Solución:



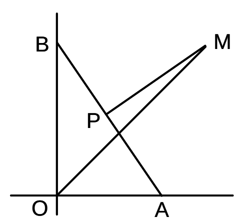
Sea la tangente trazada desde A, $AP \equiv y - \lambda(x-a) = 0$, y sea la tangente trazada desde B, $BP \equiv y - \mu(x+b) = 0$. Las distancias desde el origen a estas rectas, son iguales, luego: $\frac{-a\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}} = \frac{b\mu}{\sqrt{\mu^2+1}}$. Sustituyendo en esta expresión los valores de $\lambda = \frac{y}{x-a}$, y de $\mu = \frac{y}{x+b}$, se tiene: $a^2\left[(x+b)^2+y^2\right] - b^2\left[(x-a)^2+y^2\right] = 0$. Operando, se obtiene la ecuación de la circunferencia: $(a-b)(x^2+y^2)+2abx = 0$.

C 29- Se dan dos ejes rectangulares y un círculo C tangente a OX en $A(a,0)$ y a OY en $B(0,a)$, siendo $a > 0$. 1º) Hallar la ecuación general de los círculos Γ tangentes a OY y ortogonales a C. 2º) Hallar el lugar geométrico de los centros de Γ. 3º) Por cada punto M del plano, pasan dos círculos Γ. Hallar la región donde debe estar M para que los dos círculos Γ sean reales. 4º) Se consideran dos círculos Γ tangentes a OY en D y D', tales que $OD \cdot OD' = a^2$. Hallar el lugar de los puntos de encuentro de estos dos círculos Γ. 5º) Se consideran dos círculos Γ ortogonales. Hallar el lugar del punto de encuentro de las polares del origen respecto de dichos dos círculos.

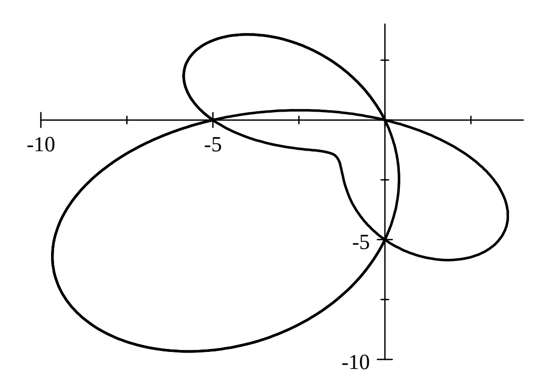
Solución: 1º) La ecuación de la circunferencia C es: $x^2+y^2-2ax-2ay+a^2 = 0$. La ecuación de un círculo tangente a OY, de centro (α,β) es: $x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\beta^2 = 0$. La condición de ortogonalidad de estos dos círculos, es: $2a\alpha+2a\beta = a^2+\beta^2$, de donde $\alpha = \frac{(a-\beta)^2}{2a}$. Por tanto la ecuación de Γ es: $ax^2+ay^2-(a-\beta)^2x-2a\beta y+a\beta^2 = 0$. 2º) El lugar geométrico de los centros de Γ es: $y^2-2ax-2ay+a^2 = 0$. 3º) Ordenando la ecuación de Γ, según las potencias de β, se tiene: $(a-x)\beta^2+2a(x-y)\beta+ax^2+ay^2-a^2x = 0$. La condición que debe cumplir el discriminante de esta ecuación para que las dos raíces sean reales, es: $a^2(x-y)^2-(a-x)(ax^2+ay^2-a^2x) = $ $= ax\left[\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+(y-a)^2-\frac{a^2}{4}\right] \geq 0$. Como $a > 0$, la región pedida corresponde a los cuadrantes 1º y 4º, salvo el interior del círculo de centro $\left(\frac{a}{2},a\right)$ y radio $\frac{a}{2}$. Para $x = 0$, y para la circunferencia del citado círculo, el discriminante es nulo, existiendo para los correspondientes puntos un círculo doble Γ. 4º) Las ecuaciones de los dos círculos son las siguientes: $(a-x)\lambda^2+2a(x-y)\lambda+ax^2+ay^2-a^2x = 0$, $(a-x)\mu^2+2a(x-y)\mu+ax^2+ay^2-a^2x = 0$, siendo $\lambda\mu = a^2 = \frac{ax^2+ay^2-a^2x}{a-x}$. De donde el lugar pedido de los puntos de encuentro de los dos círculos Γ, es: $x^2+y^2 = a^2$. 5º) Las polares del punto $(0,0,1)$ vienen dadas por $f'_z = 0$. Por tanto se tiene el sistema: $(2a-x)\lambda^2+2a(x-y)\lambda-a^2x = 0$, $(2a-x)\mu^2+2a(x-y)\mu-a^2x = 0$, junto con la condición de ortogonalidad, cuya ecuación es: $\frac{(a-\lambda)^2(a-\mu)^2}{2a^2}+2\lambda\mu = \lambda^2+\mu^2$. De donde se obtienen las igualdades siguientes: $\lambda+\mu = \frac{2a(x-y)}{x-2a}$, $\lambda\mu = \frac{a^2x}{x-2a}$, $[a^2-a(\lambda+\mu)+\lambda\mu]^2 = 2a^2(\lambda-\mu)^2$. Luego la ecuación del lugar geométrico del punto de encuentro de las polares del origen de coordenadas respecto de dos círculos Γ ortogonales, es la siguiente: $y^2-4xy+2ay+4ax-a^2 = 0$.

C 30- Hallar el lugar geométrico de los pies P de las perpendiculares trazadas desde un punto M de la bisectriz del ángulo XOY, sobre la recta de un segmento de longitud constante cuyos extremos A,B se apoyan en OX y OY respectivamente.

Solución: Sea el segmento de longitud constante: $AB = a$. Se tiene: $A(m,0)$, $B\left(0, \sqrt{a^2-m^2}\right)$, $M(\lambda,\lambda)$, $AB \equiv \frac{x}{m} + \frac{y}{\sqrt{a^2-m^2}} = 1$, $MP \equiv y-\lambda = \frac{m}{\sqrt{a^2-m^2}}(x-\lambda)$. Eliminando m entre estas dos ecuaciones, se tiene la ecuación pedida: $[x(x-\lambda)+y(y-\lambda)]^2[(x-\lambda)+y(y-\lambda)]^2 - a^2(x-\lambda)^2(y-\lambda)^2 = 0$.

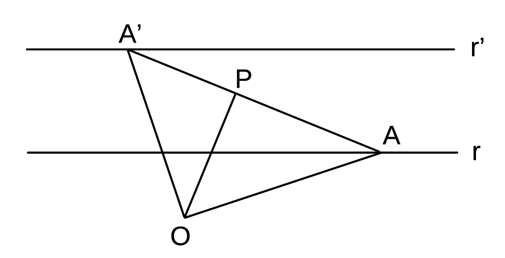


Trasladando los ejes paralelamente a sí mismos, tomando como origen el punto M, la ecuación es: $(x^2+y^2)(x^2+y^2+\lambda x+\lambda y)^2 - a^2x^2y^2 = 0$. El dibujo de esta curva para el punto $M(5,5)$, y para $a = 10$, es el siguiente:



C 31- Un segmento de recta AA', comprendido entre dos paralelas r y r', es visto desde un punto fijo O, bajo un ángulo recto. Hallar el lugar geométrico del punto P, intersección de AA' con la perpendicular bajada desde O sobre AA'.

Solución:



Tomando como origen el punto O, y como eje OX, la paralela por O a las rectas dadas, se tiene: $O(0,0)$, $r \equiv y-d = 0$, $r' \equiv y-d' = 0$, $P(\alpha,\beta)$, $OP \equiv y - \frac{\beta}{\alpha}x$, $AA' \equiv y-\beta+\frac{\alpha}{\beta}(x-\alpha)$, $A\left(\alpha - \frac{\beta(d-\beta)}{\alpha}, d\right)$, $A'\left(\alpha - \frac{\beta(d'-\beta)}{\alpha}, d'\right)$. La pendiente de la recta OA es: $\dfrac{d}{\alpha - \frac{\beta(d-\beta)}{\alpha}}$. La pendiente de la recta OA' es: $\dfrac{d'}{\alpha - \frac{\beta(d'-\beta)}{\alpha}}$. La condición de perpendicularidad de las pendientes de estas dos rectas, es la siguiente: $\dfrac{d}{\alpha - \frac{\beta(d-\beta)}{\alpha}} \cdot \dfrac{d'}{\alpha - \frac{\beta(d'-\beta)}{\alpha}} = -1$. Operando, se obtiene: $(x^2+y^2)[x^2+y^2-(d+d')y+dd'] = 0$. El lugar se compone del origen y de una circunferencia.

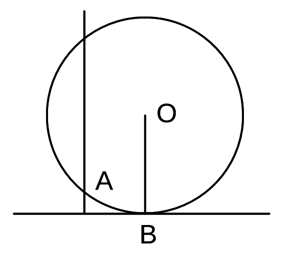
C 32- Hallar el lugar geométrico de los puntos desde los cuales se pueden trazar pares de tangentes perpendiculares a la curva $y = x^3$.

Solución: Sea (α,β) un punto del lugar. Una recta cualquiera que pasa por él, es: $y-\beta = m(x-\alpha)$. Las abscisas de los puntos de intersección con la curva, vienen dadas por: $x^3 = \beta + m(x-\alpha)$, que en coordenadas homogéneas, es: $x^3 - mxz^2 + (-\beta + m\alpha)z^3 = 0$. Para obligar a que esta ecuación tenga una

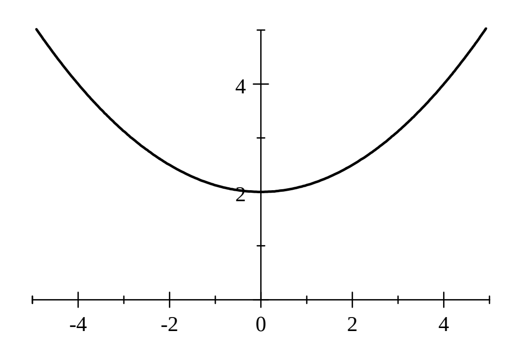
raíz doble, se elimina x entre f'_x y f'_z. Como $f'_x = 3x^2 - m = 0$, $f'_z = -2mx + 3(-\beta + m\alpha) = 0$, se tiene que: $x = \frac{3(m\alpha - \beta)}{2m} = \sqrt{\frac{m}{3}}$. Operando, se obtiene: $4m^3 - 27\alpha^2 m^2 + 54\alpha\beta m - 27\beta^2 = 0$. Hay que obligar a que dos de las raíces sean perpendiculares, es decir: $m_1 m_2 = -1$. Se tiene que: $m_1 + m_2 + m_3 = \frac{27\alpha^2}{4}$, $m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3 = \frac{27\alpha\beta}{2}$, $m_1 m_2 m_3 = \frac{27\beta^2}{4}$. Haciendo $m_1 m_2 = P$, $m_1 + m_2 = S$, se tiene que: $S + m_3 = \frac{27\alpha^2}{4}$, $P + m_3 S = \frac{27\alpha\beta}{2}$, $Pm_3 = \frac{27\beta^2}{4}$. Como $P = -1$, se tienen las siguientes igualdades: $m_3 = \frac{-27\beta^2}{4}$, $S = \frac{27\alpha^2}{4} + \frac{27\beta^2}{4}$, $-1 + \frac{-27\beta^2 S}{4} = \frac{27\alpha\beta}{2}$. Igualando los valores de S obtenidos de las dos últimas ecuaciones, operando y sustituyendo α, β por x, y, se tiene la ecuación del lugar geométrico pedido: $729y^4 + 729x^2y^2 + 216xy + 16 = 0$.

C 33- Hallar el lugar geométrico del centro de las circunferencias que pasan por un punto dado A y son tangentes a una recta dada.

Solución:

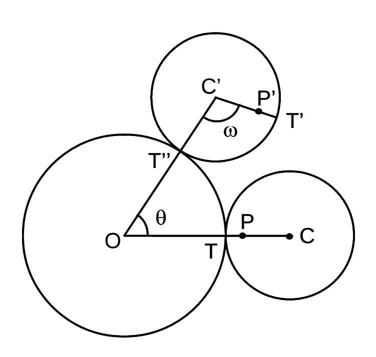


Tomando como eje OX la recta dada y como coordenadas de $A(0,a)$, sea el centro O de la circunferencia (λ,μ) y su radio $OB = \mu$. La ecuación de la circunferencia es: $(x-\lambda)^2 + (y-\mu)^2 - \mu^2 = 0$. Como pasa por $(0,a)$, $\lambda^2 + (a-\mu)^2 - \mu^2 = 0$, es decir: $\lambda^2 + a^2 - 2a\mu = 0$. Como es tangente a $y = 0$ en B, se tiene: $(x-\lambda)^2 + \mu^2 - \mu^2 = 0$. Luego: $x = \lambda$. La ecuación pedida es: $x^2 - 2ay + a^2 = 0$. El dibujo de esta parábola para $a = 4$, es el siguiente:



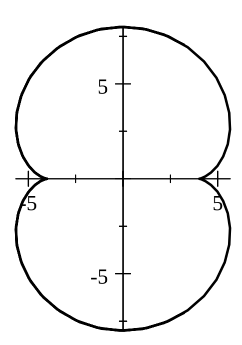
C 34- Hallar el lugar geométrico de un punto fijo situado en el plano de un círculo, cuando este rueda sin deslizamiento sobre un círculo dado, al que es tangente bien por su exterior, bien por su interior.

Solución:



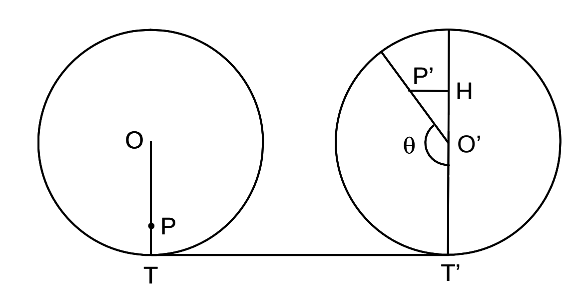
Sea O el centro del círculo fijo de radio R, sea C el centro del círculo de radio r, que gira tangente a aquel, y sea P el punto fijo situado en el círculo C a una distancia d de su centro, es decir, $PC = d$. Tomando O como origen de coordenadas, y $OTPC$ como eje OX (ver la figura), se tiene: $O(0,0)$, $T(R,0)$, $C(R+r,0)$, $P(R+r-d,0)$. Tras girar el ángulo θ, las coordenadas de C' (nueva posición del centro C) son:

$[(R+r)\cos\theta,(R+r)\sin\theta]$. El punto de tangencia T ha rotado hasta T', siendo T'' el nuevo punto de tangencia, de forma que el arco $TT''=R\theta$ =arco $T''T'=r\omega$. Luego $\omega=\frac{R\theta}{r}=\widehat{T''C'T'}$. Siendo (α,β) las coordenadas de P' (nueva posición de P) en relación con C', se tiene: $\alpha=d\cos(\pi-\omega-\theta)$, $\beta=d\sin(\pi-\omega-\theta)$. Sustituyendo en estas ecuaciones el valor de ω hallado más arriba, se tiene que: $\alpha=-d\cos(\omega+\theta)=-d\cos\left(\frac{R\theta}{r}+\theta\right)=-d\cos\left(\frac{(R+r)\theta}{r}\right)$, $\beta=d\sin\frac{(R+r)\theta}{r}$. Por tanto, sumando a estas coordenadas las de C', halladas antes, se obtienen las ecuaciones paramétricas del lugar geométrico pedido: $x=(R+r)\cos\theta-d\cos\frac{(R+r)\theta}{r}$, $y=(R+r)\sin\theta-d\sin\frac{(R+r)\theta}{r}$, que corresponden a una epicicloide. Cambiando r por $-r$, y d por $-d$, se tienen las ecuaciones para el caso de tangencia en el interior del círculo C (hipocicloide). El dibujo de la epicicloide para $R=4$, $r=2$, $d=2$, es el siguiente:

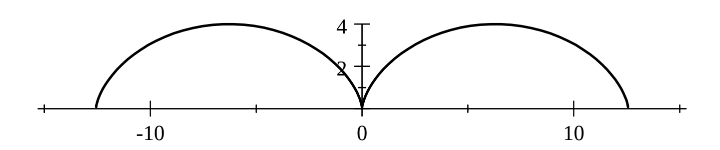


C 35- Hallar el lugar geométrico de un punto fijo situado en el plano de un círculo que rueda sin deslizamiento sobre una línea recta. El punto puede estar a una distancia del centro del círculo, mayor, igual o menor que su radio.

Solución:



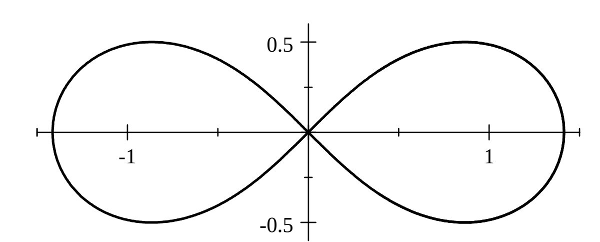
Sea r el radio del círculo y d la distancia del punto P al centro O del círculo. El círculo ha girado un ángulo θ, de forma que O ha tomado la posición O', encontrándose P en P'. Las coordenadas de O son $(0,r)$ y las de $O'(\theta r,r)$. Se tiene que: $P'H=d\sin\theta$, $O'H=-d\cos\theta$. Por tanto, las coordenadas de P' son: $(\theta r-d\sin\theta, r-d\cos\theta)$. Luego las ecuaciones paramétricas de la curva descrita por P, son: $x=\theta r-d\sin\theta$, $y=r-d\cos\theta$. Estas ecuaciones corresponden a una cicloide. Si $d<r$, la cicloide es corta; si $d=r$, la cicloide es ordinaria; si $d>r$, la cicloide es larga. El dibujo de la cicloide para $r=d=2$, es el siguiente:



C 36- Se da el segmento AB de longitud $2c$. Hallar el lugar geométrico de los puntos cuyo producto de distancias a A y B es igual a una constante dada a^2.

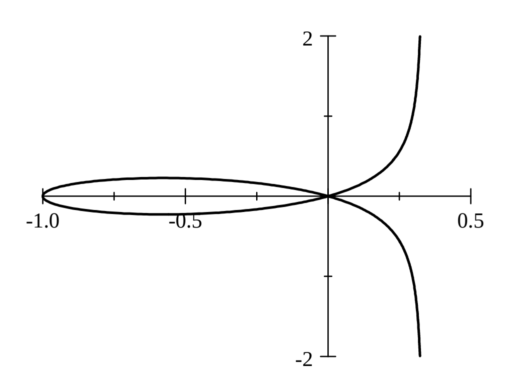
Solución: Siendo el origen de coordenadas el punto medio de AB, se tiene $A(-c,0)$, $B(c,0)$. Luego, $\sqrt{(x-c)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2$. Operando se tiene que: $(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2=a^4$. O bien,

$(x^2+y^2)^2 - 2c^2(x^2-y^2) = a^4 - c^4$ (curva u óvalo de Cassini). Si $a = c$, se obtiene la lemniscata de Bernoulli: $(x^2+y^2)^2 = 2c^2(x^2-y^2)$. El dibujo de esta curva para $a = c = 1$, es el siguiente:



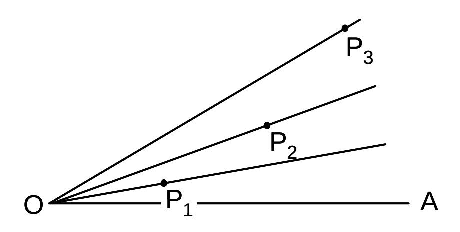
C 37- Se da una circunferencia de centro A y radio $AO = a$. Se traza por O la perpendicular OD al radio AO. Se toma sobre OA un punto B tal que $OB = 3 \cdot OA$. Se traza una paralela a OAB a una distancia b de OAB. Sobre esta paralela se proyecta A en C, y O en D, punto de corte de BD con OD. Se toma un punto P sobre el círculo, cuya proyección sobre OAB es Q. Se une Q con C. La recta QC corta a la recta BD en R. La recta AR corta a la recta CD en S. Se toma el segmento CS en magnitud y sentido, y se lleva sobre OA, a partir de O, obteniéndose el punto T. Se levanta por T la perpendicular a OA, hasta que corte en M a OP. Hallar el lugar geométrico de M (y de su simétrico N respecto de OA).

Solución: $O(0,0)$, $A(-a,0)$, $D(0,b)$, $C(-a,b)$, $B(-3a,0)$. La ecuación del círculo es: $x^2+y^2+2ax = 0$, o sea $y = \pm\sqrt{-x^2-2ax}$. Sea $OQ = \lambda$, la ecuación de QC es: $y = \dfrac{b(x+\lambda)}{-a+\lambda}$. La ecuación de BD es: $y = \dfrac{b(x+3a)}{3a}$. Las coordenadas de R son: $x = \dfrac{3a^2}{\lambda-4a}$, $y = \dfrac{b}{3a}\left(\dfrac{3a^2}{\lambda-4a}+3a\right)$. La ecuación de CD es: $y = b$. La ecuación de AR es: $y = \dfrac{b}{3a}\left(\dfrac{3a^2}{\lambda-4a}+3a\right)\dfrac{x+a}{\dfrac{3a^2}{\lambda-4a}+a}$. Las coordenadas de S son: $\left(\dfrac{2a^2}{\lambda-3a}, b\right)$. La longitud del segmento SC es: $\dfrac{a\lambda-a^2}{x-a}$. La ecuación del lugar geométrico de M es: $y = \pm x\sqrt{\dfrac{x+a}{a-3x}}$, o bien, $x^2(x+a)+y^2(3x-a) = 0$ Se trata del folium de Descartes. La ecuación de la curva es independiente del parámetro b, por lo que el hecho de que la recta CD esté a mayor o menor distancia de la recta AO, no incide en el lugar geométrico. El dibujo de esta curva para $a = 1$, es el siguiente:



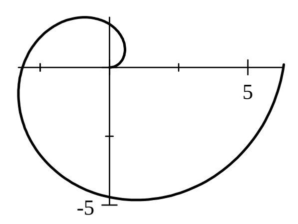
C 38- Se da la semirrecta OA que gira uniformemente alrededor de O. El punto O se desplaza uniformemente sobre OA, tomando las posiciones P_1, P_2,... Hallar el lugar geométrico de P.

Solución:



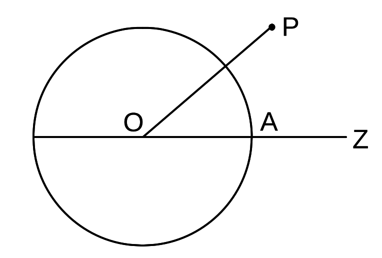
Siendo v la velocidad de desplazamiento de P sobre OA, y siendo ω la velocidad de giro de OA, se tiene:

$OP = \rho = vt$, $\theta = \widehat{AOP} = \omega t$. Luego: $\rho = k\theta$, siendo $k = \frac{v}{\omega}$. Las ecuaciones paramétricas del lugar pedido, son: $x = vt\cos\omega t$, $y = vt\sin\omega t$. Su ecuación cartesiana es: $\sqrt{x^2+y^2} = k\arctan\frac{y}{x}$. Se trata de la espiral de Arquímedes. El dibujo de esta curva para $k = 1$, es el siguiente:

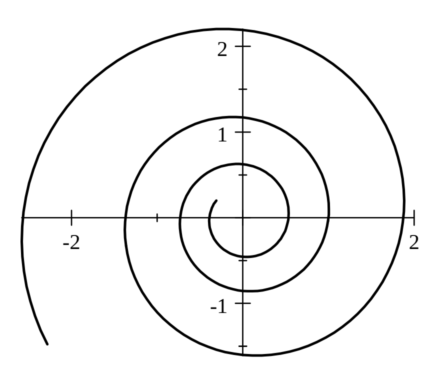


C 39- Se da la recta *OAZ* que gira alrededor de un punto fijo *O*. En *A* se sitúa un punto *P* que se aleja de *O*, recorriendo *AZ* con una velocidad proporcional a la distancia *OP*, mientras *OAZ* gira uniformemente alrededor de *O*. Hallar el lugar geométrico de *P*.

Solución::



$OA = a$, $\widehat{POA} = \theta = \omega t$, siendo ω la velocidad angular de *OP*, y t el tiempo transcurrido. Siendo ρ el radio vector de *P*, se tiene que: $d\rho = k\rho dt$, $\frac{d\rho}{\rho} = kdt$, $\ln\rho = kt + C$, $\rho = Ae^{kt}$. Como $t = \frac{\theta}{\omega}$, y siendo $m = \frac{k}{\omega}$, se tiene: $\rho = Ae^{m\theta}$. Para $\theta = 0$, $\rho = a$, quedando la ecuación: $\rho = ae^{m\theta}$ (espiral logarítmica). El dibujo de esta curva para $a = 1$, $m = 0.1$, es el siguiente:

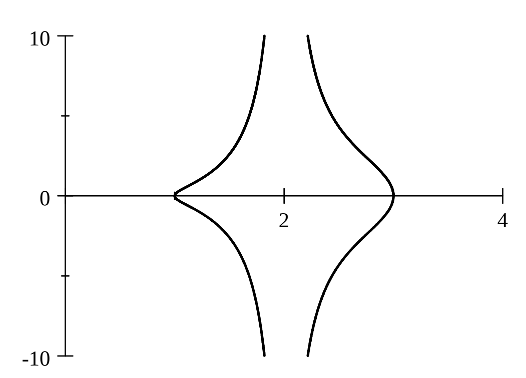


C 40- Se dan las rectas perpendiculares *OA* y *AB*, siendo $OA = a$. Por *O* se traza una recta variable que corta a *AB* en *P*. Sobre *OP*, y a uno y otro lado de *P*, se toman dos puntos *M* y *N* tales que $PM = PN = k$, siendo k una constante dada. Hallar el lugar geométrico de *M* y *N*.

Solución:

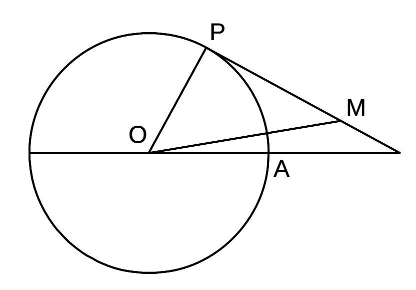
$\rho = OM = OP - k$, $OP = \frac{a}{\cos\theta}$. Luego: $\rho = \frac{a}{\cos\theta} - k$. La ecuación del lugar geométrico pedido, es:

$\rho = \dfrac{a}{\cos\theta} \pm k$. En coordenadas cartesianas: $x^2 + y^2 = \dfrac{k^2x^2}{(x-a)^2}$. Se trata de la concoide de Nicomedes. Si la recta AB se sustituye por una circunferencia de centro A y radio AO, se obtiene la concoide de la circunferencia, cuya ecuación en polares es: $\rho = 2R\cos\omega \pm k$. El dibujo de la concoide de Nicomedes para $a = 2$, $k = 1$, es el siguiente:

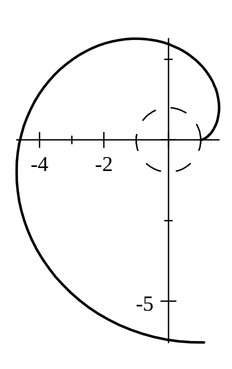


C 41- Dado el segmento OA, se traza la circunferencia de centro O y radio $OA = a$. Un punto P se desplaza partiendo de A, sobre dicha circunferencia, pasando por los sucesivos puntos $P_0 \equiv A$, P_1, P_2,..., P_n de la circunferencia. En cada punto P_i se traza la tangente a la circunferencia y sobre ella se toma en dirección opuesta al movimiento de P, una distancia PM igual al arco recorrido por P desde el origen, es decir el arco P_0P_i. Hallar el lugar geométrico de M, en coordenadas polares.

Solución:

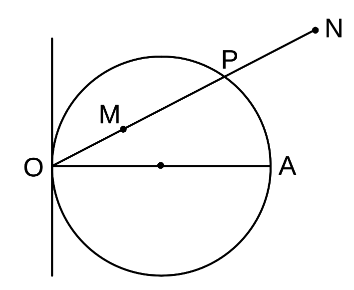


Las coordenadas polares de P son (a,θ), y las de M son (ρ,ω). En el triángulo OPM, rectángulo en P, se tiene: $OM = \rho$, $OP = a$, $PM = a\theta$, $\widehat{POM} = \theta - \omega$, $\cos(\theta-\omega) = \dfrac{a}{\rho}$, $\theta - \omega = \arccos\dfrac{a}{\rho}$, $\rho^2 - a^2 = a^2\theta^2$, $\theta = \dfrac{\sqrt{\rho^2 - a^2}}{a}$, $\omega = \theta - \arccos\dfrac{a}{\rho} = \dfrac{\sqrt{\rho^2-a^2}}{a} - \arccos\dfrac{a}{\rho}$, que es la ecuación de la envolvente de la circunferencia. Sus ecuaciones paramétricas son: $x = \cos\theta + \theta\sin\theta$, $y = \sin\theta - \theta\cos\theta$. El dibujo de esta curva para $a = 1$, es el siguiente (se ha representado en trazos la circunferencia de radio 1):

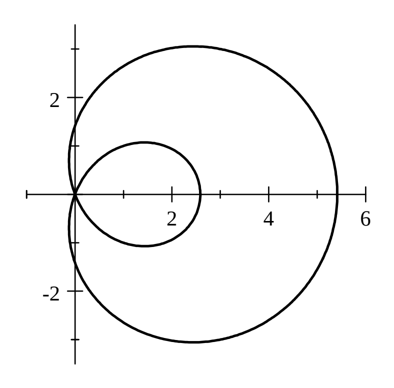


C 42- Se da una circunferencia de diámetro $OA = a$, y un segmento m. Se traza por el punto O una recta cualquiera que corta a la circunferencia en P. En la recta OP se toma a un lado y otro de P la distancia m, obteniéndose los puntos M y N. Hallar el lugar geométrico de M y N.

Solución:

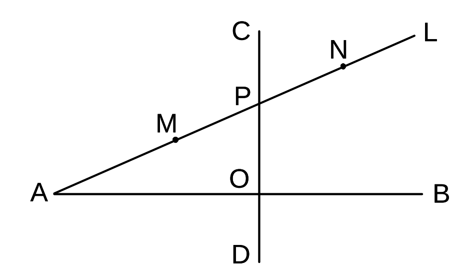


$\theta = \widehat{AOP}$, $OP = a\cos\theta$. Luego P describe la curva: $\rho = a\cos\theta \pm m$. En coordenadas cartesianas: $\sqrt{x^2+y^2} = \dfrac{a}{\sqrt{1+\dfrac{y^2}{x^2}}} \pm m = \dfrac{ax}{\sqrt{x^2+y^2}} \pm m$. Es decir: $x^2+y^2 = ax \pm m\sqrt{x^2+y^2}$. Operando, se tiene: $(x^2+y^2-ax)^2 - m^2(x^2+y^2) = 0$ (cardioide o caracol de Pascal). El dibujo de esta curva para $a = 4$, $m^2 = 2$, es el siguiente:

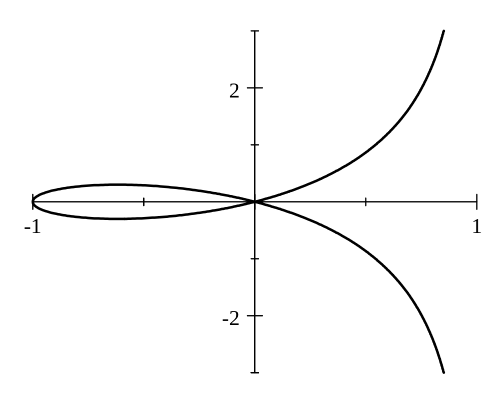


C 43- Se dan dos rectas perpendiculares AB y CD, que se cortan en O. Dado el punto fijo A, se traza una recta AL que corta a CD en P. Sobre AL, a uno y otro lado de P, se toman los puntos M y N de forma que $PM = PN = PO$. Hallar el lugar geométrico de M y N, al girar AL alrededor de A.

Solución:

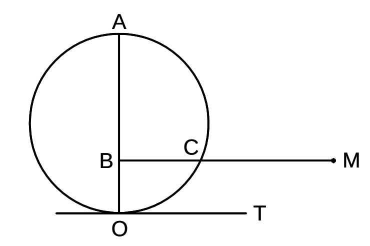


$\theta = \widehat{PAO}$, $OP = a\tan\theta$, $AP = \dfrac{a}{\cos\theta}$. Luego, $AM = AP - PM = \dfrac{a}{\cos\theta} - a\tan\theta = a\left(\dfrac{1}{\cos\theta} - \tan\theta\right) = \dfrac{a(1-\sin\theta)}{\cos\theta}$, $AN = \dfrac{a(1+\sin\theta)}{\cos\theta}$. La ecuación pedida es: $\rho = \dfrac{a(1\pm\sin\theta)}{\cos\theta}$ (estrofoide recta). En coordenadas cartesianas: $y = \pm(x-a)\sqrt{\dfrac{x}{2a-x}}$. Trasladando los ejes a $(a,0)$, $y = \pm x\sqrt{\dfrac{x+a}{a-x}}$, o bien, $x^2(x+a) + y^2(x-a) = 0$. Si las rectas AB y CD fueran oblicuas, se tendría la estrofoide oblicua (ver problema G 121). El dibujo de la estrofoide recta para $a = 1$, es el siguiente:

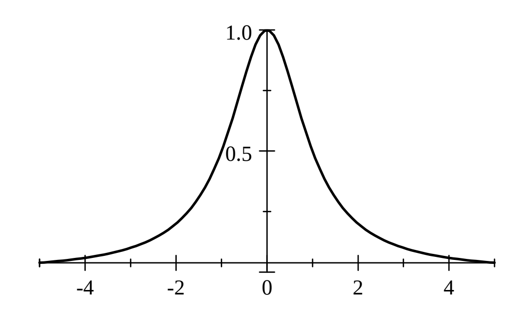


C 44- Se da una circunferencia fija de diámetro a. Por un punto O de la misma se traza la tangente OT y el diámetro perpendicular OA. En B, punto de OA, se traza la perpendicular al diámetro OA que corta a la circunferencia en C. Se prolonga la semicuerda BC hasta M, de forma que $\frac{BM}{BC} = \frac{OA}{OB}$. Hallar el lugar geométrico de M, al desplazarse B sobre OA.

Solución:

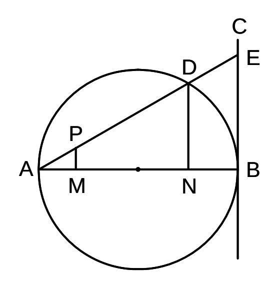


Sea O el origen de coordenadas, y sean los ejes coordenados, la tangente en O y el diámetro OA. Siendo $OB = y$, se tiene que: $\frac{BM}{BC} = \frac{OA}{OB} = \frac{a}{y}$, $BC = \sqrt{OB \cdot AB} = \sqrt{y(a-y)}$. Luego: $BM = x = \frac{a \cdot BC}{y} = a\sqrt{\frac{a-y}{y}}$. Operando: $y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$ (versiera de Agnesi). El dibujo de esta curva para $a = 1$, es el siguiente:



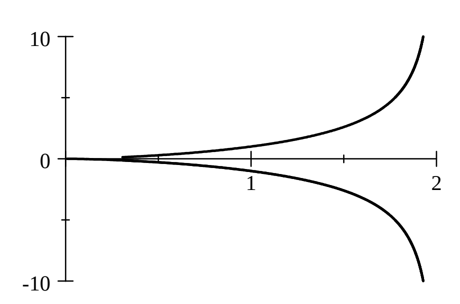
C 45- Se da una circunferencia de radio R, siendo AB un diámetro fijo. Sobre B se levanta BC, tangente perpendicular a AB. Se traza la recta AE variable, que corta al círculo en D, y a BC en E. Se lleva sobre dicha recta AE, el segmento $AP = DE$. Hallar el lugar geométrico de P al girar la recta AE en torno a A.

Solución:



Sean los puntos M y N las proyecciones de P y D sobre el diámetro AB. Tomando A como centro de

coordenadas, y el diámetro AB como eje de abscisas, se tiene por semejanza, que: $\frac{AM}{PM} = \frac{x}{y} = \frac{AN}{DN}$, $AN = AB - NB = AB - AM = 2R - x$, $DN = \sqrt{AN \cdot BN} = \sqrt{(2R-x)x}$, $y = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{2R-x}}$. La ecuación del lugar pedido, es: $y^2 = \frac{x^3}{2R-x}$ (cisoide de Diocles). El dibujo de esta curva para $R = 1$, es el siguiente:



Sección D - CÓNICAS

GENERALIDADES

D 1- Descomponer en suma de cuadrados la ecuación de la cónica $x^2 - 2xy - y^2 + 4x - 6y = 0$, y clasificarla.

Solución: Derivando, se tiene: $\frac{1}{2}f'_x = x - y + 2$. Luego: $f(x,y) = (x - y + 2)^2 - (2y^2 + 2y + 4) = 0$. Siendo $g(y) = 2y^2 + 2y + 4$, derivando se tiene: $\frac{1}{2}g'(y) = 2y + 1$, $g(y) = \frac{(2y+1)^2}{2} + \frac{7}{2}$. Por tanto, se tiene que: $f(x,y) = (x - y + 2)^2 - \frac{(2y+1)^2}{2} - \frac{7}{2} = 0$. La cónica es del tipo $M^2 - N^2 - 1 = 0$ (hipérbola).

D 2- Descomponer en suma de cuadrados la ecuación de la cónica $xy + 2y^2 - 7y - 3x + 3 = 0$, y clasificarla.

Solución: Derivando, se tiene: $\frac{1}{2}f'_y = 2y + \frac{x}{2} - \frac{7}{2}$. Luego: $f(x,y) = \frac{1}{2}\left(2y + \frac{x}{2} - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{1}{8}(x^2 + 10x + 25) = \frac{1}{2}\left(2y + \frac{x}{2} - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{1}{8}(x + 5)^2$. Es del tipo $M^2 - N^2 = 0$ (hipérbola degenerada en dos rectas reales).

D 3- Descomponer en suma de cuadrados la ecuación de la cónica $x^2 + y^2 - 4x + 2xy - 4y + 10 = 0$, y clasificarla.

Solución: Derivando se tiene: $\frac{1}{2}f'_x = x + y - 2$. Luego, $f(x,y) = (x + y - 2)^2 + 6$. Es del tipo $M^2 + 1 = 0$ (parábola degenerada en dos rectas imaginarias).

D 4- Descomponer en suma de cuadrados la ecuación de la cónica $2xy + 2x + 2y + 1 = 0$, y clasificarla.

Solución: Derivando se tiene: $\frac{1}{2}f'_x = y + 1$, $\frac{1}{2}f'_y = x + 1$. Luego: $f(x,y) = 2(x+1)(y+1) - 1 = \left(\frac{2y + 2 + x + 1}{2}\right)^2 - \left(\frac{2y + 2 - x - 1}{2}\right)^2 - 1$. Es del tipo $M^2 - N^2 = 1$ (hipérbola).

D 5- Descomponer en suma de cuadrados la ecuación de la cónica $2x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 8y + 21 = 0$, clasificándola.

Solución: $f(x,y) = \frac{1}{2}(2x - y + 1)^2 + \frac{1}{2}(y - 7)^2 - 4$. Es del tipo $M^2 + N^2 = 1$ (elipse).

D 6- Descomponer en suma de cuadrados la ecuación de la cónica $3x^2 + 4xy + y^2 - 20x - 12y + 36 = 0$, clasificándola.

Solución: $f(x,y) = \frac{1}{3}(3x + 2y - 10)^2 - \frac{1}{3}(y - 2)^2 + 4 = 0$. Es del tipo $M^2 - N^2 = -1$ (hipérbola).

D 7- Descomponer en suma de cuadrados la ecuación de la cónica $x^2 - 2xy + y^2 + x + 7 = 0$, y clasificarla.

Solución: $f(x,y) = \left(x - y + \frac{1}{2}\right)^2 + y + \frac{27}{4} = 0$. Es del tipo $M^2 + N = 0$ (parábola).

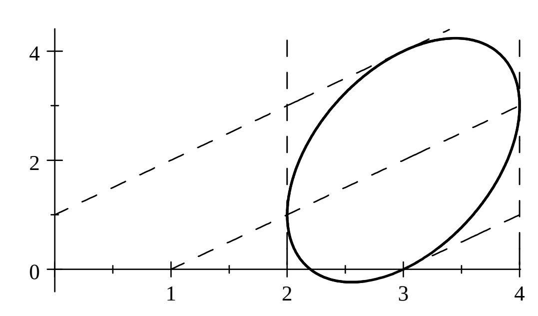
D 8- Descomponer en suma de cuadrados la ecuación de la cónica $x^2 + y^2 - 2xy + x - y - 6 = 0$, clasificándola.

Solución: $f(x,y) = \left(x - y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = 0$. Es del tipo $M^2 = 1$ (parábola degenerada en dos rectas paralelas reales).

D 9- Dibujar la cónica $5x^2 - 2xy + y^2 - 26x + 2y + 33 = 0$.

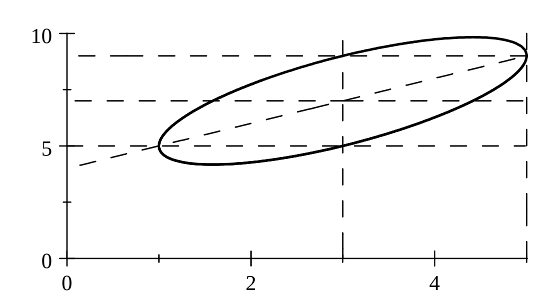
Solución: $A_{33} > 0$, $A \neq 0$, elipse real. Operando, $y = x - 1 \pm \sqrt{-(x-2)(x-4)}$. Para $x = \frac{2+4}{2} = 3$, $y_1 = 0$, $y_2 = 4$. Las rectas $x = 2$, $x = 4$, son tangentes respectivamente, en $(2,1)$ y $(4,3)$. La recta $y = x - 1$ corta a la elipse en $(2,1)$ y $(4,3)$. La recta $y = x - 3$, es tangente en $(3,0)$; la recta $y = x + 1$ lo

es en $(3,4)$. El eje OX corta a la elipse en $(3,0)$ y $\left(\frac{11}{5},0\right)$. El eje OY no corta a la elipse. El dibujo de la elipse es el siguiente:



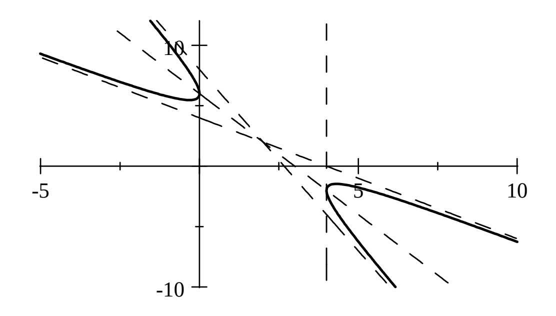
D 10- Dada la cónica $2x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 8y + 21 = 0$, determinar los elementos para su dibujo.

Solución: $A_{33} = 1 > 0$, elipse. Ordenando la ecuación en potencias de y, se tiene: $y^2 - 2y(x+4) + 2x^2 + 2x + 21 = 0$, de donde $y = x + 4 \pm \sqrt{-x^2 + 6x - 5}$. Es real para $1 < x < 5$. Siendo $f'_x = 4x - 2y + 2 = 0$, $f'_y = -2x + 2y - 8 = 0$, el centro es $(3,7)$. El dibujo de la elipse es el siguiente:



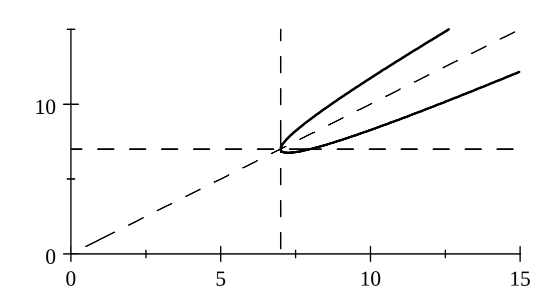
D 11- Dada la cónica $3x^2 + 4xy + y^2 - 20x - 12y + 36 = 0$, determinar los elementos para su dibujo.

Solución: $A_{33} = -1$, hipérbola. Se tiene $y = -2x + 6 \pm \sqrt{x(x-4)}$. La curva es real para $x > 4$ y $x < 0$. Siendo $f'_x = 6x + 4y - 20 = 0$, $f'_y = 4x + 2y - 12 = 0$, el centro es $(2,2)$. Las pendientes de las asíntotas vienen dadas por $m = \dfrac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{22}} = \dfrac{-2 \pm 1}{1}$, $m_1 = -1$, $m_2 = -3$. Las asíntotas son: $x + y = 4$, $3x + y = 8$. El dibujo de la hipérbola es el siguiente:



D 12- Dada la cónica $x^2 - 2xy + y^2 - x + 7 = 0$, determinar los elementos para su dibujo.

Solución: $A_{33} = 0$, parábola. Se tiene $y = x \pm \sqrt{x - 7}$. La curva es real para $x \geq 7$. El dibujo de la parábola es el siguiente:



D 13- Dada la cónica $x^2+y^2-2xy+x-y-6=0$, determinar los elementos para su dibujo.

Solución: $A_{33}=0$, $A=0$, parábola degenerada en dos rectas paralelas: $y=\dfrac{2x+1\pm\sqrt{25}}{2}$, es decir: $y=x+3$, $y=x-2$.

D 14- Hallar la naturaleza de la cónica $4x^2-4xy+y^2-4x+2y+2=0$.

Solución: $A_{33}=0$, $A=0$, se trata de una parábola degenerada en dos rectas paralelas. Cortando por $x=0$, se tienen dos puntos imaginarios, luego la parábola ha degenerado en dos rectas paralelas imaginarias.

D 15- Discutir la naturaleza de la cónica $5x^2-2xy+y^2-2(2+\lambda)x+4y+5=0$, según los valores del parámetro λ.

Solución: $A_{33}=4$, elipse; $A=-\lambda^2+4$, elipse degenerada para $\lambda=\pm 2$; $-a_{22}A=\lambda^2-4$, elipse imaginaria para $-2<\lambda<2$. En el cuadro siguiente se resume lo anterior:

λ	<-2	-2	$-2<\lambda<2$	2	>2
Naturaleza	*Elipse real*	*Elipse degenerada*	*Elipse imaginaria*	*Elipse degenerada*	*Elipse real*

D 16- Hallar la naturaleza, ejes y vértices de $x^2-6xy+9y^2-4x+y=0$.

Solución: $A_{33}=0$, $A\neq 0$, parábola real. Ecuación del eje: $f'_x+\frac{a_{22}}{a_{12}}f'_y=20x-60y-7=0$. Vértice: $\left(\frac{-7}{4400},\frac{-511}{4400}\right)$.

D 17- Hallar la naturaleza de $x^2+7xy+4y^2-3x+8y+4=0$.

Solución: $A_{33}<0$, $A\neq 0$, hipérbola no degenerada.

D 18- Discutir la naturaleza de la cónica $x^2+4xy+\lambda y^2+2x+4y+\lambda=0$, según los valores de λ. Para los casos en que la cónica degenera, hallar las correspondientes ecuaciones de las rectas.

Solución: $A_{33}=\lambda-4$, $A=\lambda^2-5\lambda+4=(\lambda-4)(\lambda-1)$, $-a_{22}A=-\lambda(\lambda-4)(\lambda-1)$. Por consiguiente, se tiene el siguiente cuadro:

λ	<1	1	$1<\lambda<4$	4	>4
Naturaleza	*Hipérbola*	*Hipérbola degenerada*	*Hipérbola*	*Parábola degenerada*	*Elipse imaginaria*

Para $\lambda=1$, las rectas son: $y=x\left(\sqrt{3}-2\right)+\sqrt{3}-2$, $y=x\left(-\sqrt{3}-2\right)-\sqrt{3}-2$. Para $\lambda=4$, las rectas son: $y=\dfrac{-x-1+\sqrt{-3}}{2}$, $y=\dfrac{-x-1-\sqrt{-3}}{2}$.

D 19- Se da la cónica: $x^2-2xy+y^2-2x-2y+1=0$. Hallar: 1º) Naturaleza. 2º) Foco, directriz y ecuación focal. 3º) Eje y vértice.

Solución: 1º) $A_{33}=0$, $A=-4$. Parábola, no degenerada. 2º) La ecuación tangencial de la cónica, es: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & u \\ -1 & 1 & -1 & v \\ -1 & -1 & 1 & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix}=-4(uv+uw+vw)=0$. Sustituyendo: $u=1$, $v=i$, $w=-z$, se tiene: $z=\dfrac{1+i}{2}$, luego las coordenadas del foco son: $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Siendo: $f'_x=2x-2y-2=-2$, $f'_y=-2x+2y-2=-2$, $f'_z=-2x-2y+2z=0$, la ecuación de la directriz es: $x+y=0$. La ecuación focal de la cónica es: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\dfrac{(x+y)^2}{2}$. 3º) La ecuación del eje es: $f'_x+\frac{a_{22}}{a_{12}}f'_y=0$, lo que da: $x-y=0$. Las coordenadas del vértice son: $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$.

D 20- Se da la cónica $3x^2+12xy+8y^2-2x-10y-4=0$. 1º) Hallar focos y directrices. 2º) Hallar la ecuación reducida.

Solución: 1º) $A_{33}<0$, hipérbola. La ecuación tangencial es: $-57u^2+58uv-13v^2-44uw+$ $+18vw-12w^2=0$. Sustituyendo $u=1$, $v=i$, $w=-z$, se tiene: $12z^2+(18i-44)z+44-58i=0$. De donde: $z=\frac{11\pm 5}{6}+\frac{-9\pm 15}{12}i$, siendo los focos: $\left(\frac{8}{3},\frac{1}{2}\right)$ y $(1,-2)$. Como $f'_x=6x+12y-2$, $f'_y=12x+16y-10$, $f'_z=-2x-10y-8$, particularizándolas para cada foco, se obtienen las directrices: $12x+18y-11=0$ para el primer foco, $2x+3y-1=0$, para el segundo. 2º) Los invariantes son: $I_1=a_{11}+a_{22}=11$, $I_2=A_{33}=-12$, $I_3=A=25$. La ecuación en S es: $S^2-11S-12=0$, de donde $S_1=12$, $S_2=-1$. La ecuación canónica es $\frac{x^2}{\frac{\frac{-25}{-12}}{12}}+\frac{y^2}{\frac{\frac{-25}{-12}}{-1}}=1$. Operando: $144x^2-12y^2-25=0$.

D 21- En ejes de ángulo $\theta=60º$, se da la cónica $x^2-2xy+2y^2+2x-5y+\lambda+2=0$. Hallar su ecuación canónica y discutir la naturaleza de la cónica.

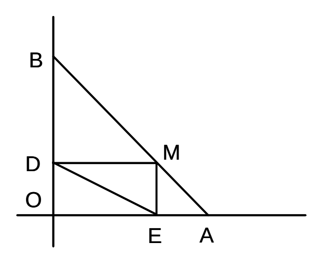
Solución: $I_1=\frac{a_{11}+a_{22}-2a_{12}\cos\theta}{\sin^2\theta}=\frac{16}{3}$, $I_2=\frac{A_{33}}{\sin^2\theta}=\frac{4}{3}$, $I_3=\frac{A}{\sin^2\theta}=\frac{4\lambda-5}{3}$. La ecuación en S es: $S^2-\frac{16S}{3}+\frac{4}{3}=0$, cuyas raíces son: $S=\frac{8\pm 2\sqrt{13}}{3}$. Por tanto, la ecuación canónica es: $\frac{x^2}{\frac{\frac{-4\lambda+5}{4}}{\frac{8+2\sqrt{13}}{3}}}+\frac{y^2}{\frac{\frac{-4\lambda+5}{4}}{\frac{8-2\sqrt{13}}{3}}}=1$. Operando: $\frac{-12\lambda+15}{32+8\sqrt{13}}x^2+\frac{-12\lambda+15}{32-8\sqrt{13}}y^2=\frac{(-12\lambda+15)^2}{192}$. Como $A_{33}>0$, es una elipse. Para $\frac{I_3}{I_2}=\frac{4\lambda-5}{4}>0$, es decir, para $\lambda>\frac{5}{4}$, la elipse es imaginaria. Para $\lambda<\frac{5}{4}$, la elipse es real. Para $\lambda=\frac{5}{4}$, la elipse es degenerada.

D 22- Hallar la ecuación canónica de $x^2+4xy+4y^2+8x+10y-7=0$, en ejes oblicuos de $\theta=60º$.

Solución: Como $I_2=\frac{A_{33}}{\sin^2\theta}=0$, es una parábola. $I_1=\frac{a_{11}+a_{22}-2a_{12}\cos\theta}{\sin^2\theta}=4$; $I_3=\frac{A}{\sin^2\theta}=-12$. La ecuación canónica es: $I_1y^2\pm 2\sqrt{\frac{-I_3}{I_1}}\,x=0$, es decir $2y^2=\sqrt{3}\,x$.

D 23- Se da un triángulo rectángulo isósceles AOB, en el que $OA=OB=a$. Se proyecta un punto M variable de la hipotenusa AB, en D sobre OB, y en E sobre OA. 1º) Hallar la envolvente de la recta DE. 2º) Determinar la naturaleza de dicha envolvente. 3º) Hallar su ecuación canónica.

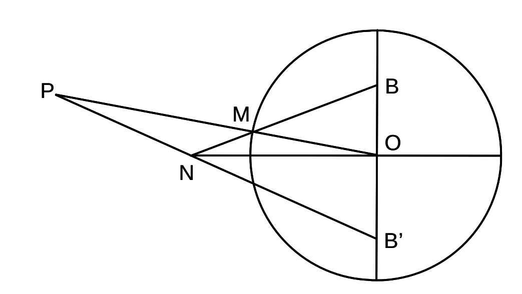
Solución:



1º) Siendo $OE=\lambda$, la ecuación de DE es: $\frac{x}{\lambda}+\frac{y}{a-\lambda}=1$, es decir: $(a-\lambda)x+\lambda y+\lambda(\lambda-a)=0$. Derivando respecto a λ, e igualando a 0, se obtiene $\lambda=\frac{a+x-y}{2}$. Introduciendo este valor en la ecuación de DE, se tiene la ecuación de la envolvente: $x^2-2xy+y^2-2ax-2ay+a^2=0$, que corresponde a una cónica. 2º) $A_{33}=0$, $A=-4a^2<0$. Luego la cónica es una parábola real. 3º) $I_1=2$, $I_3=-4a^2$. La ecuación canónica es: $2y^2-2\sqrt{\frac{4a^2}{2}}\,x=0$, es decir: $y^2=a\sqrt{2}\,x$.

D 24- Se da una circunferencia de centro el origen y radio R, y dos puntos $B(0,b)$ y $B'(0,-b)$. Se une B con un punto variable M de la circunferencia. La recta BM corta a OX en N. La recta $B'N$ corta a OM en P. Se pide 1º) Hallar el lugar geométrico de P. 2º) Discutir la naturaleza del lugar según los valores de b en función de R. 3º) Demostrar que un foco del lugar es el origen de coordenadas.

Solución:



1º) $P(\alpha,\beta)$, $PB' \equiv \dfrac{y+b}{\beta+b} = \dfrac{x}{\alpha}$, $N\left(\dfrac{\alpha b}{\beta+b},0\right)$, $NB \equiv \dfrac{(\beta+b)x}{\alpha b} = \dfrac{y-b}{-b}$, $PO \equiv \dfrac{x}{\alpha} = \dfrac{y}{b}$, $M\left(\dfrac{b\alpha}{2\beta+b},\dfrac{b\beta}{2\beta+b}\right)$. Como M está en la circunferencia de centro el origen y radio R, se tiene: $\left(\dfrac{b\alpha}{2\beta+b}\right)^2+\left(\dfrac{b\beta}{2\beta+b}\right)^2-R^2=0$. Operando y sustituyendo (α,β) por (x,y), se tiene el lugar de P: $b^2x^2+y^2(b^2-4R^2)-4bR^2y \ -R^2b^2=0$. 2º) De esta ecuación se obtiene: $A_{33}=b^2(b^2-4R^2)$, $A=-R^2b^6$, $-a_{22}A=R^2b^6(b^2-4R^2)$. Se tiene el siguiente cuadro:

b	A_{33}	A	$-a_{22}A$	*Naturaleza*
$b<-2R$	>0	<0	>0	*Elipse real*
$b=-2R$	0	<0	0	*Parábola*
$-2R<b<0$	<0	<0	<0	*Hipérbola real*
$b=0$	0	0	0	*Parábola degenerada*
$0<b<2R$	<0	<0	<0	*Hipérbola real*
$b=2R$	0	<0	0	*Parábola*
$b>2R$	>0	<0	>0	*Elipse real*

3º) La ecuación tangencial es: $R^2b^2u^2+R^2b^2v^2+(4R^2-b^2)w^2=0$. Sustituyendo $u=1$, $v=i$, $w=-z$, se tiene: $z=0$. Luego el origen es foco de la cónica.

D 25- Dada la cónica $x^2-y^2+2\sqrt{2}y-2=0$, hallar: 1º) La ecuación de la cónica reducida a sus asíntotas. 2º) Las coordenadas de sus focos reales.

Solución: 1º) La ecuación reducida a sus asíntotas es del tipo $2b_{12}xy+b_{33}=0$. Siendo θ el ángulo de las asíntotas, se tiene: $I_1=a_{11}+a_{22}=0=\dfrac{-2b_{12}\cos\theta}{\sin^2\theta}$, luego $\cos\theta=0$, $\theta=90º$; $I_2=A_{33}=-1=-b_{12}^2$, luego $b_{12}=\pm1$; $I_3=A=0=-b_{12}^2b_{33}$, de donde $b_{33}=0$. La ecuación pedida es: $xy=0$. 2º) La ecuación tangencial es: $2v^2+2\sqrt{2}vw+w^2=0$. Introduciendo los valores: $v=i$, $w=-z$, se tiene que: $z^2-2i\sqrt{2}z-2=0$, de donde: $z=\sqrt{2}i$. El foco es $\left(0,\sqrt{2}\right)$. En la ecuación reducida a sus asíntotas, el foco es $(0,0)$.

Nota: Se trata de una hipérbola degenerada en las rectas: $x+y-\sqrt{2}=0$, $x-y+\sqrt{2}=0$, cuya intersección es $\left(0,\sqrt{2}\right)$, que es el punto en que coinciden centro y focos. En la ecuación reducida, estas dos rectas son los ejes coordenados.

D 26- Dada la ecuación de la cónica en ejes rectangulares $x^2-y^2+2\sqrt{2}xy-2=0$, hallar: 1º) Sus focos reales. 2º) La ecuación referida a sus asíntotas.

Solución: 1º) Ecuación tangencial: $2u^2-2v^2+4\sqrt{2}uv-3w^2=0$. Sustituyendo $u=1$, $v=i$, $w=-z$, se tiene: $3z^2=4+4\sqrt{2}i$, de donde: $z=\pm\sqrt{\dfrac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{3}}\pm\sqrt{\dfrac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{3}}\,i$. Las coordenadas de los focos son: $\left(\pm\sqrt{\dfrac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{3}},\pm\sqrt{\dfrac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{3}}\right)$. 2º) $I_1=\dfrac{1-1-2\sqrt{2}\cos 90º}{\sin^2 90º}=0=\dfrac{-2b_{12}\cos\theta'}{\sin^2\theta'}$, luego $\cos\theta'=0$, por lo que el ángulo de las asíntotas mide 90º; $I_2=\dfrac{-3}{1}=-b_{12}^2$, de donde $b_{12}=\sqrt{3}$; $I_3=6=-b_{12}^2b_{33}=-3b_{33}$, de donde $b_{33}=-2$. Luego la ecuación de la cónica referida a sus asíntotas es:

$2\sqrt{3}\,xy - 2 = 0$, es decir: $xy = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

D 27- Discutir la naturaleza de la cónica $y = x - 2 \pm \sqrt{(\lambda - 1)x^2 - 2x + \lambda - 2}$.

Solución: Invariantes: $A_{33} = 1 - \lambda$, $A = \lambda^2 - 3\lambda + 1 = \left(\lambda - \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\lambda - \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$, $-a_{22}A = -(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = -\left(\lambda - \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\lambda - \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$. Se construye el siguiente cuadro:

λ	A_{33}	A	$-a_{22}A$	*Naturaleza*
$< \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$	> 0	> 0	< 0	*Elipse imaginaria*
$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$	> 0	0	0	*Elipse degenerada*
$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < \lambda < 1$	> 0	< 0	> 0	*Elipse real*
1	0	< 0	> 0	*Parábola*
$1 < \lambda < \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$	< 0	< 0	> 0	*Hipérbola*
$\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$	< 0	0	0	*Hipérbola degenerada*
$> \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$	< 0	> 0	< 0	*Hipérbola*

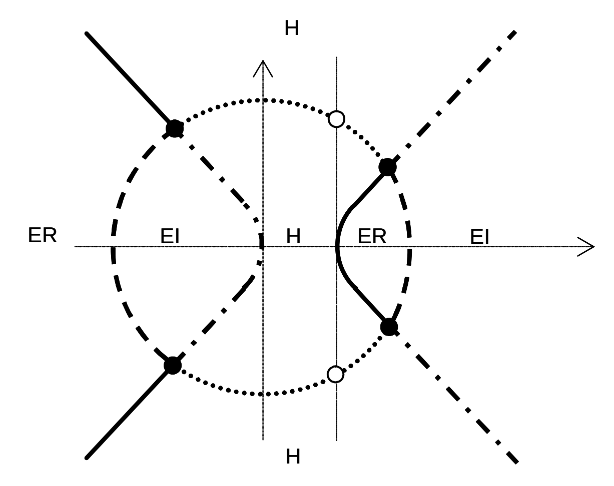
D 28- Estudiar la naturaleza de la cónica $(y - x - 4)^2 = (\lambda - 1)x^2 + 2\lambda x - \lambda$, en función de los valores del parámetro λ.

Solución: $(2 - \lambda)x^2 - 2xy + y^2 + (8 - 2\lambda)x - 8y + 16 + \lambda = 0$. a) $A_{33} = 1 - \lambda$. Para $\lambda > 1$, hipérbola; para $\lambda = 1$, parábola; para $\lambda < 1$, elipse. b) $A = \lambda(-2\lambda + 1)$. Para $\lambda = 0$, recta doble: $y - x - 4 = 0$; para $\lambda = \dfrac{1}{2}$, dos rectas imaginarias: $y = x + 9 \pm i\sqrt{2}\,(x - 1)$. c) $-a_{22}A = 2\lambda^2 - \lambda$ Para $\lambda > \dfrac{1}{2}$, elipse real; para $0 < \lambda < \dfrac{1}{2}$, elipse imaginaria; para $\lambda < 0$, elipse real. Resumiendo, se tiene el siguiente cuadro:

λ	< 0	0	$0 < \lambda < \dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2} < \lambda < 1$	1	$\lambda > 1$
Naturaleza	*Elipse real*	*Recta doble*	*Elipse imag.*	*Dos rectas imag.*	*Elipse real*	*Parábola*	*Hipérbola*

D 29- Discutir la naturaleza de las cónicas $\lambda x^2 + 2\mu xy + (\lambda - 1)y^2 + \lambda^2 + \mu^2 - 4 = 0$.

Solución: Se tienen los siguientes valores: $A_{33} = \lambda^2 - \mu^2 - \lambda$; $A = (\lambda^2 - \mu^2 - \lambda)(\lambda^2 + \mu^2 - 4)$; $-a_{22}A = (1 - \lambda)(\lambda^2 - \mu^2 - \lambda)(\lambda^2 + \mu^2 - 4)$. Tomando como ejes λ, μ, el plano está dividido en regiones por la hipérbola $\lambda^2 - \mu^2 - \lambda = 0$, la circunferencia $\lambda^2 + \mu^2 - 4 = 0$, y la recta $1 - \lambda = 0$. En el interior de las dos ramas de la hipérbola, las cónicas son elipses; en el exterior son hipérbolas; en su contorno son parábolas. En la zona del interior de la rama derecha de la hipérbola, externa al círculo, las elipses son imaginarias; en la interna al círculo, las elipses son reales. En la zona interna de la rama izquierda, interior al círculo, las elipses son imaginarias; en el exterior al círculo, son reales. En el contorno de la rama derecha, exterior al círculo, así como en el contorno de la rama izquierda, interior al círculo, las parábolas degeneran en dos rectas imaginarias. En el contorno de la rama derecha interna al círculo, y en el contorno de la rama izquierda exterior al círculo, las parábolas degeneran en dos rectas paralelas reales. En el contorno del círculo, exterior a las ramas de la hipérbola, las hipérbolas degeneran, haciéndolo en dos rectas paralelas en los dos puntos de intersección con la recta $\lambda = 1$. En el contorno del círculo, interior a las dos ramas, las elipses degeneran. En los cuatro puntos de intersección de la hipérbola con el círculo, las parábolas degeneran en dos rectas confundidas.



H Hipérbola
ER Elipse real
EI Elipse imaginaria
Parábola degenerada en dos rectas reales
Parábola degenerada en dos rectas imaginarias
Elipse degenerada
Hipérbola degenerada
● Parábola degenerada en dos rectas reales confundidas
○ Hipérbola degenerada en dos rectas paralelas

D 30- Hallar la ecuación tangencial de la cónica $x^2 + 2y^2 - 2xy + 3 = 0$.

Solución: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & u \\ -1 & 2 & 0 & v \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ u & v & 1 & 0 \end{vmatrix} = -6u^2 - 6uv - 3v^2 - 1 = 0.$

D 31- Hallar la ecuación cartesiana de la cónica cuya ecuación en coordenadas tangenciales es: $u^2 + 3v^2 - 2uv + 6u = 0$.

Solución: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & x \\ -1 & 3 & 0 & y \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ x & y & 1 & 0 \end{vmatrix} = 9y^2 + 18x + 6y - 2 = 0.$

D 32- Hallar la ecuación del diámetro conjugado con la dirección $y = 2x$, de la cónica $x^2 + y^2 + 2xy + 4x + 6y + 8 = 0$.

Solución: Se obtienen las siguientes derivadas: $f'_x = 2x + 2y + 4$, $f'_y = 2y + 2x + 6$. Por tanto: $f'_x + mf'_y = 2x + 2y + 4 + 2(2y + 2x + 6) = 0$. El diámetro pedido es: $3x + 3y + 8 = 0$.

D 33- Hallar la ecuación del diámetro conjugado con la dirección $y = 3x$, de la cónica $2x^2 - y^2 + 3xy + 2x - y + 1 = 0$.

Solución: $f'_x + mf'_y = 4x + 3y + 2 + 3(-2y + 3x - 1) = 13x - 3y - 1 = 0$.

D 34- Dada la cónica $x^2 - y^2 - 4x - 5y - 4 = 0$, hallar la ecuación de la involución de los coeficientes angulares de los pares de diámetros conjugados, así como sus rayos dobles.

Solución: Partiendo de la ecuación $a_{11} + a_{12}(m + m') + a_{22}mm' = 0$, se tiene la ecuación pedida: $1 - mm' = 0$. Las pendientes de los rayos dobles, vienen dadas por $1 - m^2 = 0$, es decir $m = \pm 1$ (la cónica

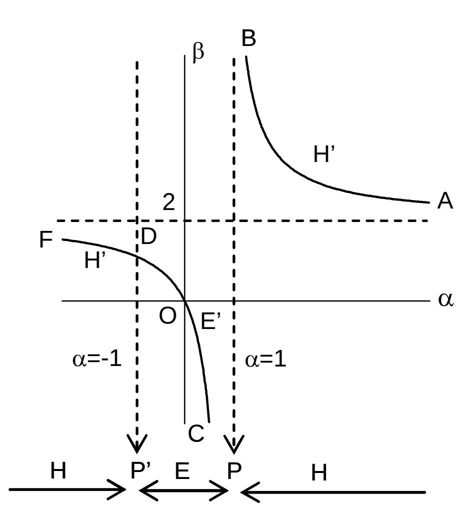
es una hipérbola). El centro de la cónica es $\left(2, \frac{-5}{2}\right)$, luego las asíntotas (rayos dobles) son: $y + \frac{5}{2} = \pm(x-2)$.

D 35- Dada la cónica $x^2 - y^2 + xy - 1 = 0$, hallar la ecuación de la involución de los coeficientes angulares de los pares de diámetros conjugados, así como sus rayos dobles.

Solución: Partiendo de la ecuación $a_{11} + a_{12}(m+m') + a_{22}mm' = 0$, se tiene la ecuación pedida: $2 + m + m' - 2mm' = 0$. Las pendientes de los rayos dobles vienen dadas por $1 + m - m^2 = 0$, es decir $m = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (la cónica es una hipérbola). El centro de la cónica es $(0,0)$, luego las asíntotas (rayos dobles) son: $y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}x$.

D 36- Estudiar la naturaleza de la cónica $(2-\alpha^2)x^2 + y^2 - 2xy - 2(\alpha+1)x + 1 - \beta = 0$, en función de los parámetros α y β.

Solución: a) $A_{33} = 1 - \alpha^2$; para $\alpha > 1$, hipérbola; para $\alpha = 1$, parábola; para $-1 < \alpha < 1$, elipse; para $\alpha = -1$, parábola; para $\alpha < -1$, hipérbola. b) $-a_{22}A = -(\alpha+1)(\alpha\beta - \beta - 2\alpha)$; para $\alpha = -1$, parábola degenerada; para el contorno de $\alpha\beta - \beta - 2\alpha = 0$ (que es una hipérbola de centro $(1,2)$ y asíntotas $x = 1$, $y = 2$), si $|\alpha| > 1$, la hipérbola es degenerada, si $|\alpha| < 1$, la elipse es degenerada. c) En el siguiente dibujo se ha llevado α sobre el eje de abscisas y β sobre el de ordenadas. Se ha indicado con H la zona de *hipérbola* a la izquierda de $\alpha = -1$ y a la derecha de $\alpha = 1$, y con H' el contorno AB y DF de la hipérbola $\alpha\beta - \beta - 2\alpha = 0$, al que le corresponde *hipérbola degenerada*. Se ha indicado la zona E de *elipse* entre $\alpha = -1$ y $\alpha = 1$, y con E', el contorno CD de la citada hipérbola, al que le corresponde *elipse degenerada*. Se ha indicado con P la recta $\alpha = 1$, a la que le corresponde *parábola*, y con P' la recta $\alpha = -1$, a la que corresponde *parábola degenerada*.



D 37- Dada la cónica $x^2 - y^2 + xy - 1 = 0$, hallar la ecuación de sus ejes.

Solución: $f'_x = 2x + y$, $f'_y = -2y + x = 0$, luego el centro es $(0,0)$. La ecuación de los coeficientes angulares de los pares de diámetros conjugados es: $a_{11} + a_{12}(m+m') + a_{22}mm' = 0$. Las pendientes de los ejes deben satisfacer a $mm' = -1$, luego $m + m' = m - \frac{1}{m}$ La ecuación queda $m^2 + 4m - 1 = 0$, luego $m = -2 \pm \sqrt{5}$. Los ejes son: $y = \left(-2 \pm \sqrt{5}\right)x$.

D 38- Hallar el eje de la parábola $2x^2 - 4x + y - 1 = 0$.

Solución: Se aplica la fórmula $f'_x + \frac{a_{22}}{a_{12}}f'_y = 4x - 4 = 0$. El eje es: $x = 1$.

D 39- Hallar los vértices de la cónica $13x^2 + 13y^2 - 10xy + 26\sqrt{2}\,x - 10\sqrt{2}\,y - 46 = 0$.

Solución: $f'_x = 26x - 10y + 26\sqrt{2} = 0$, $f'_y = 26y - 10x - 10\sqrt{2} = 0$. El centro es $\left(-\sqrt{2}, 0\right)$. Los coeficientes angulares de los ejes vienen dados por $a_{12}m^2 + (a_{11} - a_{22})m - a_{12} = 0$, es decir $m^2 - 1 = 0$. Luego los ejes son: $y = \pm\left(x + \sqrt{2}\right)$. La intersección de los ejes con la cónica viene dada por la ecuación: $13x^2 + 13\left(x + \sqrt{2}\right)^2 \pm 10x\left(x + \sqrt{2}\right) + 26\sqrt{2}\,x \pm 10\sqrt{2}\left(x + \sqrt{2}\right) - 46 = 0$. Las coordenadas de los

vértices son: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{-5\sqrt{2}}{2},\frac{-3\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(0,-\sqrt{2}\right)$, $\left(-2\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$. Los cuatro vértices son reales, pues se trata de una elipse.

D 40- Hallar los vértices de la cónica $5x^2+5y^2-26xy+10\sqrt{2}\,x-26\sqrt{2}\,y-62=0$.

Solución: $f'_x=10x-26y+10\sqrt{2}=0$, $f'_y=10y-26x-26\sqrt{2}=0$, luego las coordenadas del centro son: $\left(-\sqrt{2},0\right)$. Los coeficientes angulares de los ejes vienen dados por la ecuación: $a_{12}m^2+(a_{11}-a_{22})m-a_{12}=-13m^2+13=0$, de donde $m=\pm 1$. Por tanto las ecuaciones de los ejes son: $y=\pm\left(x+\sqrt{2}\right)$. Las abscisas de los puntos de intersección con la cónica vienen dadas por la ecuación: $5x^2+5\left(x+\sqrt{2}\right)^2\pm 26x\left(x+\sqrt{2}\right)+10\sqrt{2}\,x\pm 26\sqrt{2}\left(x+\sqrt{2}\right)-62=0$. Las coordenadas de los vértices son: $\left(0,-\sqrt{2}\right)$, $\left(-2\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$, $\left(-\sqrt{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}i,\frac{3\sqrt{2}}{2}i\right)$, $\left(-\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}i,-\frac{3\sqrt{2}}{2}i\right)$. Como se trata de una hipérbola, solo tiene dos vértices reales.

D 41- Hallar los vértices de la cónica $x^2+y^2-2xy+\sqrt{2}\,x-3\sqrt{2}\,y=0$.

Solución: Se trata de una parábola, por lo que solo tiene un vértice. Ecuación del eje: $f'_x+\frac{a_{22}}{a_{12}}f'_y=0$, luego: $x-y+\sqrt{2}=0$. Su intersección con la parábola viene dada por la ecuación: $x^2+\left(x+\sqrt{2}\right)^2-2x\left(x+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}\,x-3\sqrt{2}\left(x+\sqrt{2}\right)=0$. El vértice es $\left(-\sqrt{2},0\right)$.

D 42- Hallar la ecuación del conjunto de los ejes de la cónica $x^2-y^2+2xy-3x+4y-7=0$,

Solución: La ecuación es: $a_{12}f'^2_x-(a_{11}-a_{22})f'_xf'_y-a_{12}f'^2_y=8x^2-8y^2-16xy+32x+24y-17=0$.

D 43- Hallar los focos y las directrices de la cónica $7x^2+y^2+8xy-6x-2y=0$.

Solución: La ecuación tangencial de la cónica es: $\begin{vmatrix} 7 & 4 & -3 & u \\ 4 & 1 & -1 & v \\ -3 & -1 & 0 & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix}=u^2+9v^2+9w^2-$ $-6uv+2uw+10vw=0$. Haciendo las sustituciones: $u=1$, $v=i$, $w=-z$, se tiene la ecuación: $9z^2-(2+10i)z-8-6i=0$, cuyas raíces son $z_1=1+i$, $z_2=\frac{-7+i}{9}$. Los focos son: $(1,1)$, $\left(\frac{-7}{9},\frac{1}{9}\right)$. Para el foco $(1,1)$, la directriz es: $xf'_{x_1}+yf'_{y_1}+zf'_{z_1}=16x+8y-8=0$, es decir $2x+y-1=0$. Para el foco $\left(\frac{-7}{9},\frac{1}{9}\right)$, la directriz es: $18x+9y-5=0$.

D 44- Demostrar que en ejes rectangulares las cónicas $(ax+by)^2+(a'x+b'y)^2-c^2=0$ y $(ax+a'y)^2+(bx+b'y)^2-c^2=0$, son iguales.

Solución: Desarrollando la primera ecuación, se tiene: $(a^2+a'^2)x^2+(b^2+b'^2)y^2+$ $+2(ab+a'b')xy-c^2=0$, cuyos invariantes son: $I_1=a_{11}+a_{22}=a^2+b^2+a'^2+b'^2$, $I_2=A_{33}=$ $=\begin{vmatrix} a^2+a'^2 & ab+a'b' \\ ab+a'b' & b^2+b'^2 \end{vmatrix}=(ab'-a'b)^2$, $I_3=A=\begin{vmatrix} a^2+a'^2 & ab+a'b' & 0 \\ ab+a'b' & b^2+b'^2 & 0 \\ 0 & 0 & -c^2 \end{vmatrix}=-c^2(ab'-a'b)^2$.

Desarrollada la segunda ecuación, se tiene: $(a^2+b^2)x^2+(a'^2+b'^2)y^2++2(aa'+bb')xy-c^2=0$, cuyos invariantes son: $I'_1=a^2+b^2+a'^2+b'^2=I_1$, $I'_2=A'_{33}=\begin{vmatrix} a^2+b^2 & aa'+bb' \\ aa'+bb' & a'^2+b'^2 \end{vmatrix}=(ab'-a'b)^2=I_2$, $I'_3=A'=\begin{vmatrix} a^2+b^2 & aa'+bb' & 0 \\ aa'+bb' & a'^2+b'^2 & 0 \\ 0 & 0 & -c^2 \end{vmatrix}=-c^2(ab'-a'b)^2=I_3$. Por tanto, las dos cónicas, al tener iguales sus invariantes, son iguales.

D 45- Hallar la ecuación reducida de la cónica $20x^2+20y^2+58xy-314x+118y-2053=0$.

Solución: $I_1=a_{11}+a_{22}=40$, $I_2=A_{33}=-441$, $I_3=A=-194481$. La ecuación en S es: $S^2-49S-441=0$, siendo sus raíces 49 y -9. La ecuación pedida es: $\dfrac{x^2}{-\dfrac{-194481}{\dfrac{-441}{49}}}+\dfrac{y^2}{-\dfrac{194481}{\dfrac{-441}{-9}}}=1$.

Operando: $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{49}+1=0$.

D 46- Hallar la ecuación reducida de la cónica $16x^2+9y^2-24xy-38px-34py+71p^2=0$.

Solución: Se tienen los siguientes valores: $I_1=25$, $I_2=0$ (parábola), $I_3=-15625p^2$. La ecuación es: $25y^2-2\sqrt{\dfrac{15625p^2}{25}}\,x=25y^2-50px=0$. Simplificando: $y^2=2px$.

D 47- Dada la cónica $(1+a^4)(x^2+y^2)+2(a^4-1)xy-2a(5a^4+1)x-2a(5a^4-1)y+25a^6-a^2=0$, y siendo $a>\sqrt[4]{\dfrac{1}{7}}$, hallar el valor del límite del área común de la cónica y el primer cuadrante, cuando $a\to\infty$.

Solución: $I_2=A_{33}=4a^4>0$, luego es una elipse. Su intersección con $x=0$, viene dada por $y=\dfrac{a(5a^4-1)\pm a\sqrt{2-34a^4}}{1+a^4}$, que es imaginaria por la condición de a. Por el mismo motivo, es imaginaria la intersección con $y=0$. Como la elipse no corta a los ejes y está situada en el primer cuadrante, el área pedida coincide con el área de la elipse, es decir: $S=\dfrac{\pi I_3}{I_2^{\frac{3}{2}}}$. Siendo $I_3=A=8a^6$, la superficie es $S=\dfrac{\pi 8a^6}{(4a^4)^{\frac{3}{2}}}=\pi$, que al ser una constante, su límite es ella misma.

D 48- Dada la cónica $7x^2-7y^2+48xy+2(7a+24b)x-2(7b-24a)y-18a^2-7b^2+48ab=0$, hallar su ecuación reducida que conste solo de dos términos.

Solución: Como $A_{33}=-625$, se trata de una hipérbola, luego la ecuación que se pide es la referida a sus asíntotas, que es $2b_{12}xy+b_{33}=0$, cuyos invariantes son: $I_1'=\dfrac{-2b_{12}\cos\theta'}{\sin^2\theta'}$, $I_2'=\dfrac{-b_{12}^2}{\sin^2\theta'}$, $I_3'=\dfrac{-b_{12}^2b_{33}}{\sin^2\theta'}$. En la ecuación dada, se tiene: $I_1=0$, $I_2=-625$, $I_3=25^3a^2$. Igualando los invariantes y resolviendo el sistema, se tiene: $\cos\theta'=0$, $\sin\theta'=1$, $b_{12}=25$, $b_{33}=-25a^2$. La ecuación es: $50xy-25a^2=0$. Simplificando: $xy-\dfrac{a^2}{2}=0$

D 49- Dada la cónica $x=2t^2+t-1$, $y=t^2+3t+1$, se pide: 1º) Ecuación de la recta que une los puntos t_1 y t_2. 2º) Ecuación de la tangente en el punto t. 3º) Ecuación de la polar del punto de coordenadas $(2,3)$. 4º) Coordenadas del vértice y ecuación del eje. 5º) Coordenadas del foco y ecuación de la directriz.

Solución: 1º) Sea la ecuación de la recta: $x+my+p=0$, Sustituyendo los valores de x,y, se tiene: $2t^2+t-1+m(t^2+3t+1)+p=0$, es decir: $(2+m)t^2+(1+3m)t-1+m+p=0$. Luego: $t_1+t_2=\dfrac{-(1+3m)}{2+m}$, $t_1t_2=\dfrac{-1+m+p}{2+m}$. De donde se tiene que: $m=\dfrac{-[1+2(t_1+t_2)]}{t_1+t_2+3}$, $p=\dfrac{5t_1t_2+3(t_1+t_2)+4}{t_1+t_2+3}$. La recta que une los puntos t_1 y t_2, es: $(t_1+t_2+3)x-[1+2(t_1+t_2)]y+$ $+5t_1t_2+3(t_1+t_2)+4=0$. 2º) Haciendo en la ecuación anterior $t_1=t_2=t$, se tiene la tangente en el punto t: $(2t+3)x-(4t+1)y+5t^2+6t+4=0$. 3º) Haciendo que la tangente pase por $(2,3)$: $2(2t+3)-3(4t+1)+5t^2+6t+4=5t^2-2t+7=0$. Se tiene: $\dfrac{2+m}{5}=\dfrac{1+3m}{-2}=\dfrac{-1+m+p}{7}$, $m=\dfrac{-9}{17}$, $p=\dfrac{61}{17}$. La polar es: $17x-9y+61=0$. 4º) $t_1=-\dfrac{A_1B_1+A_2B_2}{2(A_1^2+B_1^2)}=-\dfrac{2\cdot1+1\cdot3}{2(1+1)}=\dfrac{-1}{2}$. Luego $x=2\cdot\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}-1=-1$; $y=\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{2}+1=-\dfrac{1}{4}$. El vértice es $\left(-1,\dfrac{-1}{4}\right)$. Como los parámetros del eje son 2 y 1, el eje es $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+\frac{1}{4}}{1}$, es decir: $2x-4y+1=0$. 5º) Siendo el foco (α,β), las tangentes desde él son las rectas isótropas. Luego: $y-\beta=\lambda(x-\alpha)$, siendo: $\lambda^2+1=0$. Luego: $(t^2+3t+1)-\beta=\lambda(2t^2+t-1-\alpha)$, $(2\lambda-1)t^2+(\lambda-3)t-\lambda-\alpha\lambda-1+\beta=0$. Por tener una raíz doble: $(\lambda-3)^2=4(2\lambda-1)(-\lambda-\alpha\lambda-1+\beta)$. Luego: $(9+8\alpha)\lambda^2-(2+4\alpha+8\beta)\lambda+5+4\beta=0$. Por tanto: $\dfrac{9+8\alpha}{1}=\dfrac{-2-4\alpha-8\beta}{0}=\dfrac{5+4\beta}{1}$, de donde: $\alpha=\dfrac{-1}{2}$, $\beta=0$. El foco es $\left(\dfrac{-1}{2},0\right)$. Como,

$(2+m)t^2+(1+3m)t-1+m+p=0$, y $2t^2+2t+1=0$, se tiene: $\frac{2+m}{2}=\frac{1+3m}{2}=\frac{-1+m+p}{1}$, de donde: $m=\frac{1}{2}$, $p=\frac{7}{4}$. La directriz es: $4x+2y+7=0$.

D 50- Hallar la ecuación de la cónica tangente al eje OY en el punto $(0,3)$, que pasa por el punto $(1,6)$, y que tiene por asíntota la recta $y=x$. Hallar sus ejes.

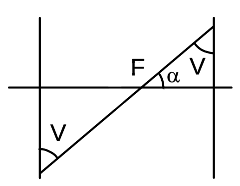
Solución: Ecuación general de la cónica: $x(x-y)+\lambda(x-y+3)^2=0$. Satisfaciendo las coordenadas $(1,6)$, $\lambda=\frac{5}{4}$. La cónica es: $9x^2+5y^2-14xy+30x-30y+45=0$. La ecuación de las pendientes de los ejes es: $-7m^2+(9-5)m+7=0$, luego: $m=\frac{-2\pm\sqrt{53}}{-7}$. Las derivadas son: $f'_x=18x-14y+30$, $f'_y=10y-14x-30$. Luego los ejes son: $18x-14y+30+\frac{-2\pm\sqrt{53}}{-7}(10y-14x-30)=0$. Operando: $\left(49\pm7\sqrt{53}\right)x-\left(39\pm5\sqrt{3}\right)y+75\pm15\sqrt{53}=0$.

D 51- 1º) Hallar la ecuación general de las cónicas que tienen por centro un punto de la recta $x-2y=0$, y pasan por los puntos $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,1)$. 2º) Hallar el lugar geométrico de los puntos de contacto de las tangentes a dichas cónicas, paralelas al eje OX.

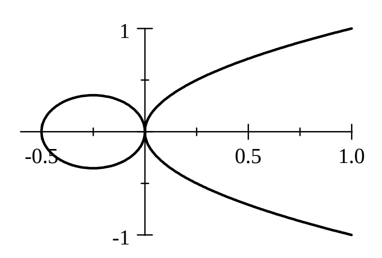
Solución: 1º) La ecuación general de las cónicas circunscritas al triángulo formado por los dos ejes coordenados y la recta $x+2y-2=0$, es: $(x+2y-2)x+\lambda(x+2y-2)y+\mu xy=0$. Siendo su centro el punto $\left(\alpha,\frac{\alpha}{2}\right)$, estas coordenadas satisfarán a las siguientes ecuaciones: $f'_x=2x+2y-2+\lambda y+\mu y=0$, $f'_y=2x+4\lambda y+\lambda x-2\lambda+\mu x=0$. Luego: $\lambda=2$, $\mu=-8+\frac{2}{\alpha}$. La ecuación en función de α, es: $x^2+4y^2+\left(-4+\frac{2}{\alpha}\right)xy-2x-4y=0$. 2º) Cortando por $y=b$, y obligando a que tenga una raíz doble: $x^2+x\left(-4b+\frac{2b}{\alpha}-2\right)+4b^2-4b=0$, $x=2b-\frac{b}{\alpha}+1\pm\sqrt{\left(2b-\frac{b}{\alpha}+1\right)^2-4b^2+4b}$. De donde: $\left(2b-\frac{b}{\alpha}+1\right)^2-4b^2+4b=0$, $x=2b-\frac{b}{\alpha}+1$, $\alpha=\frac{y}{-x+2y+1}$. Operando: $x^2-4y^2+4y=0$.

D 52- El foco F de una cónica es $(0,0)$, y la directriz $x+a=0$. La excentricidad e es variable. Por el foco se traza una recta cuyo ángulo V con la directriz es tal que $\sin V=e$. Se pide el lugar geométrico del punto de intersección de la recta con la cónica.

Solución:



La ecuación de la cónica es: $x^2+y^2=e^2(x+a)^2$. La recta que pasa por F, es: $y=mx$. Se tiene que: $m=\tan\alpha=\cot V=\sqrt{\frac{1-e^2}{e^2}}$, de donde: $e=\sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}}$. Sustituyendo este valor en la ecuación de la cónica, se tiene el lugar pedido: $(y^2-ax)(2x^2+y^2+ax)=0$, compuesto por una parábola y una elipse, cuyo dibujo se incluye a continuación, para $a=1$.



D 53- Se da la cónica $y_1=ax^2+bx+c$. 1º) Determinar a,b,c para que pase por el punto $(-1,-2)$, y que el punto $\left(\frac{-1}{2},\frac{-9}{4}\right)$ sea vértice de la cónica. 2º) Estudiar las variaciones de $y_2=-x^2-2x+3$. 3º) Para qué valores se tiene $y_1=y_2$.

Solución: 1º) $a=b=1$, $c=-2$. Luego, $y_1=x^2+x-2=(x-1)(x+2)$. 2º) $y_2=-(x-1)(x+3)$. Las variaciones de y_2 son:

x	$-\infty \le x < -3$	-3	$-3 < x < 1$	1	$1 < x \le \infty$
y_2	$-\infty \le y_2 < 0$	0	> 0	0	$0 > y_2 \ge -\infty$

Su máximo es: $y_2 = 4$, para $x = -1$. 3º) $x^2 + x - 2 = -x^2 - 2x + 3$. Luego, para $x = 1$, $y_1 = y_2 = 0$; para $x = \frac{-5}{2}, y_1 = y_2 = \frac{7}{4}$.

D 54- Sean P y P' las proyecciones ortogonales de un punto cualquiera de una cónica sobre dos rectas r y r' de su plano. Determinar el lugar geométrico del punto medio de PP'.

Solución: Sea O el punto de intersección de las dos rectas r y r', y sea r el eje OX. La ecuación de r' es $y = mx$. Desde (x_i, y_i), punto genérico de la cónica dada, se trazan las perpendiculares a r y r', que son: $x = x_i$, $y - y_i = \frac{-1}{m}(x - x_i)$. Los respectivos puntos de corte son: $(x_i, 0)$, $\left(\frac{x_i + my_i}{1+m^2}, \frac{m(x_i + my_i)}{1+m^2}\right)$. Siendo (α, β) su punto medio, se tiene: $2\alpha = x_i + \frac{x_i + my_i}{1+m^2}$, $2\beta = \frac{m(x_i + my_i)}{1+m^2}$. Luego $x_i = \frac{2(m\alpha - \beta)}{m}$, $y_i = \frac{2(m^2+2)\beta - 2m\alpha}{m^2}$. Introduciendo estos valores en la ecuación de la cónica, y cambiando (α, β) por (x, y), se tiene el lugar pedido. Como las ecuaciones que ligan (x_i, y_i) con (α, β) son lineales, la cónica del lugar geométrico es de la misma naturaleza que la cónica dada.

D 55- La recta $y = x + 2$ es tangente a la cónica respecto de la que son conjugados armónicos los pares de puntos $(1,0,0)$, $(1,2,0)$ y $(1,1,0)$, $(5,1,0)$, en coordenadas homogéneas. Siendo $(1,1,1)$ el polo de la recta que los contiene, hallar la ecuación de la cónica.

Solución: Sea la ecuación genérica homogeneizada $Ax^2 + By^2 + 2Hxy + 2Gxz + 2Fyz + Cz^2 = 0$. Sus derivadas parciales son: $f'_x = Ax + Hy + Gz$, $f'_y = By + Hx + Fz$, $f'_z = Gx + Fy + Cz$. Aplicando la ecuación $x_1 f'_{x_2} + y_1 f'_{y_2} + z f'_{z_2} = 0$ a los pares de puntos conjugados, se tiene; $A + 2H = 0$, $5A + 6H + B = 0$. Aplicándola para obtener la polar de $(1,1,1)$, se tiene: $x(A+H+G) + y(H+B+F) + z(G+F+C) = 0$. Como los puntos dados están en la polar, se tiene: $A + H + G = 0$, $H + B + F = 0$, $-3H + G = 0$. Resuelto el sistema, se obtiene: $A = -2H$, $B = 4H$, $G = H$, $F = -5H$. Luego la ecuación de la cónica es: $x^2 - 2y^2 - xy - x + 5y + C = 0$. Para que sea punto doble la intersección con $y = x + 2$, se tiene $C = \frac{-13}{2}$. La ecuación pedida es: $x^2 - 2y^2 - xy - x + 5y - \frac{13}{2} = 0$. Se trata de una hipérbola de centro $(1,1)$ y asíntotas $x - 2y + 1 = 0$, $x + y - 2 = 0$.

D 56- Hallar la ecuación de la parábola tangente al eje OX en el punto $(0,0)$ y cuyo eje es $x + 2y - 2 = 0$.

Solución: La ecuación de las parábolas tangentes a OX en el punto de corte con la recta $x + 2y = 0$, paralela al eje, es: $(x + 2y)^2 + \lambda y = 0$. Su eje es: $9x + 18y + 2\lambda = 0$, de donde $\lambda = -9$. La ecuación pedida es: $x^2 + 4y^2 + 4xy - 9y = 0$.

D 57- Hallar la ecuación de la hipérbola equilátera definida por el foco $(-1,2)$ y la directriz $y - x = 0$.

Solución: Ecuación focal: $(x+1)^2 + (y-2)^2 = \lambda(y-x)^2$, $e^2 = 2\lambda = 2$, $\lambda = 1$. La ecuación pedida es: $2xy + 2x - 4y + 5 = 0$.

D 58- Hallar la ecuación general y la reducida de la cónica engendrada por dos haces proyectivos de vértices $(0,0)$ y $(2,-3)$, en los cuales se corresponden los siguientes pares de rectas: $y - 2x = 0$, con $y - 3x + 9 = 0$; $y = 0$, con $y + 3 = 0$; $x = 0$, con el rayo que proyecta el punto del eje negativo $Y'O$ situado a 12 unidades del origen.

Solución: La ecuación del tercer rayo del segundo haz, es $2y - 9x + 24 = 0$. La ecuación de un cuarto rayo del haz con vértice $(0,0)$ es $y = ax$, y la del correspondiente al haz de vértice $(2,-3)$ es $y + 3 = b(x - 2)$. Las pendientes de los rayos de cada haz, proporcionan las siguientes cuaternas: $(2, 0, \infty, a) = \left(3, 0, \frac{9}{2}, b\right)$. Desarrollándolas se tiene que: $a = \frac{2b}{9 - 2b}$. Luego, $\frac{y}{x} = \frac{\frac{2(y+3)}{x-2}}{9 - \frac{2(y+3)}{x-2}} = \frac{2y+6}{9x - 2y - 24}$. Es decir: $2y^2 - 7xy + 6x + 24y = 0$. Siendo la ecuación reducida: $ax^2 + by^2 + c = 0$, igualando los invariantes, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones: $I_1 = 2 = a + b$, $I_2 = \frac{-49}{4} = ab$, $I_3 = -270 = abc$. De donde: $a = \frac{2 + \sqrt{53}}{2}$, $b = \frac{2 - \sqrt{53}}{2}$, $c = \frac{1080}{49}$. La ecuación reducida es:

$$\frac{2+\sqrt{53}}{2}x^2+\frac{2-\sqrt{53}}{2}y^2+\frac{1080}{49}=0.$$

D 59- Determinar la ecuación y naturaleza de una cónica que pasa por los puntos $(1,2)$, $\left(\frac{-11}{13},\frac{-22}{13}\right)$, siendo la polar de $(0,0)$ la recta $3x-y+11=0$, y siendo el punto del infinito del eje OX, conjugado con el punto $(3,0)$.

Solución: Ecuación general de las cónicas en las que la polar de $(0,0)$ es la recta $3x-y+11=0$: $(y-ax)(y-bx)+\lambda(3x-y+11)^2=0$. Por ser conjugados los puntos $(1,0,0)$ y $(3,0,1)$, se tiene $f'_x(3,0,1)=6(ab+20\lambda)=0$. Por pasar por los puntos: $(1,2)$ y $\left(\frac{-11}{13},\frac{-22}{13}\right)$, se tiene que: $ab-2a-2b+144\lambda+4=0$. Como $ab=-20\lambda$, $a+b=62\lambda+2$, sustituyendo estos valores en la ecuación de la cónica, se tiene: $11\lambda x^2+(68\lambda+2)xy-(\lambda+1)y^2-66\lambda x+22\lambda y-121\lambda=0$. Como $A_{33}=-(1167\lambda^2+79\lambda+1)$, se tiene que para $\lambda>\frac{-79+11\sqrt{13}}{2334}$ y $\lambda<\frac{-79-11\sqrt{13}}{2334}$, la cónica es hipérbola; para $\frac{-79-11\sqrt{13}}{2334}<\lambda<\frac{-79+11\sqrt{13}}{2334}$, la cónica es elipse; y para $\lambda=\frac{-79\pm 11\sqrt{13}}{2334}$, la cónica es parábola.

D 60- Determinar el lugar geométrico engendrado por la intersección de dos haces proyectivos cuyos vértices son $(1,0)$ y $(0,0)$, y de los que tres rayos de cada haz proyectan los puntos $(1,1)$, $(2,1)$, $(2,-2)$.

Solución: Las cuaternas referentes a las pendientes de los rayos, son: $(\infty,1,-2,a)=\left(1,\frac{1}{2},-1,b\right)$, siendo a y b las pendientes correspondientes a un cuarto rayo de cada haz, cuyas ecuaciones respectivas son: $y=a(x-1)$, $y=bx$. De donde: $a=\frac{y}{x-1}$, $b=\frac{y}{x}$. Operando, se tiene la ecuación de la hipérbola: $x^2-2xy-y^2-x+3y=0$.

D 61- Determinar la ecuación y naturaleza de una cónica definida por dos haces proyectivos de vértices $O(0,0)$ y $O'(4,3)$. A los rayos OX, OY y OO' del primer haz, les corresponde en el segundo los rayos cuyas pendientes son 3, 0 y $\frac{-3}{2}$.

Solución: Se tienen las siguientes cuaternas: $\left(0,\infty,\frac{3}{4},a\right)=\left(3,0,\frac{-3}{2},b\right)$, siendo $a=\frac{y}{x}$, $b=\frac{y-3}{x-4}$. Operando, se obtiene la ecuación: $3x^2-xy+4y^2-9x-12y=0$ (elipse).

D 62- Determinar la ecuación y naturaleza de la cónica que pasa por el punto $(1,-1)$ y es tangente a los ejes en los puntos $(2,0)$ y $(0,3)$.

Solución: Por ser tangente a los ejes en los puntos dados: $xy+\lambda(3x+2y-6)^2=0$. Obligando a que pase por $(1,-1)$, $\lambda=\frac{1}{25}$, quedando la ecuación: $9x^2+37xy+4y^2-36x-24y+36=0$ (hipérbola).

D 63- Determinar la ecuación y naturaleza de la cónica definida por dos haces proyectivos de vértices $(0,3)$ y $(2,0)$. A las pendientes: ∞, $\frac{-3}{2}$, -4, de rayos del primer haz, les corresponden en el segundo las pendientes: $\frac{-3}{2}$, 0, 1.

Solución: Se tienen las cuaternas: $\left(\infty,\frac{-3}{2},-4,a\right)=\left(\frac{-3}{2},0,1,b\right)$, siendo $a=\frac{y-3}{x}$, $b=\frac{y}{x-2}$. Operando, se obtiene la ecuación: $9x^2+37xy+4y^2-36x-24y+36=0$ (hipérbola).

D 64- Determinar la ecuación y naturaleza de una cónica de la que se sabe que el origen de coordenadas es conjugado con el punto del infinito del eje OX, que el polo de la recta $y+x=0$ es el punto $(-2,0)$, y que pasa por los puntos $(2,2)$ y $(0,4)$.

Solución: Ecuación de las cónicas en las que la polar de $(-2,0)$ es $x+y=0$, y los puntos $(0,0,1)$ y $(1,0,0)$ son conjugados: $y[ay-b(x+2)]+\lambda(x+y)^2=0$. Obligando a que pase por los puntos $(2,2)$ y $(0,4)$, se tiene: $a-2b+4\lambda=0$, $2a-b+2\lambda=0$, de donde $a=0$, $b=2\lambda$. Operando, se tiene la ecuación: $x^2+y^2-4y=0$ (circunferencia).

D 65- Hallar la ecuación y naturaleza de la cónica engendrada por dos haces proyectivos de rayos paralelos, respectivamente, a las rectas $x+2y-1=0$ y $2x-y+1=0$, siendo los homólogos de estos dos rayos, la recta del infinito. La cónica pasa por el origen de coordenadas.

Solución: Ecuación general: $(x+2y-1)(2x-y+1)=\lambda$. Por pasar por $(0,0)$, $\lambda=-1$. La ecuación es:

$2x^2 - 2y^2 + 3xy - x + 3y = 0$ (hipérbola).

D 66- Hallar la ecuación y naturaleza de la cónica que pasa por los puntos del infinito de las bisectrices de los ejes coordenados, que corta al eje OY en dos puntos de ordenadas 3 y -1, y que corta al eje OX en el punto de abscisa -2.

Solución: Partiendo de la ecuación general homogeneizada: $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dxz + Eyz + Fz^2 = 0$, se tiene: $C = 0$, $A = -B$, $E = 2A$, $D = \frac{7A}{2}$, $F = 3A$. Por tanto la ecuación es: $2x^2 - 2y^2 + 7x + 4y + 6 = 0$ (hipérbola).

D 67- Hallar la ecuación de la parábola que pasa por los puntos $(0,1)$ y $(3,0)$ y es tangente a los ejes coordenados.

Solución: Ecuación general: $xy + \lambda(x + 3y - 3)^2 = 0$. Como $A_{33} = 9\lambda^2 - \left(3\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$, $\lambda = \frac{-1}{12}$. La ecuación es: $x^2 - 6xy + 9y^2 - 6x - 18y + 9 = 0$.

D 68- Hallar la ecuación de la hipérbola tangente al eje OX en el punto de coordenadas homogéneas $(2,0,1)$, tangente al eje OY en el punto $(0,1,1)$, y que pasa por $(1,1,0)$. Hallar la ecuación de la parábola tangente a la hipérbola anterior en los mismos puntos de los ejes OX y OY.

Solución: Ecuación general de la cónica: $xy + \lambda\left(\frac{x}{2} + y - 1\right)^2 = 0$. Por pasar por $(1,1,0)$, $\lambda = \frac{-4}{9}$. La ecuación de la hipérbola es: $x^2 - 5xy + 4y^2 - 4x - 8y + 4 = 0$. Haciendo en la ecuación general anterior, que $A_{33} = 0$, se tiene $\lambda = \frac{-1}{2}$, siendo la ecuación de la parábola: $x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x - 8y + 4 = 0$.

D 69- Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto $(0,0)$, y tiene por asíntotas las rectas $x + y + 1 = 0$, $2x - y + 2 = 0$.

Solución: Ecuación general: $(x + y + z)(2x - y + 2z) + \lambda z^2 = 0$. Por pasar por $(0,0)$, $\lambda = -2$. La ecuación es: $2x^2 + xy - y^2 + 4x + y = 0$.

D 70- En el plano de un triángulo ABC se tiene un punto fijo P y otro variable M. Las paralelas trazadas por M a AP, BP, CP, encuentran a los lados BC, CA, AB, en los puntos A_1, B_1, C_1. Demostrar que dada el área del triángulo $A_1B_1C_1$, el lugar geométrico de M es una cónica.

Solución: Sean $P(m,n)$, $M(\lambda,\mu)$, $A(0,c)$, $B(b,0)$, $C(a,0)$, $BC \equiv y = 0$, $CA \equiv \frac{x}{a} + \frac{y}{c} = 1$, $AB \equiv \frac{x}{b} + \frac{y}{c} = 1$, $PA \equiv y = \frac{n-c}{m}x + c$, $PB \equiv y = \frac{n(x-b)}{m-b}$, $PC \equiv y = \frac{m(x-a)}{m-a}$. La paralela por M a PA, es: $y - \mu = \frac{n-c}{m}(x - \lambda)$, siendo su intersección con BC: $A_1\left(\lambda - \frac{\mu m}{n-c}\right)$. La ecuación de la paralela por M a PB, es: $y - \mu = \frac{n}{m-b}(x - \lambda)$, siendo las coordenadas de su intersección con CA: $B_1\left(\lambda + \frac{(m-b)(ac - a\mu - cx)}{an}, \frac{cm(\mu - \lambda) - ac\mu + nbc}{c(m-a) + nb}\right)$. Análogamente para las coordenadas de C_1. Como el área del triángulo $A_1B_1C_1$ está dada, el determinante $\begin{vmatrix} A_{1x} & A_{1y} & 1 \\ B_{1x} & B_{1y} & 1 \\ C_{1x} & C_{1y} & 1 \end{vmatrix}$ es constante. Como las coordenadas de A_1, B_1, C_1 son funciones lineales de λ, μ, dicho determinante es una función de segundo grado en λ, μ. Luego el lugar geométrico de $M(\lambda,\mu)$ es una cónica.

D 71- Si por un punto P de una cónica se trazan pares de secantes igualmente inclinadas respecto a una recta r dada, demostrar que las rectas que unen los segundos puntos de intersección, Q y R, de dichas secantes con la cónica, concurren en un punto.

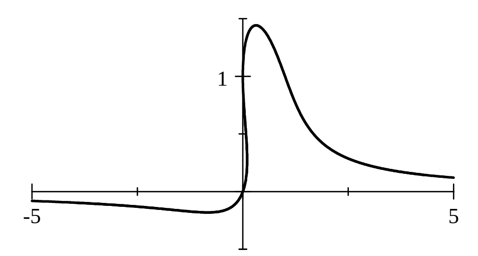
Solución: Se toma como origen de coordenadas el punto P, y como eje OX la paralela por P a la recta dada r. La ecuación general de una cónica que pasa por el origen es $x^2 + Ay^2 + Bxy + Cx + Dy = 0$. Las ecuaciones de las rectas PQ y PR son: $y = \pm mx$, cuyos segundos puntos de intersección con la cónica, son: $Q\left(\frac{-C - Dm}{1 + Am + Bm^2}, \frac{m(-C - Dm)}{1 + Am + Bm^2}\right)$, $R\left(\frac{-C + Dm}{1 - Am + Bm^2}, \frac{-m(-C + Dm)}{1 - Am + Bm^2}\right)$. Ordenando la ecuación de la recta QR, según las potencias de m, se obtiene: $a\varphi m^4 + b\varphi m^3 + (c\varphi + d\psi)m^2 + e\psi m + f\psi = 0$, en la que φ y ψ son funciones lineales de x, y, siendo constantes a, b, c, d, e, f. Por tanto, al anular los coeficientes de los cinco monomios de la ecuación, resulta un sistema de dos ecuaciones lineales con dos

incógnitas, x, y, cuya solución corresponde a las coordenadas (independientes de m) del punto de concurrencia de las secantes QR.

Nota: Los pares de rayos PQ y PR forman una involución, por lo que la secante QR pasa por el punto de Frégier de dicha involución.

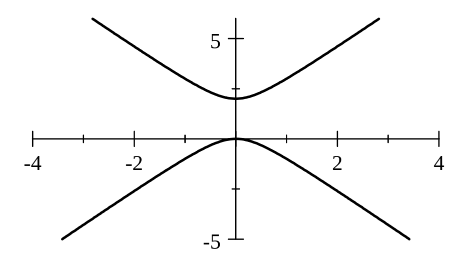
D 72- Hallar el lugar de los focos de las cónicas tangentes en un punto dado a una recta dada, teniendo una extremidad del eje focal en un punto dado.

Solución: Tomando como origen de coordenadas la extremidad del eje focal, como eje OX una perpendicular a la recta dada, como eje OY una paralela a dicha recta, y siendo $A(a,b)$ el punto de tangencia dado, se tiene: tangente en A: $x-a=0$; tangente en O: $y-mx=0$; $OA\equiv ay-bx=0$. La ecuación de la cónica es: $(y-mx)(x-a)+\lambda(ay-bx)^2=(\lambda b^2-m)x^2+\lambda a^2y^2+(1-2ab\lambda)xy+$ $+amx-ay=0$. Siendo (α,β) foco de la cónica, siendo las rectas isótropas tangentes a la cónica, y teniendo en cuenta que $m=\frac{-\alpha}{\beta}$, ya que la perpendicular a $y=mx$ trazada por O, es eje de la cónica y por tanto pasa por los focos, se obtiene el lugar de los focos, cuya ecuación, sustituyendo α,β por x,y, es: $2ax^2y+bxy^2+ay^3-2ay(ax+by)-a^2(bx-ay)=0$. El dibujo se refiere al lugar geométrico para el caso de $a=b=1$.



D 73- Se dan dos ejes rectangulares y un círculo tangente a OX en O, y que corta a OY en A. Hallar la ecuación general de las cónicas osculatrices al círculo en O, y que pasan por A. Se puede trazar al círculo y a una de estas cónicas, una tangente común distinta de OX. Hallar el lugar geométrico del punto de encuentro de dicha tangente con la cónica.

Solución: El centro del círculo es $(0,a)$ y el punto $A(0,2a)$, siendo la ecuación del círculo $x^2+y^2-2ay=0$. La ecuación de las cónicas osculatrices al círculo en O, y que pasan por A, es: $x^2+y^2-2ay+\lambda TQ=0$, siendo T la tangente común en O $(y=0)$, y Q la recta $AO\equiv x=0$. Por tanto la ecuación de la cónica es: $x^2+y^2+2\lambda xy-2ay=0$. La ecuación de la tangente a la cónica en el punto (α,β) es $x(\alpha+\lambda\beta)+y(\lambda\alpha+\beta-a)-a\beta=0$. Obligando a que sea tangente al círculo, se tiene: $(\alpha+\lambda\beta)^2+\beta(\lambda\alpha+\beta-a)-\beta^2=0$. Operando: $\lambda^2\beta^2+2\lambda\alpha\beta=\beta\lambda(\lambda\beta+2\alpha)=0$, de donde $\lambda=\frac{-2\alpha}{\beta}$. El lugar pedido es: $3\alpha^2-\beta^2+2a\beta=0$, es decir: $3x^2-y^2+2ay=0$ (hipérbola). El dibujo se refiere al lugar geométrico para el caso de $a=1$.



D 74- Se da una curva C que es envolvente de las rectas $r\equiv ux+vy+w=0$, verificándose $\frac{u}{1+t^2}=\frac{v}{t(1+t^2)}=\frac{w}{-2Rt}$. Se trazan a la curva C, seis tangentes a las que corresponden los valores $t_1,..., t_6$. 1º) Hallar la relación entre estos seis valores para que se pueda inscribir una cónica en el exágono formado por las seis tangentes. 2º) Hallar la ecuación general de las cónicas que tienen con la curva C tres contactos de primer orden (tres puntos de tangencia).

Solución: 1º) Sea la cónica de ecuación tangencial: $Au^2+2Buv+Cv^2+2Duw+2Evw+Fw^2=0$. Obligando a que r sea tangente, ha de verificarse que: $A(1+t^2)^2+2Bt(1+t^2)^2+Ct^2(1+t^2)^2-$ $-4DRt(1+t^2)-4ERt^2(1+t^2)+4FR^2t^2=0$. Ordenando esta ecuación en potencias de t, se tiene:

$Ct^6+2Bt^5+t^4(A+2C-4ER)+t^3(4B-4DR)+t^2(2A+C-4ER+4FR^2)+t(2B-4DR)+A=0$.
Siendo: S_1, S_3, S_5, las sumas de los productos monarios, ternarios y quinarios de las raíces, se tiene que: $S_1-S_3+S_5=\dfrac{-2B}{C}+\dfrac{4(B-DR)}{C}-\dfrac{2(B-2DR)}{C}=0$. Luego la relación pedida es: $S_1-S_3+S_5=0$. 2º) Para que la cónica tenga tres contactos de primer orden, la ecuación en t ha de ser el cuadrado de un polinomio de tercer grado: $t^3-\alpha t^2+\beta t-\gamma$. Luego: $S_1=2\alpha$, $S_3=2\gamma+2\alpha\beta$, $S_5=2\beta\gamma$. Por tanto: $S_1-S_3+S_5=(\alpha-\gamma)(1-\beta)=0$. Identificando las ecuaciones:
$Ct^6+2Bt^5+t^4(A+2C-4ER)+t^3(4B-4DR)+t^2(2A+C-4ER+4FR^2)+t(2B-4DR)+A=0$,
$t^6-2\alpha t^5+(\alpha^2+2\beta)t^4-2(\gamma+\alpha\beta)t^3+(\beta^2+2\alpha\gamma)t^2-2\beta\gamma t+\gamma^2=0$ (con $\beta=1$),
se tiene la ecuación pedida: $\gamma^2u^2-2\alpha uv+v^2+\dfrac{\gamma-\alpha}{R}uw+\dfrac{\gamma^2-\alpha^2}{2R}vw-\dfrac{(\gamma-\alpha)^2}{4R^2}w^2=0$.

D 75- Se consideran las cónicas tangentes a los ejes OX y OY en los puntos A y B, equidistantes a de O. Se pide: 1º) Ecuación general de las cónicas. 2º) Lugar geométrico de los vértices. 3º) Lugar geométrico de los focos.

Solución: 1º) $A(a,0)$, $B(0,a)$. La ecuación general es: $xy+\lambda(x+y-a)^2=0$. 2º) El conjunto de los vértices viene dado por: $a_{12}f_x'^2-(a_{11}-a_{22})f_x'f_y'-a_{12}f_y'^2=0$. Como $a_{11}=a_{22}=\lambda$, $f_x'=y+2\lambda(x+y-a)$, $f_y'=x+2\lambda(x+y-a)$, el lugar de los vértices es el conjunto de la recta: $x-y=0$, y de la cónica: $(x-y)^2-a(x+y)=0$. 3º) La ecuación es: $f_x'^2-f_y'^2-4(a_{11}-a_{22})f(x,y)=0$. Luego el lugar viene dado por el conjunto de las ecuaciones: $x-y=0$, $x^2+y^2-a(x+y)=0$.

D 76- Se dan dos rectas paralelas a los ejes coordenados. Hallar la ecuación general de las cónicas con centro el origen, para las que dichas rectas son normales.

Solución: Las rectas: $x=a$, $y=b$, son las normales a las cónicas en los respectivos puntos (a,μ), (λ,b). Las rectas: $y=\mu$, $x=\lambda$, son las tangentes a las cónicas en dichos puntos. La ecuación del haz de cónicas tangentes a estas dos rectas en dichos puntos, es:
$f(x,y,\theta)=(x-\lambda)(y-\mu)++\theta[x(b-\mu)+y(a-\lambda)+(\lambda\mu-ab)]^2=0$.
Derivando esta ecuación e igualendo a cero, se tiene:
$f_x'=y-\mu+2\theta[x(b-\mu)+y(a-\lambda)+(\lambda\mu-ab)](b-\mu)=0$,
$f_y'=x-\lambda+2\theta[x(b-\mu)+y(a-\lambda)+(\lambda\mu-ab)](a-\lambda)=0$.
Como el centro es $(0,0)$, se tiene: $-\mu+2\theta(\lambda\mu-ab)(b-\mu)=0$, $-\lambda+2\theta(\lambda\mu-ab)(a-\lambda)=0$. Luego, $2\theta(\lambda\mu-ab)=\dfrac{\mu}{b-\mu}=\dfrac{\lambda}{a-\lambda}$, es decir: $\mu=\dfrac{b\lambda}{a}$, $\theta=\dfrac{\lambda}{2(a-\lambda)\left(\frac{b}{a}\lambda^2-ab\right)}$. Introduciendo estos valores en la ecuación del haz, se tiene la ecuación pedida: $\lambda b^2x^2+\lambda a^2y^2-2a^2bxy-\lambda b^2(\lambda^2-a^2)=0$.

D 77- Hallar la polar recíproca de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, respecto a la hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$.

Solución: Ecuación paramétrica de la elipse: $x=a\sin\theta$, $y=b\cos\theta$. En la hipérbola, cuya ecuación homogeneizada es: $\varphi(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-z^2=0$, se tiene: $\varphi_x'=\dfrac{2x}{a^2}$, $\varphi_y'=\dfrac{-2y}{b^2}$, $\varphi_z'=-2z$. La polar de un punto de la elipse respecto a la hipérbola, es: $\dfrac{x\sin\theta}{a}-\dfrac{y\cos\theta}{b}-1=0$. Su derivada respecto a θ, es: $\dfrac{x\cos\theta}{a}+\dfrac{y\sin\theta}{b}=0$. Eliminando θ entre estas dos ecuaciones, para hallar la envolvente, se tiene: $y=-b\cos\theta$, $x=a\sin\theta$. Luego la ecuación pedida es: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (la misma elipse del enunciado).

D 78- Se consideran las cónicas tangentes a los ejes coordenados en los puntos $A(a,0)$, $B(0,b)$. Hallar: 1º) La ecuación general de las cónicas. 2º) El lugar geométrico de sus vértices. 3º) El lugar geométrico de sus focos.

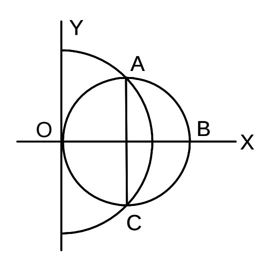
Solución: 1º) La ecuación general de las cónicas es: $\varphi(x,y,\lambda)=xy+\lambda(x+y-a)^2=0$. 2º) Las derivadas primeras de φ son: $\varphi_x'=y+2\lambda(x+y-a)=0$, $\varphi_y'=x+2\lambda(x+y-a)=0$. Las coordenadas del centro de la cónica, son: $\left(\dfrac{2a\lambda}{1+4\lambda},\dfrac{2a\lambda}{1+4\lambda}\right)$. La ecuación cuyas raíces son las pendientes de los ejes, es: $\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)m^2-\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)=0$, luego $m=\pm1$. El lugar geométrico de los vértices viene dado por la intersección de φ con las rectas: $y-\dfrac{2a\lambda}{1+4\lambda}=\pm\left(x-\dfrac{2a\lambda}{1+4\lambda}\right)$. La ecuación de este lugar es: $(y-x)\left[(x-y)^2-a(x+y)\right]=0$, que está formada por la primera bisectriz y por una parábola. 3º) Para

hallar los focos, se tiene el sistema: $\varphi_x'^2 - \varphi_y'^2 - 4(a_{11} - a_{22})\varphi = 0$, $\varphi'_x\varphi'_y - 4a_{12}\varphi = 0$. Es decir: $[y + 2\lambda(x + y - a)]^2 - [x + 2\lambda(x + y - a)]^2 = 0$, $[y + 2\lambda(x + y - a)][x + 2\lambda(x + y - a)] - 4(1 + 2\lambda)\left[xy + \lambda(x + y - a)^2\right] = 0$.

Eliminando λ entre estas dos ecuaciones, se tiene el lugar pedido: $(x - y)(x^2 + y^2 - ax - ay) = 0$, que está formado por la primera bisectriz y una circunferencia.

D 79- Se consideran las cónicas tangentes al eje OX en el origen, y cuya directriz es la recta $x + y - a = 0$. 1º) Hallar el lugar geométrico de los focos correspondientes a esta directriz. 2º) Estudiar la naturaleza de las cónicas al moverse este foco sobre su lugar.

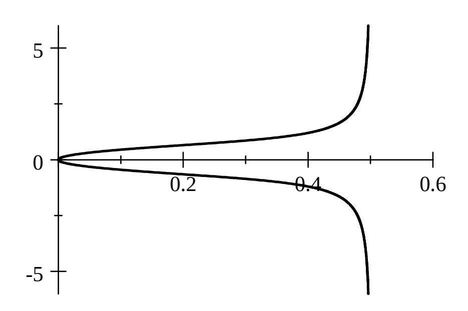
Solución:



1º) Siendo (α, β) el foco, la ecuación focal de las cónicas es: $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = e(x + y - a)^2$. Particularizando para el punto $(0,0)$, se tiene: $e = \dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{a^2}$, por lo que la ecuación de las cónicas es: $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{a^2}(x + y - a)^2$. Obligando a que el eje $y = 0$ sea tangente, se obtiene: $\alpha^2 + \beta^2 - a\alpha = 0$. Cambiando (α, β) por (x,y), se tiene la ecuación pedida: $x^2 + y^2 - ax = 0$, que corresponde al círculo $OABC$ de la figura, siendo $O(0,0)$, $A\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}\right)$, $B(a,0)$, $C\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{-a}{2}\right)$. 2º) En la ecuación de las cónicas se tiene que: $A_{33} = 1 - \dfrac{2(\alpha^2 + \beta^2)}{a^2}$. Si $\alpha^2 + \beta^2 - \dfrac{a^2}{2} = 0$, la cónica es una parábola, lo que corresponde a los puntos A y C de la figura. Si $\alpha^2 + \beta^2 - \dfrac{a^2}{2} > 0$, es hipérbola, lo que corresponde al arco ABC de la figura. Si $\alpha^2 + \beta^2 - \dfrac{a^2}{2} < 0$, es elipse, lo que corresponde al arco AOC de la figura.

D 80- Se da una parábola, un punto A sobre su eje, y una recta AD. Se consideran las cónicas bitangentes a la parábola según AD. 1º) Hallar el lugar geométrico de los centros de dichas cónicas, distinguiendo los puntos del lugar que son centros de elipses, de los que lo son de hipérbolas. Hallar el centro de la hipérbola equilátera. 2º) Hallar el lugar geométrico de los centros de las hipérbolas equiláteras, al girar AD en torno a A. 3º) Se trazan por O paralelas a las asíntotas de cada hipérbola equilátera, que cortan a la hipérbola en M y N. Hallar el lugar geométrico de los puntos de encuentro de MN con AD.

Solución: Sea la ecuación de la recta AD: $y - m(x - a) = 0$, y sea la ecuación de la parábola: $y^2 - 2px = 0$. La ecuación general de las cónicas bitangentes a la parábola según la recta AD, es: $y^2 - 2px + \lambda(y - mx + am)^2 = 0$. 1º) De esta ecuación se obtienen las siguientes derivadas: $f'_x = -2p - 2\lambda(y - mx + am)m = 0$, $f'_y = 2y + 2\lambda(y - mx + am) = 0$. De donde $y = \dfrac{p}{m}$, es el lugar de los centros. Introduciendo en la ecuación general el valor $\lambda = \dfrac{p}{m^2(x_0 - a) - p}$, obtenido de $f'_x = 0$, se tiene: $A_{33} = m^2\lambda = \dfrac{m^2 p}{m^2(x_0 - a) - p}$. Luego para $x_0 > \dfrac{p}{m^2} + a$, es una elipse, y para $x_0 < \dfrac{p}{m^2} + a$, es una hipérbola. En la hipérbola equilátera, se tiene que: $a_{11} + a_{22} = \lambda m^2 + \lambda + 1 = 0$, $\lambda = \dfrac{-1}{m^2 + 1}$. Introduciendo este valor en $f'_x = 0$, y teniendo en cuenta que $y = \dfrac{p}{m}$, se tiene para el centro de la hipérbola equilátera que $x = a - p$, luego el centro es: $\left(a - p, \dfrac{p}{m}\right)$. 2º) Es la recta: $x = a - p$. 3º) El conjunto de las paralelas por O a las asíntotas es: $m^2y^2 + 2mxy - m^2x^2 = 0$. Si esta ecuación se resta de la de la hipérbola equilátera, que es: $(y^2 - 2px)(1 - m^2) - (y - mx + am)^2 = 0$, se tiene: $(2p + 2pm^2 - 2am^2)x + 2amy + +a^2m^2 = 0$, que es una recta, y por ser combinación lineal de las ecuaciones del conjunto de las asíntotas y de la hipérbola equilátera, pasa por su intersección, por lo que es la ecuación de la recta MN. Sustituyendo $m = \dfrac{y}{x - a}$, se tiene el lugar geométrico pedido: $y^2 = \dfrac{2px(x - a)^2}{a^2 - 2px}$. El dibujo se refiere a este lugar en el caso de $p = a = 1$.



D 81- Hallar las ecuaciones de las siguientes polares recíprocas: 1º) De la hipérbola $xy = 1$, respecto al círculo $x^2 + y^2 - 1 = 0$. 2º) De la parábola $y^2 - 2x = 0$, respecto a la parábola $x^2 - 2y = 0$. 3º) De la espiral logarítmica $\rho = e^\theta$, respecto a la hipérbola equilátera de centro el origen y tangente a la espiral en el punto $(1,0)$.

Solución: 1º) La tangente en el punto (α,β) de la hipérbola, es:$\beta x + \alpha y - 2 = 0$. El polo (λ,μ) de esta tangente respecto a la circunferencia, verifica la ecuación: $\frac{2\lambda}{\beta} = \frac{2\mu}{\alpha} = \frac{-2}{-2}$. Luego, $\alpha = 2\mu$, $\beta = 2\lambda$. Por tanto, $4\lambda\mu = 1$. La ecuación pedida es: $4xy - 1 = 0$. 2º) La tangente en el punto (α,β) de la parábola, es: $x - \beta y + \alpha = 0$. El polo (λ,μ) de esta tangente respecto a la segunda parábola, verifica la ecuación: $\frac{2\lambda}{1} = \frac{-2}{-\beta} = \frac{-2\mu}{\alpha}$. Luego se tiene que: $\alpha = \frac{-\beta}{\lambda}$, $\beta = \frac{1}{\lambda}$. Por tanto, $\frac{1}{\lambda^2} + \frac{2\mu}{\lambda} = 0$. La ecuación pedida es: $2xy + 1 = 0$. 3º) Las ecuaciones paramétricas de la espiral, son: $x = e^\theta\cos\theta$, $y = e^\theta\sin\theta$. La ecuación general de las hipérbolas equiláteras de centro el origen, es: $x^2 + 2axy - y^2 + b = 0$. Por pasar por $(1,0)$, $b = -1$. La tangente a la espiral en $(1,0)$, es: $y = x - 1$. Para que sea tangente a la hipérbola, la ecuación $x^2 + 2ax(x-1) - (x-1)^2 - 1 = 0$ ha de tener una raíz doble, por lo que $a = -1$. La ecuación de la hipérbola es, por tanto: $x^2 - 2xy - y^2 - 1 = 0$. La tangente en el punto $(e^\theta\cos\theta, e^\theta\sin\theta)$ de la espiral, es: $(\cos\theta + \sin\theta)x + (\sin\theta - \cos\theta)y - e^\theta = 0$. El polo (λ,μ) de esta tangente respecto a la hipérbola, verifica las ecuaciones: $\frac{2\lambda - 2\mu}{\cos\theta + \sin\theta} = \frac{-2\lambda - 2\mu}{\sin\theta - \cos\theta} = \frac{-2}{-e^\theta}$. Resolviendo este sistema, se obtienen los siguientes valores: $\lambda = e^{-\theta}\cos\theta$, $\mu = -e^{-\theta}\sin\theta$. Haciendo $\theta = -\omega$, se tiene: $\lambda = e^\omega\cos\omega$, $\mu = e^\omega\sin\omega$. Estas ecuaciones paramétricas corresponden a la espiral dada: $\rho = e^\omega$.

D 82- Hallar el lugar geométrico de los centros de los triángulos equiláteros inscritos en una elipse.

Solución: Sea la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Los vértices del triángulo son (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3), y su centro de gravedad (α,β). La circunferencia circunscrita al triángulo, es: $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$. Eliminando x entre estas dos ecuaciones, se obtiene la ecuación cuyas raíces son las ordenadas de los cuatro puntos de intersección de elipse y circunferencia: $\frac{(b^2-a^2)^2}{4b^2\alpha^2}y^4 - \frac{4b^2\beta(b^2-a^2)}{4b^2\alpha^2}y^3 + \ldots = 0$. Luego: $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = \frac{4b^2\beta}{b^2-a^2}$. Como $\beta = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $3\beta + y_4 = \frac{4b^2\beta}{b^2-a^2}$. Eliminando y, procediendo de forma similar, se obtiene la siguiente igualdad para las abscisas: $3\alpha + x_4 = \frac{4a^2\alpha}{b^2-a^2}$. Sustituyendo los valores de x_4, y_4 en la ecuación de la cónica, se tiene la ecuación del lugar pedido: $\frac{1}{a^2}\left(\frac{4a^2\alpha}{b^2-a^2} - 3\alpha\right)^2 + \frac{1}{b^2}\left(\frac{4b^2\beta}{b^2-a^2} - 3\beta^2\right)^2 = 1$. O bien, operando y cambiando α, β por x, y, se tiene: $\left(\frac{a^2+3b^2}{a}\right)x^2 + \left(\frac{3a^2+b^2}{b}\right)y^2 = (a^2-b^2)^2$. Se trata de una elipse concéntrica con la dada.

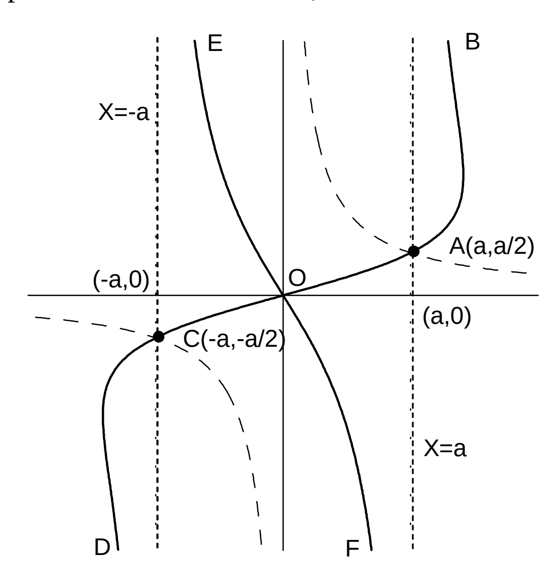
D 83- Hallar la curva inversa de la parábola $y^2 = 2px$, siendo el origen el polo de inversión y siendo $2p$ la potencia de inversión.

Solución: Siendo (α,β) un punto de la curva producto de la inversión, se tiene: $x = \frac{2p\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$, $y = \frac{2p\beta}{\alpha^2+\beta^2}$. Luego: $\frac{4p^2\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2} = 2p\frac{2p\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$. Sustituyendo (α,β) por (x,y), se tiene la ecuación pedida: $x(x^2+y^2) - y^2 = 0$ (cisoide).

D 84- En ejes rectangulares se dan los puntos $A(0,a)$, $B(2a,a)$. Se pide: 1º) Ecuación general de las cónicas de centro O, tangentes a la recta $x = a$, y que cortan a AB en dos puntos conjugados armónicos respecto a A y B. 2º) Lugar geométrico de los focos. 3º) Separar en este lugar, los focos de elipse de los de hipérbola.

Solución: 1º) $AB \equiv y-a=0$. Ecuación de la cónica con centro O y tangente a la recta $x-a=0$: $(x-a)(x+a)+\lambda(y-mx)^2=0$. La recta $y=a$ corta a la cónica en dos puntos de abscisas α y β, conjugados armónicos de los puntos de abscisas 0 y $2a$, luego: $(0,2a,\alpha,\beta)=-1$. De donde: $\alpha\beta-a(\alpha+\beta)=0$. Para $y=a$, se tiene: $x^2(1+\lambda m^2)-2\lambda amx+a^2(\lambda-1)=0$. Luego: $\alpha+\beta=\dfrac{2\lambda am}{1+\lambda m^2}$, $\alpha\beta=\dfrac{a^2(\lambda-1)}{1+\lambda m^2}$. Por tanto: $\dfrac{a^2(\lambda-1)}{1+\lambda m^2}-\dfrac{a2\lambda am}{1+\lambda m^2}=0$. De donde: $\lambda=\dfrac{1}{1-2m}$, quedando la ecuación general de la cónica: $(m-1)^2x^2+y^2-2mxy+a^2(2m-1)=0$. 2º) La ecuación tangencial de la cónica es: $\begin{vmatrix}(m-1)^2 & -m & 0 & u\\ -m & 1 & 0 & v\\ 0 & 0 & a^2(2m-1) & w\\ u & v & w & 0\end{vmatrix}=0$. De donde: $a^2u^2+a^2(m-1)^2v^2+2a^2muv+w^2=0$.

Sustituyendo: $u=1$, $v=i$, $w=-z=-x-iy$, siendo (x,y) las coordenadas del foco, se tienen las ecuaciones: $x^2-y^2=a^2m(2-m)$, $xy=ma^2$. Eliminando m, se tiene la ecuación del lugar pedido: $x^2y^2+a^2(x^2-y^2-2xy)=0$. 3º) En la ecuación de la cónica, $A_{33}=1-2m$, $A=-a^2(2m-1)^2$. Luego para $m=\frac{1}{2}$, la cónica es parábola (degenerada en una recta doble); para $m>\frac{1}{2}$, es hipérbola; y para $m<\frac{1}{2}$, es elipse. 4º) En el siguiente dibujo se presenta en línea llena el lugar geométrico de los focos, que está formado por dos ramas: BOD y EOF. Se dibuja en trazos la hipérbola: $xy=ma^2=\frac{a^2}{2}$, que corresponde a los focos de parábola, separando los de elipse ($m<\frac{1}{2}$) de los de hipérbola ($m>\frac{1}{2}$). Y se presenta en puntos las rectas $x=\pm a$ que son las asíntotas del lugar geométrico. En los puntos A y C, intersecciones de dichas asíntotas con la hipérbola, los focos son de parábola (degenerada en una recta doble). En los arcos AB y CD, correspondientes a la rama BOD, los focos son de hipérbola. En la rama EOF y en el arco AOC, correspondiente a la rama BOD, los focos son de elipse.



D 85- Dado el rectángulo $OABC$, en el que $OA=a$, $OB=b$, tomando como ejes coordenados los lados OA y OB, se pide: 1º) Ecuación de las cónicas que pasan por O, A, B, de forma que la polar de C sea paralela a AB. 2º) Lugar geométrico de los centros de estas cónicas, separando los correspondientes a elipses de los correspondientes a hipérbolas. 3º) Siendo Γ una de estas cónicas, hallar la ecuación de su hipérbola de Apolonio correspondiente al punto C. 4º) Lugar geométrico de los centros de estas hipérbolas de Apolonio.

Solución: 1º) La ecuación general de las cónicas circunscritas al triángulo OAB, es: $x^2+2\lambda xy+\mu y^2-$ $-ax-\mu by=0$. La ecuación de la polar del punto $C(a,b)$, es: $(2a+2\lambda b-a)x+(2\lambda a+2\mu b-\mu b)y+$ $+(-a^2-\mu b^2)=0$. Luego: $\dfrac{-a-2\lambda b}{2\lambda a+\mu b}=\dfrac{-b}{a}$. De donde: $\mu=\dfrac{a^2}{b^2}$. Por tanto, la ecuación de las cónicas es la siguiente: $f(x,y)\equiv b^2x^2+2\lambda xy+a^2y^2-ab^2x-a^2by=0$. Como $A_{33}=\begin{vmatrix}b^2 & \lambda\\ \lambda & a^2\end{vmatrix}=a^2b^2-\lambda^2$, para

$\lambda < ab$ y $\lambda > ab$, son hipérbolas; para $\lambda = \pm ab$, son parábolas; para $-ab < \lambda < ab$, son elipses. 2º) Como $f'_x = 2b^2x + 2\lambda y - ab^2 = 0$, $f'_y = 2\lambda x + 2a^2y - a^2b = 0$, se obtiene que: $x = \dfrac{a^2b}{2(ab+\lambda)}$, $y = \dfrac{ab^2}{2(ab+\lambda)}$, de donde: $bx - ay = 0$, que es la ecuación del lugar pedido. Este lugar es la recta OC. Su punto $D\left(\dfrac{a}{4}, \dfrac{b}{4}\right)$ y su punto impropio, son centros de parábola. La semirrecta comprendida entre D y el infinito, y que contiene a C, corresponde a centros de elipse. La otra semirrecta que contiene a O, corresponde a centros de hipérbola. 3º) La ecuación de la hipérbola de Apolonio, correspondiente al punto $C(a,b)$, de las cónicas $f(x,y) = 0$, es: $\varphi(x,y) = (x-a)f'_y - (y-b)f'_x = 0$, es decir: $\varphi(x,y) = 2\lambda x^2 + 2(a^2-b^2)xy - 2\lambda y^2 - (a^2b + 2a\lambda - 2b^3)x + (ab^2 + 2b\lambda - 2a^3)y + ab(a^2-b^2) = 0$. 4º) Las derivadas parciales, son: $\varphi'_x = 4\lambda x + 2(a^2-b^2)y - (a^2b + 2a\lambda - 2b^3) = 0$, $\varphi'_y = 2(a^2-b^2)x - 4\lambda y + ab^2 + 2b\lambda - 2a^3 = 0$. Eliminando λ, se tiene el lugar pedido: $x^2 + y^2 - \dfrac{a(3a^2-2b^2)x}{2(a^2-b^2)} + \dfrac{b(3b^2-2a^2)y}{2(a^2-b^2)} + \dfrac{a^2+b^2}{2} = 0$.

D 86- Por un foco de una cónica se trazan n radios vectores que forman entre dos consecutivos, un ángulo $\dfrac{2\pi}{n}$. Hallar el límite de la media armónica de estos radios vectores cuando $n \to \infty$.

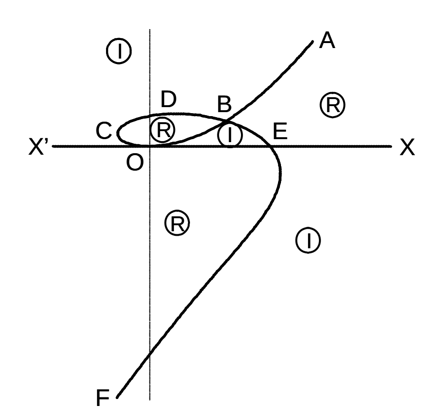
Solución: Sea la ecuación de la cónica: $\rho = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$. Según lo indicado en el enunciado, se tiene:

$$\frac{1}{n}\sum\frac{1}{\rho} = \frac{1}{n}\left(\frac{1+e\cos 0^\circ}{p} + \frac{1+e\cos\frac{2\pi}{n}}{p} + \frac{1+e\cos\frac{4\pi}{n}}{p} + \ldots + \frac{1+e\cos\frac{(n-1)2\pi}{n}}{p}\right) =$$

$$= \frac{1}{np}\left(n + e\sum_{i=0}^{n-1}\cos\frac{2\pi i}{n}\right).$$ Luego $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{np}\left(n + e\sum\limits_{i=0}^{n-1}\cos\dfrac{2\pi i}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{np} = \dfrac{1}{p}$. El límite pedido es el inverso del parámetro p de la cónica ($p = \dfrac{b^2}{a}$, siendo a y b los semiejes de la cónica).

D 87- Se da la recta $r \equiv 4x + 3y - 1 = 0$. Se pide: 1º) Ecuación general de las cónicas tangentes al eje OX en O, y cuya directriz es la recta dada. Se dará esta ecuación en función racional de un parámetro. 2º) Por todo punto del plano pasan dos cónicas con las características definidas. Hallar la curva que separa las regiones donde las dos cónicas son reales, de donde son imaginarias.

Solución: 1º) Siendo (λ,μ) las coordenadas del foco correspondiente a la directriz dada, se tiene: $(x-\lambda)^2 + (y-\mu)^2 = \nu^2(4x+3y-1)^2$. Obligando a que pase por O donde es tangente a OX, se tiene: $\lambda^2 + \mu^2 = \nu^2$, $\lambda = 4\nu^2$. Haciendo $\dfrac{\lambda}{\mu} = t$, $\lambda = \dfrac{t^2}{4(1+t^2)}$, $\mu = \dfrac{t}{4(1+t^2)}$, $\nu^2 = \dfrac{t^2}{16(1+t^2)}$, se tiene la ecuación pedida: $16x^2 + (16+7t^2)y^2 - 24t^2xy - (8t - 6t^2)y = 0$. 2º) Ordenando esta ecuación según las potencias de t, se tiene: $t^2(7y^2 - 24xy + 6y) - 8yt + 16(x^2+y^2) = 0$. Esta ecuación es de segundo grado en t, luego por cada punto del plano pasan dos cónicas. El discriminante de esta ecuación es $\Delta = 16y[y - (7y - 24x + 6)(x^2+y^2)]$. En el siguiente dibujo se representa la curva $\Delta = 0$, que incluye el eje $y = 0$, y la curva $ABOCDBEF$.

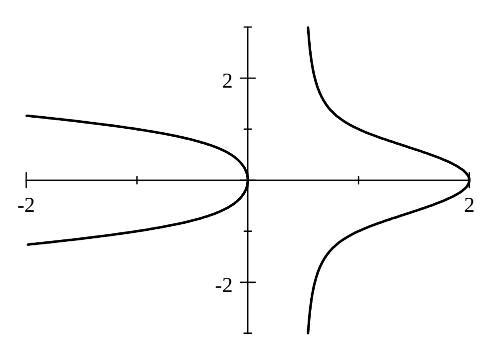


Las cónicas son reales para $\Delta \geq 0$, es decir: a) por encima del eje XX': dentro del bucle $BOCDB$, y en el espacio $ABEX$ entre la rama superior, la inferior y el eje de abscisas. b) por debajo del eje XX': en el espacio $X'OEF$ entre este eje y a la izquierda de la rama inferior. c) en la curva y en el eje de abscisas, hay una sola cónica, que es real. En los demás casos, las cónicas son imaginarias.

Nota: $B(0.16, 0.12)$, $D\left(0, \frac{1}{7}\right)$, $O(0,0)$, $E\left(\frac{1}{4}, 0\right)$, $F(0,-1)$

D 88- Dados dos ejes rectangulares y los puntos $A(a,a)$ y $B(a,-a)$, se consideran las cónicas circunscritas al triángulo OAB, tales que la normal en A, la normal en B y la tangente en O, sean concurrentes. Hallar el lugar geométrico del punto de encuentro.

Solución: Sea $y - mx = 0$, la tangente en O. La ecuación de la cónica circunscrita al triángulo OAB, es: $(y-x)(y+x) + \lambda(x-a)(y-mx) = 0$. Luego derivando, se tiene: $y' = \dfrac{-2x + \lambda(y-mx) - m\lambda(x-a)}{2y + \lambda(x-a)}$. La normal en A es: $y - a = \dfrac{-2(x-a)}{2-\lambda+\lambda m}$. La normal en B es: $y + a = \dfrac{2(x-a)}{2+\lambda+\lambda m}$. Eliminando λ y m, se tiene la ecuación del lugar pedido: $(y-x)(y-a)(x-y-2a) + (x+y)(y+a)(x+y-2a) = 0$. Simplificando esta ecuación, se tiene: $2xy^2 + ax^2 - ay^2 - 2a^2x = 0$. Se ha dibujado esta curva para $a = 1$.

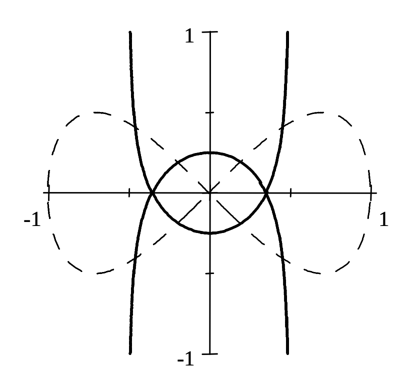


D 89- En ejes rectangulares se da la circunferencia $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ y los puntos $B(0,b)$ y $B'(0,-b)$. Se toma un punto M sobre la circunferencia, y se traza BM, que corta a AX en A. Se pide 1º) Lugar geométrico del punto M' de intersección de OM y $B'A$. 2º) Al variar b, por cada punto del plano pasan dos cónicas, cuya naturaleza y realidad se estudiarán.

Solución: 1º) $M(R\sin\theta, R\cos\theta)$, $BM \equiv \dfrac{x}{R\sin\theta} = \dfrac{y-b}{R\cos\theta - b}$, $A\left(\dfrac{-bR\sin\theta}{R\cos\theta - b}, 0\right)$. La ecuación de la recta AB' es: $(R\cos\theta - b)x + yR\sin\theta + bR\sin\theta = 0$. La ecuación de la recta OM es: $x\cos\theta - y\sin\theta = 0$. Eliminando θ entre estas dos ecuaciones, se tiene la ecuación del lugar pedido del punto M: $b^2x^2 + (b^2 - 4R^2)y^2 - 4bR^2y - b^2R^2 = 0$. 2º) Ordenando esta ecuación según potencias de b, se tiene: $(x^2 + y^2 - R^2)b^2 - 4R^2yb - 4R^2y^2 = 0$, cuyo discriminante es: $4R^2y^2(x^2 + y^2)$, que es siempre > 0, salvo para $y = 0$, que es nulo. Luego por todo punto del plano pasan dos cónicas reales, salvo para los puntos del eje OX, para los que hay una cónica real doble. Como $A_{33} = b^2(b^2 - 4R^2)$, para $|b| > 2R$, las dos cónicas son elipses. Para $|b| < 2R$, las dos cónicas son hipérbolas. Para $|b| = 2R$ son parábolas. Y para $b = 0$, es una recta doble ($y = 0$).

D 90- Se dan dos ejes rectangulares y el punto $A(\alpha,\beta)$. Por un punto B del eje OX, se traza una perpendicular a BA. Sea M el punto de encuentro de esta perpendicular con la perpendicular a OX, trazada por el punto medio de OB. Se pide: 1º) Lugar geométrico de M. 2º) Si A se desplaza sobre $x^2 + y^2 - R^2 = 0$, hallar la envolvente del lugar hallado. 3º) En las mismas condiciones, hallar el lugar de vértices y focos.

Solución: 1º) Sea $B(2\lambda, 0)$. La ecuación de la perpendicular por B a BA, es: $y = \dfrac{2\lambda - \alpha}{\beta}(x - 2\lambda)$. La ecuación de la perpendicular a OX por $(\lambda, 0)$, es: $x - \lambda = 0$. La ecuación del lugar pedido es: $2x^2 - \alpha x + \beta y = 0$. 2º) $\alpha^2 + \beta^2 = R^2$. Derivando en esta ecuación y en la anterior, siendo por ejemplo β función de α, se tiene: $-x + y\beta' = 0$, $2\alpha + 2\beta\beta' = 0$, $\beta x + \alpha y = 0$, $\alpha = \dfrac{2x^3}{x^2+y^2}$, $\beta = \dfrac{-2x^2y}{x^2+y^2}$. Sustituyendo estos valores en la ecuación del círculo, se tiene la ecuación de la envolvente del lugar de M: $4x^4 - R^2(x^2 + y^2) = 0$. 3º) Las coordenadas del vértice son: $x = \dfrac{\alpha}{4}$, $y = \dfrac{\alpha^2}{8\beta}$. Lluego se tiene que: $\alpha = 4x$, $\beta = \dfrac{2x^2}{y}$. Sustituyendo estos valores en la ecuación del círculo, se tiene el lugar de los vértices: $4x^4 + 16x^2y^2 - R^2y^2 = 0$. Las coordenadas de los focos son: $x = \dfrac{\alpha}{4}$, $y = \dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{8\beta}$. Luego se tiene que: $\alpha = 4x$, $\beta = -4\left(y \pm \sqrt{x^2 + y^2}\right)$, que sustituidos en la citada ecuación, se obtiene el lugar de los focos: $1024x^2(x^2 + y^2) - 64R^2(x^2 + y^2) + R^4 = 0$. 4º) Se ha dibujado en línea gruesa este lugar para el caso $R = 2$, y en línea de trazos la envolvente del punto 2º, también para $R = 2$.



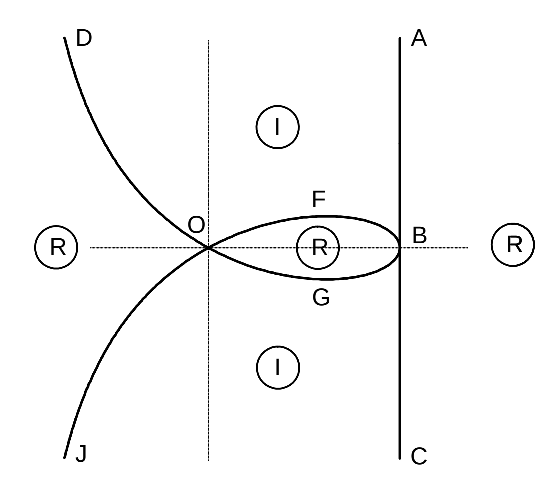
D 91- Dadas las rectas $Q \equiv x - a = 0$, $R \equiv y - b = 0$, formar la ecuación general de las cónicas de centro $(0,0)$ de las que son normales las rectas dadas, Q y R. Demostrar que por todo punto del plano pasan dos elipses y una hipérbola de la familia.

Solución: La ecuación general de las cónicas de centro $(0,0)$, es: $Ax^2 + By^2 + 2Cxy + D = 0$. La pendiente de las normales viene dada por: $\dfrac{Cx + By}{Ax + Cy}$. La pendiente de la recta Q es ∞, luego: $Ax + Cy = 0$, por lo que la ordenada del punto de la cónica en el que Q es la normal, es: $\dfrac{-Aa}{C}$. Luego, como la cónica pasa por $\left(a, \dfrac{-Aa}{C}\right)$, se tiene: $Aa^2 - \dfrac{BA^2a^2}{C^2} + 2Ca\dfrac{-Aa}{C} + D = Aa^2\left(\dfrac{AB}{C^2} - 1\right) + D = 0$. Procediendo de la misma forma con la normal R, se tiene que la pendiente de esta recta es 0, luego $Cx + By = 0$, por lo que el punto de la cónica en el que R es la normal, es $\left(\dfrac{-Bb}{C}, b\right)$, teniéndose: $Bb^2\left(\dfrac{AB}{C^2} - 1\right) + D = 0$. Haciendo el cambio: $A = b^2\lambda$, $B = a^2\lambda$, se tiene: $D = a^2b^2\lambda\left(1 - \dfrac{a^2b^2\lambda^2}{C^2}\right)$. La ecuación pedida es: $b^2x^2 + a^2y^2 + 2\mu xy + a^2b^2\left(1 - \dfrac{a^2b^2}{\mu^2}\right) = 0$. Ordenando esta ecuación según potencias de μ, se tiene: $f(\mu) = 2xy\mu^3 + (b^2x^2 + a^2y^2 + a^2b^2)\mu^2 - a^4b^4 = 0$, por lo que por cada punto del plano pasan tres cónicas. Estudiando las raíces de $f(\mu) = 0$, se tiene: para $\mu = -\infty$, $f(\mu) < 0$; para $\mu = -ab$, $f(\mu) = a^2b^2(bx - ay)^2 > 0$; para $\mu = 0$, $f(\mu) = -a^4b^4 < 0$; para $\mu = ab$, $f(\mu) = a^2b^2(bx + ay)^2 > 0$; para $\mu = +\infty$, $f(\mu) > 0$. Luego las raíces de $f(\mu) = 0$, se encuentran en los intervalos: $-\infty < \mu_1 < -ab$, $-ab < \mu_2 < 0$, $0 < \mu_3 < ab$. Como $A_{33} = a^2b^2 - \mu^2$, se tiene: para μ_1, $A_{33} < 0$, hipérbola; para μ_2, $A_{33} > 0$, elipse; para μ_3, $A_{33} > 0$, elipse. Luego por cada punto del plano pasan dos elipses y una hipérbola de la familia. Como casos particulares, se tiene: para $\mu = ab$, la cónica correspondiente degenera en la recta doble: $bx + ay = 0$; para $\mu = -ab$, la cónica correspondiente degenera en la recta doble: $bx - ay = 0$.

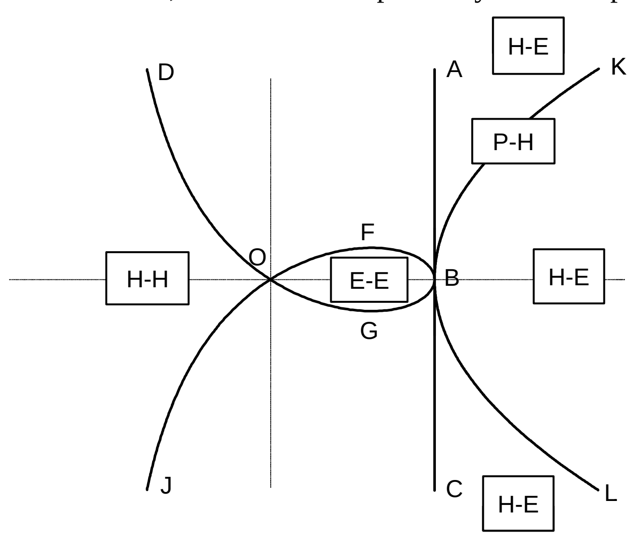
D 92- En ejes rectangulares se da el punto $A(a,0)$. Se pide: 1º) Hallar la ecuación general de las cónicas de directriz el eje OY y vértice A. 2º) Por todo punto M del plano pasan dos cónicas que satisfacen esas condiciones. Determinar la región del plano en la que las dos cónicas son reales. Hallar la naturaleza de las dos cónicas para cada punto del plano.

Solución: 1º) Vértice $(a,0)$; eje: $y = 0$; directriz: $x = 0$; foco $(\varphi,0)$; segundo vértice $(\mu,0)$. Ecuación de las cónicas bitangentes: $(x - a)(x - \mu) = \lambda y^2$, es decir: $x^2 - \lambda y^2 - (a + \mu)x + a\mu = 0$. Ecuación focal de las cónicas: $(x - \varphi)^2 + y^2 = ex^2$, es decir: $(1 - e)x^2 + y^2 - 2\varphi x + \varphi^2 = 0$. Identificando ambas ecuaciones: $\dfrac{1}{1 - e} = \dfrac{-\lambda}{1} = \dfrac{a + \mu}{2\varphi} = \dfrac{a\mu}{\varphi^2}$. De donde: $\mu = \dfrac{-a\varphi}{2a + \varphi}$. Por tanto, la ecuación pedida es la siguiente: $(2a + \varphi)\varphi x^2 - a^2y^2 - 2a^2\varphi x - \varphi^2a^2 = 0$. 2º) Ordenando la ecuación según las potencias de φ, se tiene: $(x^2 - a^2)\varphi^2 + 2ax(x - a)\varphi - a^2y^2 = 0$. El discriminante Δ de esta ecuación en φ, es el siguiente: $\Delta = a^2x^2(x - a)^2 + a^2y^2(x^2 - a^2)$. En el dibujo se ha representado la curva $\Delta = 0$, que incluye la recta: $x - a = 0$ y la curva *DOGBFOJ*. Las cónicas son reales en el espacio a la derecha de la recta $ABC \equiv x - a = 0$, en el interior del bucle *OFBGO*, y en el espacio a la izquierda de las ramas asintóticas *OD* y *OJ* de la curva, así como en el contorno de $\Delta = 0$.

Nota: $O(0,0)$; $B(a,0)$; la asíntota de la curva es: $x + a = 0$.

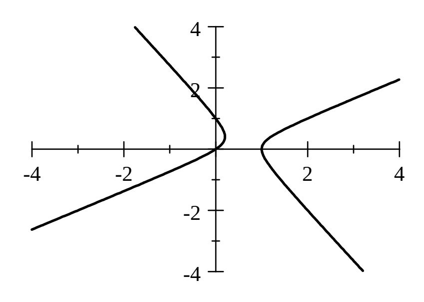


Los invariantes de la ecuación de las cónicas, son: $A_{33} = -a^2\varphi(2a+\varphi)$, $A = a^4\varphi^2(\varphi+a)^2$, $-a_{22}A = a^6\varphi^2(\varphi+a)^2$. Para los puntos situados en el espacio a la izquierda de las ramas asintóticas *DO* y *OJ*, así como en su contorno, las dos cónicas son hipérbolas. En el interior del bucle *OFBGO*, así como en su contorno, las dos cónicas son elipses. Para $A_{33} = 0$, se tiene $\varphi = -2a$, obteniéndose la parábola $y^2 - 4ax + 4a^2 = 0$, curva *KBL*, en cuyo contorno una cónica es parábola y la otra hipérbola. En el resto del espacio a la derecha de la recta *ABC*, una cónica es hipérbola y la otra elipse.



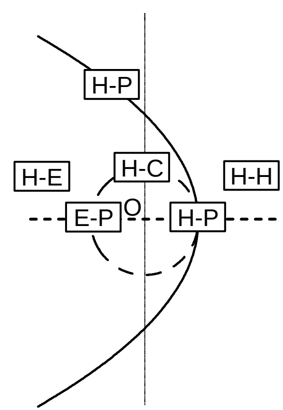
D 93- Hallar el lugar geométrico de los centros de las cónicas osculatrices a un círculo dado en un punto dado *A*, siendo sus ejes paralelos a dos direcciones dadas.

Solución: Sea la circunferencia: $x^2+y^2-R^2 = 0$, y $A(R,0)$. La ecuación general de las cónicas, es: $x^2+y^2-R^2+(x-R)[\lambda(x-R)+2\mu y] = (1+\lambda)x^2+y^2+2\mu xy-2\lambda Rx-2\mu Ry+R^2(\lambda-1) = 0$. Siendo la ecuación de los coeficientes angulares de los ejes: $m^2+\dfrac{a_{11}-a_{22}}{a_{12}}m-1 = 0$, se tiene que: $\dfrac{a_{11}-a_{22}}{a_{12}} = k$, donde k es un número dado. Como $\dfrac{a_{11}-a_{22}}{a_{12}} = \dfrac{\lambda}{\mu}$, se tiene $\lambda = k\mu$. Obteniendo las derivadas: $f'_x = x(1+k\mu)+\mu y-Rk\mu = 0$, $f'_y = y+\mu x-\mu R = 0$, se tiene: $\mu = \dfrac{y}{R-x}$, que sustituido en f'_x da la ecuación pedida: $x^2-y^2-kxy-Rx+Rky = 0$ (hipérbola equilátera). Se ha dibujado este lugar para el caso $R = k = 1$.



D 94- En ejes rectangulares se dan los puntos $F(0,0)$ y $A(a,0)$, siendo $a > 1$. Se pide: 1º) Ecuación general de las cónicas de foco F, siendo A el vértice más cercano a F, situado en el eje focal. 2º) Estudiar la naturaleza de dichas cónicas. 3º) Si las cónicas pasan por un punto dado $P(\alpha,\beta)$, estudiar el número y la naturaleza de las cónicas obtenidas según la posición de P.

Solución: 1º) Sea B el punto en que la directriz correspondiente al foco F corta al eje FA. Se tiene que la excentricidad es: $e = \frac{AF}{AB}$, luego $AB = \frac{a}{e}$. Por tanto, la ecuación de la directriz es: $x = a + \frac{a}{e}$, siendo la ecuación focal de la cónica: $\sqrt{x^2+y^2} = e\left(x - a - \frac{a}{e}\right)$. O bien, operando, se tiene que: $(1-e^2)x^2 + y^2 + 2ae(e+1)x - a^2e^2 - 2a^2e - a^2 = 0$, que es la ecuación pedida. 2º) $A_{33} = 1 - e^2$. Para $e^2 > 1$, hipérbola; para $e^2 = 1$, parábola; para $e^2 < 1$, elipse. 3º) Ordenando la ecuación según potencias de e, se tiene: $(x-a)^2e^2 + 2a(a-x)e - x^2 - y^2 + a^2 = 0$, de donde $e = \frac{a \pm \sqrt{x^2+y^2}}{x-a}$. Luego para cada punto dado $P(\alpha,\beta)$, hay dos valores de e, y por tanto, por dicho punto pasan dos cónicas.Para $e = 1$, se tiene: $y^2 + 4ax - 4a^2 = 0$, que es una parábola con la rama abierta hacia la izquierda, que corta al eje OX en $(a,0)$, y al eje OY en $(0,2a)$ y $(0,-2a)$. Por los puntos del plano situados en el exterior de la parábola, pasan dos hipérbolas $(e^2 > 1)$. Por los situados en su interior, pasan una elipse y una hipérbola $\left(e^2 < 1 \text{ y } e^2 > 1, \text{respectivamente}\right)$. Por los puntos situados sobre la citada parábola, pasan una parábola y una hipérbola $\left(e^2 = 1 \text{ y } e^2 > 1, \text{respectivamente}\right)$. Por los puntos situados sobre el eje OX $(y = 0)$, pasan una hipérbola y una parábola si $x > 0$, y una elipse y una parábola si $x < 0$. Al punto $(0,0)$, le corresponde la recta doble $y = 0$. Para los puntos $x^2 + y^2 = a^2$, la elipse es una circunferencia $(e = 0)$.



D 95- Desde un punto P se trazan las tangentes a una cónica dada. La cuerda que une los dos puntos de contacto se ve desde el foco bajo un ángulo dado θ. Hallar el lugar geométrico de P.

Solución: Tomando como origen el foco de la cónica, la ecuación general de las cónicas, es: $x^2 + y^2 = (\lambda x + \mu)^2$, es decir: $(1-\lambda^2)x^2 + y^2 - 2\lambda\mu x - \mu^2 = 0$, donde λ y μ están dadas. Siendo $P(\alpha,\beta)$, la ecuación de su polar es: $[(1-\lambda^2)\alpha - \lambda\mu]x + \beta y - \lambda\mu\alpha - \mu^2 = 0$. La ecuación del conjunto de las dos rectas trazadas desde el origen a los puntos de intersección de la cónica y la polar, es: $\left[(\lambda\alpha+\mu)^2 - \beta^2\right]y^2 + 2\alpha\beta xy + \left[(\lambda\alpha+\mu)^2 - \alpha^2\right]x^2 = 0$. La tangente del ángulo dado θ, en función de las pendientes m_1 y m_2 de las dos rectas que lo forman, es: $\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$. Por tanto se tiene que: $\tan^2\theta = \frac{(m_1-m_2)^2}{(1+m_1m_2)^2} = \frac{(m_1+m_2)^2 - 4m_1m_2}{(1+m_1m_2)^2}$. Y como de la ecuación anterior se tiene que: $m_1 + m_2 = \frac{-2\alpha\beta}{(\lambda\alpha+\mu)^2 - \beta^2}$, $m_1m_2 = \frac{(\lambda\alpha+\mu)^2 - \alpha^2}{(\lambda\alpha+\mu)^2 - \beta^2}$, introduciendo estos valores en la fórmula de $\tan^2\theta$, y operando, se tiene la ecuación del lugar pedido: $(x^2+y^2)(1 \pm \cos\theta) - 2(\lambda x + \mu)^2 = 0$, que corresponde a dos cónicas homofocales con la dada.

D 96- Demostrar que si un triángulo es autopolar respecto a la cónica de ecuación $f = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$, y está inscrito en una segunda cónica de ecuación $\varphi = b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + 2b_{12}xy + 2b_{13}x + 2b_{23}y + b_{33} = 0$, el invariante T_{Ab} del haz de cónicas, es nulo. $(T_{Ab} = A_{11}b_{11} + A_{22}b_{22} + A_{33}b_{33} + 2A_{12}b_{12} + 2A_{13}b_{13} + 2A_{23}b_{23})$.

Solución: Se considera un sistema de coordenadas trilineales cuyo triángulo fundamental es el dado. La polar de $(0,0)$ respecto de f es: $2a_{13}x + 2a_{23}y + 2a_{33}z = 0$, pero tiene que ser: $a_{13} = 0$ y $a_{23} = 0$, ya que la polar de dicho punto es $z = 0$. Procediendo de la misma forma con los otros dos vértices, $(0,1)$ y $(1,0)$, se obtiene: $a_{13} = a_{23} = a_{12} = 0$. Luego, $f = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 = 0$. Como $(0,0)$ está en φ, $b_{33}z^2 = 0$, luego $b_{33} = 0$. Procediendo de la misma forma con los otros dos vértices, se tiene: $b_{11} = b_{22} = b_{33} = 0$.

Luego la ecuación de φ, es: $2b_{12}xy + 2b_{13}xz + 2b_{23}yz = 0$. Por tanto, el valor del invariante T_{Ab}, es el siguiente: $T_{Ab} = 2b_{12}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} + 2b_{13}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{22} & 0 \end{vmatrix} + 2b_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

D 97- Demostrar que si hay un triángulo circunscrito a la cónica de ecuación $f = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = 0$, y es autopolar respecto a la cónica de ecuación $\varphi = b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + 2b_{12}xy + 2b_{13}xz + 2b_{23}yz + b_{33}z^2 = 0$, el invariante T_{Ab} del haz de cónicas, es nulo.

Solución: Operando en un sistema trilineal en el que el triángulo dado es el fundamental, se tiene (ver el problema D 96) que las ecuaciones tangenciales de las dos cónicas, son: $f = 2A_{12}uv + 2A_{13}uw + 2A_{23}vw = 0$, $\varphi = B_{11}u^2 + B_{22}v^2 + B_{33}w^2 = 0$. De donde se obtiene que: $T_{Ab} = 2A_{12}b_{12} + 2A_{13}b_{13} + 2A_{23}b_{23}$. Y como $B' = \begin{vmatrix} B_{11} & 0 & 0 \\ 0 & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} \end{vmatrix} = B^2$, y siendo B'_{ij} el adjunto de B_{ij} en B', se tiene que: $B'_{ij} = B_{ij} \cdot B$. Luego, $b_{12} = \dfrac{B'_{12}}{B} = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ B_{22} & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{B_{11}B_{22}B_{33}}} = 0$. Análogamente, $b_{13} = b_{23} = 0$. Por tanto $T_{Ab} = 0$.

D 98- Demostrar que si la cónica $f = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = 0$, degenera en dos rectas que son conjugadas respecto a la cónica $\varphi = b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + 2b_{12}xy + 2b_{13}xz + {}$ ${}+2b_{23}yz + b_{33}z^2 = 0$, el invariante del haz de cónicas, $T_{aB} = a_{11}B_{11} + a_{22}B_{22} + a_{33}B_{33} + 2a_{12}B_{12} + {}$ ${}+2a_{13}B_{13} + 2a_{23}B_{23}$, es nulo.

Solución: Se considera un sistema cartesiano tal que sus ejes sean las rectas en que degenera la cónica $f = 0$. Por tanto, en este caso, se tiene que: $f \equiv xy = 0$. Para que las rectas $x = 0$, $y = 0$, sean conjugadas respecto a la cónica $\varphi = 0$, tiene que verificarse que: $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 1 \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} & 0 \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$. Luego se tiene que: $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{23} \\ b_{13} & b_{33} \end{vmatrix} = B_{12} = 0$. Por tanto: $T_{aB} = 2a_{12}B_{12} = 0$.

D 99- Dada la cónica $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$, se consideran los triángulos autopolares con respecto a ella, tales que el radio de su círculo circunscrito sea R. Hallar el lugar geométrico de los centros de dichos círculos.

Solución: Sea uno de los círculos: $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - R^2 = 0$. Como el invariante T_{Ab} del haz, es nulo, se tiene: $A_{11} + A_{22} + A_{33}(\alpha^2 + \beta^2 - R^2) - 2A_{13}\alpha - 2A_{23}\beta = 0$. Luego el lugar pedido es: $A_{33}x^2 + A_{33}y^2 - 2A_{13}x - 2A_{23}y + A_{11} + A_{22} - A_{33}R^2 = 0$.

D 100- Hallar el lugar geométrico de los vértices de los ángulos rectos circunscritos a una cónica.

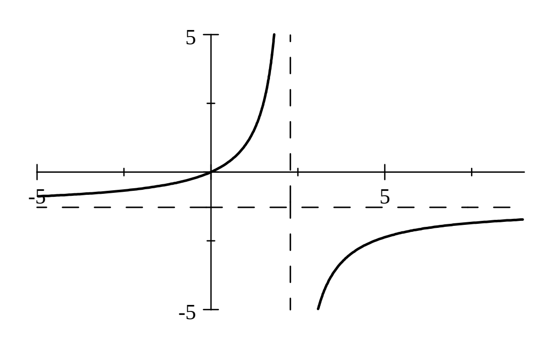
Solución: Se tiene en cuenta que si las rectas isótropas trazadas en un punto, son conjugadas con relación a una cónica, las tangentes a la cónica trazadas desde ese punto a la cónica, son perpendiculares. En efecto, sean m_1 y m_2 los coeficientes angulares de dichas tangentes. Ha de cumplirse que: $(m_1, m_2, i, -i) = -1$. Desarrollando esta igualdad: $\dfrac{i-m_1}{-i-m_1} \div \dfrac{i-m_2}{-i-m_2} = -1$. Operando, se tiene que: $m_1m_2 = -1$. La ecuación de las rectas isótropas que pasan por (α, β), es: $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = 0$. Siendo la cónica: $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$, se aplica la conclusión demostrada en el problema D 98, por la que si una cónica degenera en dos rectas que son conjugadas respecto a una segunda cónica, el invariante $T_{aB} = 0$. Por tanto, $T_{aB} = A_{11} + A_{22} + (\alpha^2 + \beta^2)A_{33} - 2A_{13}\alpha - 2A_{23}\beta = 0$. Luego el lugar pedido es: $A_{33}x^2 + A_{33}y^2 - 2A_{13}x - 2A_{23}y + A_{11} + A_{22} = 0$, que es un círculo, salvo para el caso de la parábola en el que al ser $A_{33} = 0$, el lugar es una recta. El círculo se llama ortóptico o círculo de Monge. En el caso de la parábola, la recta es su directriz.

D 101- Dada la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, hallar las ecuaciones de las normales trazadas desde el punto $(3,0)$.

Solución: La hipérbola de Apolonio es: $(25-16)xy+16\beta x-25\alpha y=0$. Para $\alpha=3$, $\beta=0$, se tiene: $y(3x-25)=0$, es decir: $y=0$, $x=\frac{25}{3}$. Para $y=0$, se tienen las abscisas $x=\pm\sqrt{25}=\pm 5$. Para $x=\frac{25}{3}$, se tienen las ordenadas $y=\pm\frac{16i}{3}$. Luego los pies de las normales son: $(5,0)$, $(-5,0)$, $\left(\frac{25}{3},\frac{16}{3}i\right)$, $\left(\frac{25}{3},\frac{-16}{3}i\right)$. Las ecuaciones de las normales trazadas desde $(3,0)$, son: $y=0$ (doble), $y=\pm i(x-3)$.

D 102- Dada la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, se pide: 1º) Lugar geométrico de los puntos de intersección de un diámetro variable con la perpendicular trazada por un punto fijo (α,β), sobre el diámetro conjugado de aquel. 2º) Naturaleza y dibujo del lugar, para $a=4$, $b=3$, $\alpha=\beta=1$.

Solución: 1º) Sea el diámetro variable: $y=mx$, y su conjugado: $y=\frac{-b^2x}{a^2m}$. La perpendicular por (α,β), es: $y-\beta=\frac{a^2m}{b^2}(x-\alpha)$. Sustituyendo $m=\frac{y}{x}$, se tiene la ecuación del lugar geométrico pedido: $(a^2-b^2)xy+\beta b^2x-\alpha a^2y=0$. 2º) Como $A_{33}=-\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2<0$, se trata de una hipérbola, cuya ecuación para los valores dados, es: $7xy+9x-16y=0$. Su centro es $\left(\frac{16}{7},\frac{-9}{7}\right)$, pasa por $(0,0)$, y sus asíntotas son: $x=\frac{16}{7}$, $y=\frac{-9}{7}$. El dibujo se refiere a esta hipérbola y sus asíntotas.



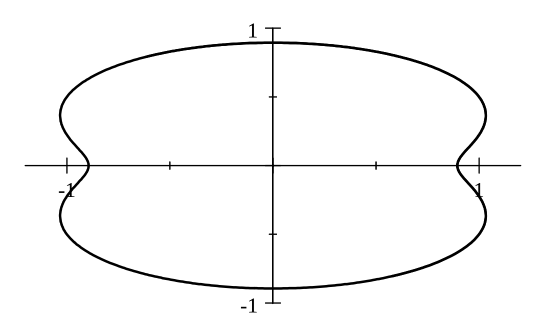
D 103- Dada la elipse canónica, hallar las coordenadas de los extremos de un diámetro que sea visto desde un extremo de su diámetro conjugado, bajo un ángulo recto.

Solución: Sea el diámetro $y=mx$, y su conjugado $y=\frac{-b^2}{ma^2}x$. Los extremos de ambos diámetros son concíclicos, siendo la circunferencia concéntrica con la elipse, por lo que su ecuación es $x^2+y^2-R^2=0$. Los puntos de intersección de ambas curvas, son: $\left(\pm a\sqrt{\frac{R^2-b^2}{a^2-b^2}},\pm b\sqrt{\frac{a^2-R^2}{a^2-b^2}}\right)$. Las pendientes de los correspondientes diámetros, son: $m_1=\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2-R^2}{R^2-b^2}}$, $m_2=-\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2-R^2}{R^2-b^2}}$. Para que sean conjugados: $\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2-R^2}{R^2-b^2}}\cdot\frac{-b}{a}\sqrt{\frac{a^2-R^2}{R^2-b^2}}=\frac{-b^2}{a^2}$. Luego: $R^2=\frac{a^2+b^2}{2}$. Las coordenadas pedidas, son: $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2},\frac{b\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{-a\sqrt{2}}{2},\frac{-b\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{-a\sqrt{2}}{2},\frac{b\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2},\frac{-b\sqrt{2}}{2}\right)$.

D 104- Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de todas las cuerdas de la elipse que son vistas desde el centro de la elipse, bajo un ángulo recto.

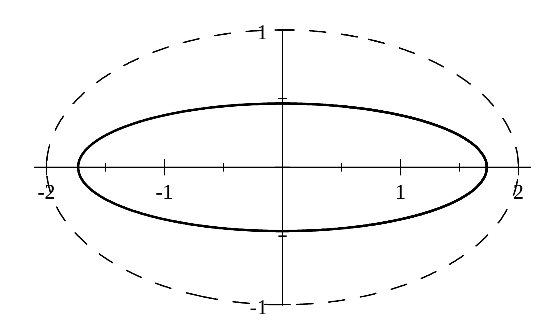
Solución: Sea la elipse, en coordenadas homogéneas, $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2z^2=0$, y sea $(\alpha,\beta,1)$ el punto medio de las cuerdas. La ecuación de una recta que pasa por dicho punto es: $y-mx-\beta z+m\alpha z=0$. Las abscisas de los puntos de corte de esta recta con la elipse, vienen dadas por la ecuación: $b^2x^2+a^2(mx+\beta+m\alpha)^2-a^2b^2=0$. Luego la suma de las abscisas de los puntos de corte, es: $\frac{-2a^2m(\beta-m\alpha)}{b^2+a^2m^2}=2\alpha$, de donde: $m=\frac{-\alpha b^2}{\beta a^2}$. La ecuación del conjunto de las dos rectas que unen el

centro de la elipse con los extremos de la cuerda, se obtiene eliminando z entre la ecuación de la elipse y la ecuación de la cuerda: $z = \frac{y - mx}{\beta - m\alpha}$; de donde: $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2\left(\frac{y - mx}{\beta - m\alpha}\right)^2 = 0$. Operando: $y^2\left[a^2(\beta - m\alpha)^2 - a^2b^2\right] - 2a^2b^2mxy + x^2\left[b^2(\beta - m\alpha)^2 - a^2b^2m^2\right] = 0$. Obligando a que ambas rectas sean perpendiculares: $\frac{b^2(\beta - m\alpha)^2 - a^2b^2m^2}{a^2(\beta - m\alpha)^2 - á^2b^2} = -1$. Sustituyendo en esta ecuación el valor de m, y poniendo (x,y) en vez de (α,β), se obtiene la ecuación del lugar geométrico buscado: $(b^2x^2 + a^2y^2)^2(a^2 + b^2) - a^2b^2(b^4x^2 + a^4y^2) = 0$, cuyo dibujo se incluye seguidamente para el caso $a = 2, b = 1$.



D 105- Hallar el lugar geométrico de los centros de los círculos inscritos en los triángulos que tienen por vértices los dos focos de una elipse y un punto variable de ella.

Solución: Sea la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Los focos son $(\pm c, 0)$. Siendo $P(x_1, y_1)$ un punto de la elipse, los vértices del triángulo son: $F(c,0)$, $F'(-c,0)$, $P(x_1,y_1)$. Sea (α,β) el centro del círculo inscrito en dicho triángulo. Se tiene que: $\alpha = \frac{FF' \cdot x_1 + PF \cdot (-c) + PF' \cdot c}{FF' + PF + PF'} = \frac{2cx_1 - c\left(a - \frac{cx_1}{a}\right) + c\left(a + \frac{cx_1}{a}\right)}{2c + \left(a - \frac{cx_1}{a}\right) + \left(a + \frac{cx_1}{a}\right)}$. Operando, se obtiene: $x_1 = \frac{a\alpha}{c}$. Procediendo de forma análoga con la ordenada β, se tiene que: $\beta = \frac{FF' \cdot y_1 + PF \cdot (0) + PF' \cdot (0)}{FF' + PF + PF'} = \frac{2cy_1}{2c + 2a}$. De donde: $y_1 = \frac{\beta(c + a)}{c}$. Introduciendo estos valores en la ecuación de la elipse, y cambiando (α,β) por (x,y), se tiene la ecuación del lugar pedido: $b^2x^2 + (a + c)^2y^2 - c^2b^2 = 0$. El dibujo se refiere al caso $a = 2$, $b = 1$. Incluye en línea de trazos la elipse dada.



D 106- Demostrar que la recta que une el foco de una cónica con el punto de intersección de una tangente con la directriz de dicho foco, es perpendicular al radio vector del punto de contacto de la tangente.

Solución: Sea la cónica $\frac{1}{\rho} = A\cos\theta + B\sin\theta + C$. La directriz es: $\frac{1}{\rho} = A\cos\theta + B\sin\theta$. La tangente en el punto $\theta = \theta_1$, es: $\frac{1}{\rho} = A\cos\theta + B\sin\theta + C\cos(\theta - \theta_1)$. La intersección de la tangente y la directriz, corresponde a: $A\cos\theta + B\sin\theta = A\cos\theta + B\sin\theta + C\cos(\theta - \theta_1)$, es decir: $\cos(\theta - \theta_1) = 0$. Luego: $\theta = \theta_1 + \frac{\pi}{2}$.

D 107- Demostrar que el semieje menor de una elipse, es media proporcional entre las dos perpendiculares bajadas desde cada foco sobre cualquier tangente a la elipse.

Solución: Sea la tangente: $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$, y sean p y p' las longitudes de las perpendiculares

bajadas desde los focos a la tangente. Se tiene que: $p = \dfrac{-mc \mp \sqrt{a^2m^2+b^2}}{\pm\sqrt{1+m^2}}$, $p' = \dfrac{mc \mp \sqrt{a^2m^2+b^2}}{\pm\sqrt{1+m^2}}$. Multiplicando estas igualdades: $pp' = \dfrac{-m^2c^2+a^2m^2+b^2}{1+m^2} = b^2$.

D 108- Se da la elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, y un punto M de ella. Por los extremos de un diámetro cualquiera y por M, se hace pasar un círculo. Se pide: 1º) Lugar geométrico Γ del centro de este círculo al variar el diámetro. 2º) Si alrededor del origen O de coordenadas, se hace girar un ángulo recto, hallar el lugar del punto de encuentro de las tangentes a Γ en los puntos donde los lados del ángulo recto cortan a Γ. 3º) Por O se pueden trazar independientemente de la normal que tiene su pie en O, otras tres normales a Γ. Hallar la ecuación del círculo circunscrito al triángulo formado por los pies de estas tres normales.

Solución: 1º) Sea $M(a\sin\varphi, b\cos\varphi)$, y sean los extremos de un diámetro cualquiera $(a\sin\theta, b\cos\theta)$, $(-a\sin\theta, -b\cos\theta)$. La ecuación del círculo es $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi & a\sin\varphi & b\cos\varphi & 1 \\ a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta & a\sin\theta & b\cos\theta & 1 \\ a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta & -a\sin\varphi & -b\cos\varphi & 1 \end{vmatrix} = 0$. Las coordenadas del centro de este círculo vienen dadas por: $\left(\dfrac{A_{12}}{2A_{11}}, \dfrac{-A_{13}}{2A_{11}}\right)$. Como: $A_{11} = -2ab\sin(\theta-\varphi)$, $A_{12} = abc^2\cos\theta\sin(\varphi-\theta)\sin(\varphi+\theta)$, $A_{13} = 2ac^2\sin\theta\sin(\varphi-\theta)\sin(\varphi+\theta)$, se tiene que dichas coordenadas son: $x = \dfrac{c^2}{2a}\cos\theta\sin(\varphi+\theta)$, $y = \dfrac{-c^2}{2b}\sin\theta\sin(\varphi+\theta)$. Eliminando θ entre estas dos ecuaciones, se tiene: $2a^2x^2+2b^2y^2-ac^2x\sin\varphi+bc^2y\cos\varphi = 0$, que es la ecuación de una elipse que pasa por el origen de coordenadas. 2º) Mediante la afinidad $x = \dfrac{X}{\sqrt{2}\,a}$, $y = \dfrac{Y}{\sqrt{2}\,b}$, esta elipse se transforma en un círculo, y el ángulo recto se transforma en otro ángulo ($mm' = -1$, se transforma en $m_1m_1' = \dfrac{-b^2}{a^2}$). Este ángulo de magnitud constante, está inscrito en una circunferencia, por lo que el arco que subtiende es constante e igual al doble de dicha magnitud. Por tanto, las tangentes trazadas en los extremos del arco, se cortan en un punto tal, que al desplazarse el arco sobre la circunferencia, equidista del centro de esta. Por tanto, su lugar es una circunferencia concéntrica con la anterior. Deshecha la afinidad, el lugar pedido es una elipse concéntrica con Γ. 3º) Trasladando el centro de coordenadas al centro de Γ, que es $\left(\dfrac{c^2\sin\varphi}{4a}, \dfrac{-c^2\cos\varphi}{4b}\right)$, se tiene la ecuación: $\Gamma \equiv \dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{n^2}=1$, siendo $m^2 = \dfrac{c^4}{16a^2}$, $n^2 = \dfrac{c^4}{16b^2}$, y siendo las nuevas coordenadas de O: $\alpha = \dfrac{-c^2\sin\varphi}{4a}$, $\beta = \dfrac{c^2\cos\varphi}{4b}$. La ecuación del círculo de Joachimstal correspondiente al punto O, es: $x^2+y^2+x\alpha+y\beta-\mu\left(\dfrac{x\alpha}{m^2}+\dfrac{y\beta}{n^2}+1\right) = 0$, con $\mu = m^2+n^2$. Operando, se obtiene la ecuación de la circunferencia circunscrita pedida:

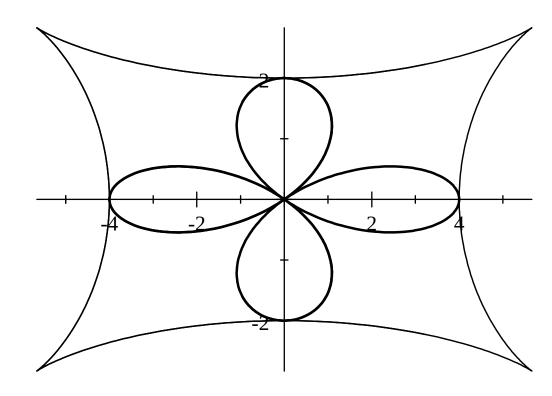
$$x^2+y^2+\frac{ac^2\sin\varphi}{4b^2}x-\frac{bc^2\cos\varphi}{4a^2}y-\frac{c^4}{16}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) = 0.$$

D 109- 1º) Encontrar el lugar geométrico del punto medio M de la cuerda común de una elipse y su círculo osculador. Calcular el área de esta curva. 2º) Hallar la envolvente de esta cuerda. Calcular el área de esta nueva curva.

Solución: 1º) Para que cuatro puntos de una elipse sean concíclicos, la suma de sus argumentos ha de ser nula: $\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4 = 0$. En el punto de osculación coinciden tres puntos, luego: $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$, por lo que $\varphi_4 = -3\varphi_1$. Las coordenadas de los extremos de la cuerda AB son: $A(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$, $B(a\cos 3\varphi, -b\sin 3\varphi)$,.y las de M $\left(\dfrac{a}{2}(\cos\varphi+\cos 3\varphi), \dfrac{b}{2}(\sin\varphi-\sin 3\varphi)\right)$. La ecuación en paramétricas del lugar de M, es: $x = \dfrac{a}{2}(\cos\varphi+\cos 3\varphi)$, $y = \dfrac{b}{2}(\sin\varphi-\sin 3\varphi)$, o bien: $x = a(2\cos^3\varphi-\cos\varphi)$, $y = a(2\sin^3\varphi-\sin\varphi)$. Eliminando φ entre estas ecuaciones, se tiene la ecuación en implícitas del lugar de M: $(b^2x^2+a^2y^2)^3-(a^2-b^2)(b^2x^2-a^2y^2)^2 = 0$. Como, $\dfrac{x}{a} = 2\cos^3\varphi-\cos\varphi$, $\dfrac{y}{a} = 2\sin^3\varphi-\sin\varphi$, se tiene que el área correspondiente al lugar geométrico descrito por M, es: $4\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} ydx =$

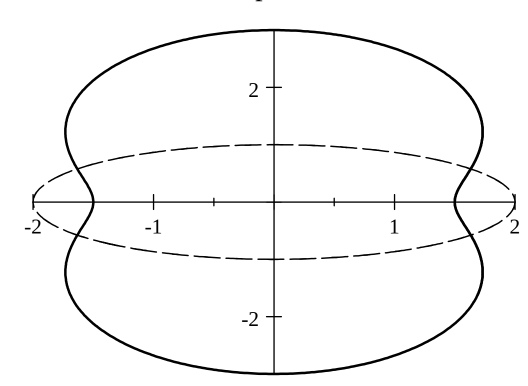
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} ab(2\sin^3\varphi-\sin\varphi)(\sin\varphi-6\sin\varphi\cos^2\varphi)d\varphi = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(12\sin^6\varphi-16\sin^4\varphi+5\sin^2\varphi)d\varphi = \frac{\pi ab}{2}.$$

2º) La ecuación de la cuerda AB es: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a\cos\varphi & b\sin\varphi & 1 \\ a\cos 3\varphi & -b\sin 3\varphi & 1 \end{vmatrix} = 0$. Operando y simplificando: $bx\cos\varphi - ay\sin\varphi - ab\cos 2\varphi = 0$. La derivada de esta ecuación, es: $bx\sin\varphi + ay\cos\varphi - 2ab\sin 2\varphi = 0$. Resolviendo el sistema formado por estas dos ecuaciones, se tiene la ecuación en paramétricas de la envolvente de la cuerda AB: $x = a(\cos 2\varphi\cos\varphi + 2\sin 2\varphi\sin\varphi)$, $y = b(2\sin 2\varphi\cos\varphi - \cos 2\varphi\sin\varphi)$, o bien: $x = a\cos\varphi(1+2\sin^2\varphi)$, $y = b\sin\varphi(1+2\cos^2\varphi)$. De estas dos igualdades, se obtiene que: $ydx = 3ab\sin^2\varphi(3-2\sin^2\varphi)(1-2\sin^2\varphi)d\varphi$, $xdy = 3ab\cos^2\varphi(1-4\sin^4\varphi)d\varphi$. Como el diferencial del área, es: $dS = \frac{1}{2}(xdy - ydx)$, se tiene que: $dS = \frac{3ab}{2}(1-4\sin^2\varphi+4\sin^4\varphi)d\varphi$. El área de la envolvente de la cuerda, es: $S = \frac{3ab}{2}\int_0^{2\pi}(1-4\sin^2\varphi+4\sin^4\varphi)d\varphi = \frac{3}{2}\pi ab$. En el siguiente dibujo se incluye en línea gruesa el lugar geométrico descrito por M, y en línea fina la envolvente de la cuerda AB, para el caso $a = 4$, $b = 2$.



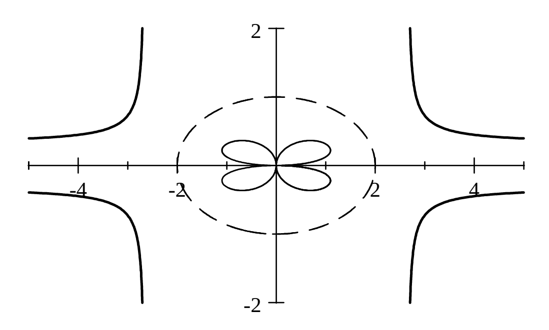
D 110- Hallar el lugar geométrico de los puntos M tales que si se trazan las tangentes MA y MB a la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$, el círculo circunscrito a AMB es tangente a la elipse.

Solución: Sea $M(\alpha,\beta)$, y sea (λ,μ) el punto de tangencia T del círculo con la elipse. La ecuación de la tangente en T es: $\frac{\lambda x}{a^2}+\frac{\mu y}{b^2}-1 = 0$. La de la polar de M es: $\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-1 = 0$. Para que la ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1+\theta\left(\frac{\lambda x}{a^2}+\frac{\mu y}{b^2}-1\right)\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-1\right) = 0$, represente un círculo, ha de verificarse que: $\frac{1}{a^2}+\theta\frac{\lambda\alpha}{a^4} = \frac{1}{b^2}+\theta\frac{\mu\beta}{b^4}$, y que: $\lambda\beta+\mu\alpha = 0$. De donde se obtiene que: $\theta = \frac{-a^2b^2}{\alpha\lambda b^2+\beta\mu a^2-a^2b^2} = \frac{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}{\frac{\alpha\lambda}{a^4}-\frac{\beta\mu}{b^4}}$. Luego, $-\alpha\lambda+\beta\mu+a^2-b^2 = 0$. Por tanto: $\lambda = \frac{\alpha(a^2-b^2)}{\alpha^2+\beta^2}$, $\mu = \frac{-\beta(a^2-b^2)}{\alpha^2+\beta^2}$. Como el punto (λ,μ) está en la elipse: $\frac{\alpha^2(a^2-b^2)^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2a^2}+\frac{\beta^2(a^2-b^2)^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2b^2} = 1$. Por tanto, operando, la ecuación del lugar geométrico pedido es: $(a^2-b^2)^2(b^2x^2+a^2y^2)-a^2b^2(x^2+y^2)^2 = 0$. El dibujo del lugar se refiere al caso $a = 2$, $b = 1$, e incluye en línea de trazos la elipse dada.



D 111- Dada una elipse, hallar: 1º) El lugar de los puntos medios de las cuerdas normales. 2º) Lugar de los polos de estas normales.

Solución: 1º) La normal en (α,β), punto de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, es: $\frac{a^2x}{\alpha}-\frac{b^2y}{\beta}-c^2=0$, de donde $x=\frac{\alpha}{a^2}\left(\frac{b^2y}{\beta}+c^2\right)$. Las ordenadas de los puntos de corte de la normal con la elipse, vienen dadas por: $\left(\frac{\alpha^2b^4}{\beta^2a^6}+\frac{1}{b^2}\right)y^2+\frac{2b^2c^2\alpha^2}{a^6\beta}y+\frac{c^2\alpha^2}{a^6}-1=0$. La ordenada correspondiente al punto medio es: $\dfrac{-\frac{2b^2c^2\alpha^2}{a^6\beta}}{\frac{\alpha^2b^4}{\beta^2a^6}+\frac{1}{b^2}}=\frac{-b^4c^2\alpha^2\beta}{a^6\beta^2+b^6\alpha^2}$, y su abscisa: $\frac{a^4c^2\alpha\beta^2}{a^6\beta^2+b^6\alpha^2}$. Luego, $\frac{x}{y}=\frac{-a^4\beta}{b^4\alpha}$, es decir $\beta=\frac{-b^4\alpha x}{a^4y}$. Sustituido este valor en la ecuación de la normal, da: $\alpha=\frac{a^2(b^2x^2+a^2y^2)}{b^2c^2x}$, $\beta=\frac{-b^2(b^2x^2+a^2y^2)}{a^2c^2y}$. Introducidos estos valores en la ecuación de la elipse, se tiene la ecuación del lugar pedido: $\frac{a^2}{b^4x^2}+\frac{b^2}{a^4y^2}=\frac{c^4}{(b^2x^2+a^2y^2)^2}$. 2º) Siendo la polar de (λ,μ), $\frac{\lambda x}{a^2}+\frac{\mu y}{b^2}-1=0$, identificando esta ecuación con la de la normal, se obtiene: $\lambda=\frac{a^4}{c^2\alpha}$, $\mu=\frac{-b^4}{c^2\beta}$, es decir: $\alpha=\frac{a^4}{c^2x}$, $\beta=\frac{-b^4}{c^2y}$. Sustituidos estos valores en la ecuación de la elipse, se obtiene el lugar de los polos de las normales: $\frac{a^6}{x^2}+\frac{b^6}{y^2}=c^4$. 3º) El dibujo se refiere al caso $a=2$, $b=1$. Se incluye en línea de trazos finos la elipse dada, en línea continua fina el lugar geométrico del punto 1º, y en línea continua gruesa el del punto 2º.



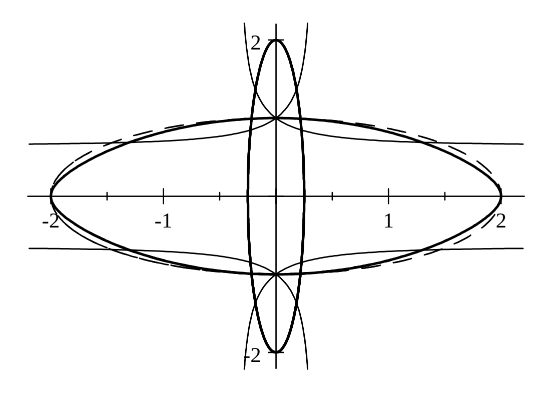
D 112- Por el foco de una elipse se trazan n radios vectores. Cada uno de ellos forma con el consecutivo un ángulo $\frac{2\pi}{n}$. Hallar el límite de la media aritmética de las longitudes de los n radios vectores.

Solución: El número de radios vectores que hay en el ángulo $d\theta$, es $\frac{nd\theta}{2\pi}$, siendo la suma de sus longitudes: $\frac{n\rho}{2\pi}d\theta$, y su media aritmética: $\frac{\rho d\theta}{2\pi}$. Luego su límite es: $M=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\rho d\theta=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\rho d\theta$. Como $\rho=\frac{p}{1+e\cos\theta}$, introduciendo este valor en la integral, se tiene que: $M=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{p}{1+e\cos\theta}d\theta=$ $=\frac{2p}{\pi\sqrt{1-e^2}}\left|\arctan\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right)\right|_0^{\pi}=\frac{2p}{\pi\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$.

D 113- Se da la elipse $E\equiv\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, y un punto M variable sobre ella. Sean P, Q, R los pies de las normales bajadas desde M. Se consideran los círculos circunscritos al triángulo PQR. Se pide: 1º) Lugar geométrico del centro del círculo. 2º) Envolvente de los círculos. 3º) Lugar de los centros de los pares de secantes comunes a círculo y elipse.

Solución: 1º) La ecuación del círculo de Joachimstal correspondiente a $M(\alpha,\beta)$, es: $C\equiv a^2b^2(x^2+y^2)-b^4\alpha x-a^4\beta y-a^2b^2(a^2+b^2)=0$. Su centro es $\left(\frac{b^2\alpha}{2a^2},\frac{a^2\beta}{2b^2}\right)$. Sustituyendo en E, los valores $\alpha=\frac{2a^2x}{b^2}$, $\beta=\frac{2b^2y}{a^2}$, se tiene el lugar del centro: $\frac{4a^2}{b^4}x^2+\frac{4b^2}{a^4}y^2-1=0$. 2º) La envolvente de los círculos se obtiene eliminando $\alpha,\beta,\frac{d\beta}{d\alpha}$, entre las cuatro ecuaciones siguientes: $C=0$,

$E=0$, $-b^4x+a^4y\dfrac{d\beta}{d\alpha}=0$, $\dfrac{\alpha}{a^2}+\dfrac{\beta}{b^2}\cdot\dfrac{d\beta}{d\alpha}=0$. Operando, se obtiene la ecuación de dicha envolvente: $a^2b^2(x^2+y^2-a^2-b^2)^2-b^6x^2-a^6y^2=0$. 3º) Como, $\dfrac{C'_x}{E'_x}=\dfrac{C'_y}{E'_y}=\dfrac{C'_z}{E'_z}=\lambda$, se tienen las ecuaciones: $2a^2b^2x-b^4\alpha-2\lambda\dfrac{x}{a^2}=0$, $2a^2b^2y-a^4\beta-2\lambda\dfrac{y}{b^2}=0$, $b^4\alpha x+a^4\beta y+2a^2b^2(a^2+b^2)+2\lambda=0$. Entre estas tres ecuaciones, teniendo en cuenta que $\dfrac{\alpha^2}{a^2}+\dfrac{\beta^2}{b^2}=1$, se eliminan α,β,λ, obteniéndose la ecuación del lugar pedido: $4c^4x^2y^2(b^6x^2+a^6y^2-2a^4b^4)-a^4b^4(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)^2=0$. 4º) El dibujo se refiere a este lugar geométrico para el caso $a=2$, $b=1$. Se ha incluido en línea de trazos finos la elipse dada, en línea continua gruesa el lugar geométrico del punto 1º, en línea de trazos gruesos el del punto 2º y en línea fina continua el del punto 3º.



D 114- Se considera una elipse variable que gira alrededor de la tangente trazada en uno de sus vértices. La elipse se proyecta en el plano horizontal que contiene a dicha tangente fija, según una circunferencia tangente a la citada tangente. Hallar el lugar de los focos de la elipse variable.

Solución: El cilindro $x^2+y^2-2Ry=0$ admite, al ser cortado por los planos $z+\lambda y=0$, cónicas tangentes al eje OX, cuya proyección sobre el plano horizontal, es una circunferencia tangente al eje OX. La ecuación de la elipse es: $x^2+y^2-2Ry=0$, $z+\lambda y=0$. Las coordenadas de sus focos son $(0,\beta,\gamma)$, luego: $\gamma+\lambda\beta=0$. Obligando a la tangencia con el cono isótropo de vértice $(0,\beta,\gamma)$, se tiene la ecuación pedida: $(y^2+z^2)(y-2R)+R^2y=0$, $x=0$ (estrofoide recta).

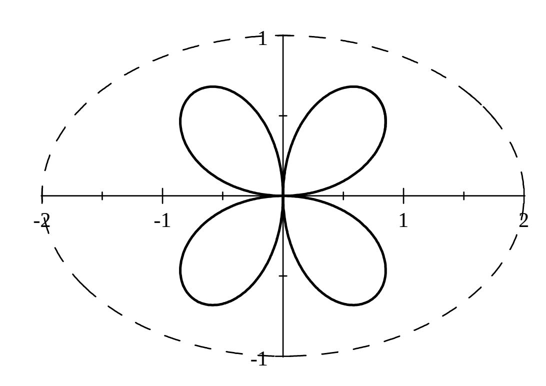
D 115- Calcular en función de los semiejes de una elipse y de la distancia d de su centro a la tangente en el punto P de la elipse, la longitud l de la cuerda normal en P.

Solución: Siendo $P(\alpha,\beta)$, la tangente en P es: $y-\beta=\dfrac{-b^2\alpha}{a^2\beta}(x-\alpha)$. Luego $d=\dfrac{a^2b^2}{\sqrt{b^4\alpha^2+a^4\beta^2}}$, de donde: $b^4\alpha^2+a^4\beta^2=\dfrac{a^4b^4}{d^2}$. La normal en P es: $\dfrac{a^2x}{\alpha}-\dfrac{b^2y}{\beta}-c^2=0$, siendo $\alpha^2b^2+\beta^2a^2=a^2b^2$. La expresión: $\dfrac{l^2}{4}=\left(\dfrac{b^4c^2\alpha^2\beta+a^6\beta^3+b^6\alpha^2\beta}{a^6\beta^2+b^6\alpha^2}\right)^2+\left(\dfrac{a^4c^2\alpha\beta^2-b^6\alpha^3-a^6\alpha\beta^2}{a^6\beta^2+b^6\alpha^2}\right)^2$, determina la longitud l de la cuerda normal a la elipse en su punto P. Operando, se obtiene que: $\dfrac{l^2(a^6\beta^2+\alpha^2b^6)^2}{4}=$ $=a^4\beta^2(\alpha^2b^4+a^4\beta^2)^2+\alpha^2b^4(\beta^2a^4+\alpha^2b^4)^2=(\alpha^2b^4+a^4\beta^2)^3=\dfrac{a^{12}b^{12}}{d^6}$. De donde despejando l, se tiene: $l=\dfrac{2a^6b^6}{d^3(a^6\beta^2+\alpha^2b^6)}$. O bien: $l=\dfrac{2a^2b^2}{d(a^2+b^2-d^2)}$.

D 116- Hallar el lugar geométrico de las proyecciones del centro de la elipse sobre las normales. Calcular el área del lugar.

Solución: Sea la elipse: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. La normal en (α,β) es: $\dfrac{a^2x}{\alpha}-\dfrac{b^2y}{\beta}-c^2=0$, siendo $\dfrac{\alpha^2}{a^2}+\dfrac{\beta^2}{b^2}=1$. La perpendicular desde el centro a la normal es: $y=\dfrac{-b^2\alpha}{a^2\beta}x$. La proyección del centro sobre la normal, es: $\left[\dfrac{a^2}{c^2}\left(x+\dfrac{y^2}{x}\right),\dfrac{-b^2}{c^2}\left(y+\dfrac{x^2}{y}\right)\right]$. Introduciendo estas coordenadas en la ecuación de la elipse, se tiene el lugar pedido: $a^2\left(\dfrac{x^2+y^2}{x}\right)^2+b^2\left(\dfrac{x^2+y^2}{y}\right)^2=c^4$. O bien, en polares:

$\rho^2 = \dfrac{c^4\sin^2\theta\cos^2\theta}{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}$. El área pedida es: $A = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{c^4\sin^2\theta\cos^2\theta}{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}d\theta = \dfrac{\pi}{2}(a-b)^2$. Se ha dibujado el lugar pedido para el caso $a = 2$, $b = 1$, incluyéndose en puntos la elipse dada.



D 117- Circunscribir a un triángulo la elipse de superficie mínima.

Solución: Siendo (α,β) las coordenadas de su centro, la ecuación cartesiana general de la elipse es: $A(x-\alpha)^2 + 2B(x-\alpha)(y-\beta) + C(y-\beta)^2 + 1 = 0$. Sean los vértices del triángulo: $(0,0)$, $(p,0)$, $(0,q)$. Por pasar la elipse por $(0,0)$, se tiene: $A\alpha^2 + 2\alpha\beta B + C\beta^2 + 1 = 0$. Por pasar por el punto $(p,0)$, se tiene: $A(p-\alpha)^2 - 2\beta B(p-\alpha) + C\beta^2 + 1 = 0$. Por pasar por el punto $(0,q)$, se tiene: $A\alpha^2 - 2\alpha B(q-\beta) + {}$ ${}+C(q-\beta)^2 + 1 = 0$. Resolviendo este sistema, se tienen los siguientes valores: $A = \dfrac{-(2\beta-q)}{\alpha(p\beta+q\alpha-pq)}$, $B = \dfrac{(2\alpha-p)(2\beta-q)}{2\alpha\beta(p\beta+q\alpha-pq)}$, $C = \dfrac{-(2\alpha-p)}{\beta(p\beta+q\alpha-pq)}$. En consecuencia, el invariante I_2 de la elipse es: $I_2 = \dfrac{A_{33}}{\sin^2\theta} = \dfrac{AC-B^2}{\sin^2\theta}$. Y como dicho invariante correspondiente a la elipse canónica, es: $\dfrac{1}{a^2b^2} = \dfrac{\pi^2}{S^2}$, donde S es la superficie de la elipse, se tiene: $\dfrac{\pi^2}{S^2} = \dfrac{AC-B^2}{\sin^2\theta}$. Luego, $S = \dfrac{\pi\sin\theta}{(AC-B^2)^{\frac{1}{2}}}$. Al mínimo de S le corresponde el máximo de $AC-B^2$. Operando se llega a: $2q\alpha + p\beta - pq = 0$, $2p\beta + q\alpha - pq = 0$. De donde: $\alpha = \dfrac{p}{3}$, $\beta = \dfrac{q}{3}$. La superficie es: $S = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}pq\sin\theta$. El centro de la elipse es el centro de gravedad del triángulo dado. Si se hace: $p^2+q^2+2pq\sin(\theta-30^\circ) = P^2$, $p^2+q^2-2pq\sin(\theta+30^\circ) = Q^2$, los semiejes de la elipse son: $\dfrac{P+Q}{3}$ y $\dfrac{P-Q}{3}$.

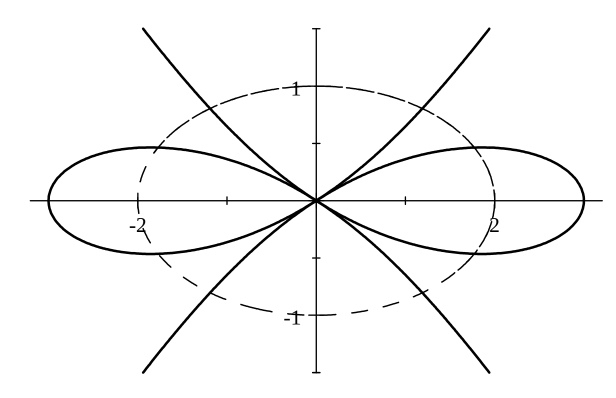
D 118- Demostrar que en toda elipse existen tres puntos tales que sus círculos osculadores pasan por un punto dado de la curva. Demostrar que estos tres puntos pertenecen a un círculo que pasa por el punto dado, y forman un triángulo cuyas medianas se cortan en el centro de la elipse.

Solución: La condición para que cuatro puntos de la elipse sean concíclicos, consiste en que la suma de sus argumentos sea nula, o igual a 2π. Luego se tiene para cada uno de los tres puntos: $3\varphi_1 + \varphi_4 = 2\pi$, $3\varphi_2 + \varphi_4 = 2\pi$, $3\varphi_3 + \varphi_4 = 2\pi$. Sumando: $3(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4) = 6\pi$, es decir que los tres puntos son concíclicos con un cuarto punto dado, y los tres círculos osculadores pasan por este punto dado de la elipse. Las coordenadas de los vértices del triángulo formado por los tres puntos de osculación, son: $x_1 = a\cos\dfrac{2\pi-\varphi_4}{3}$, $y_1 = b\sin\dfrac{2\pi-\varphi_4}{3}$; $x_2 = a\cos\dfrac{4\pi-\varphi_4}{3}$, $y_2 = b\sin\dfrac{4\pi-\varphi_4}{3}$; $x_3 = a\cos\dfrac{6\pi-\varphi_4}{3}$, $y_3 = b\sin\dfrac{6\pi-\varphi_4}{3}$. Luego las coordenadas de su centro de gravedad, son: $x = \dfrac{x_1+x_2+x_3}{3} = 0$, $y = \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3} = 0$, es decir, el centro de la elipse.

D 119- Hallar el lugar geométrico de los puntos desde los cuales, dos de las normales trazadas desde ellos a la elipse canónica, forman ángulos iguales, una de las normales con la dirección positiva del eje OX, y la otra con la dirección positiva del eje OY.

Solución: Sea (α,β) el punto por el que pasan las rectas: $y-\beta = m(x-\alpha)$, $y-\beta = \dfrac{1}{m}(x-\alpha)$, que han de ser normales a la elipse. Luego se ha de tener que: $\dfrac{a^2}{\dfrac{m^2}{(-m\alpha+\beta)^2}} + \dfrac{b^2}{\dfrac{1}{(-m\alpha+\beta)^2}} - c^4 = 0$, y

$\dfrac{a^2}{\dfrac{1}{(-\alpha+m\beta)^2}}+\dfrac{b^2}{\dfrac{m^2 1}{(-\alpha+m\beta)^2}}-c^4=0$. Eliminando m, y sustituyendo (α,β) por (x,y), se tiene el lugar pedido: $(x^2-y^2)(b^2x^2+a^2y^2)^2-c^2(b^2x^2-a^2y^2)^2=0$. El dibujo del lugar se refiere al caso $a=2$, $b=1$, e incluye en línea de trazos la elipse dada.



D 120- Desde un punto M de una elipse se bajan las perpendiculares MP y MQ sobre los ejes. Hallar las envolventes de los círculos de centros P y Q, y que pasan por M.

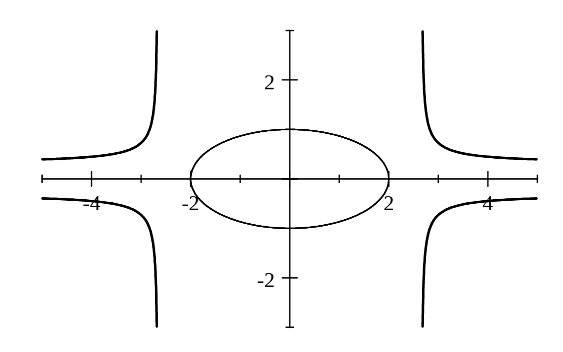
Solución: Sean: $M(a\cos\theta, b\sin\theta)$, $P(a\cos\theta,0)$, $Q(0,b\sin\theta)$. La circunferencia de centro P es: $(x-a\cos\theta)^2+y^2-b^2\sin^2\theta=0$. Derivando respecto a θ, se tiene: $\cos\theta=\dfrac{ax}{a^2+b^2}$, que sustituido en la ecuación del círculo, se obtiene su envolvente: $b^2x^2+(a^2+b^2)y^2-b^2(a^2+b^2)=0$. Procediendo análogamente con el círculo de centro Q, se obtiene la envolvente: $(a^2+b^2)x^2+a^2y^2-a^2(a^2+b^2)=0$. Ambas elipses son concéntricas con la dada.

D 121- Tres radios vectores parten del mismo foco de una elipse, siendo sus longitudes $r_1=2$, $r_2=4$, $r_3=8$. Los ángulos que forman entre sí, son: $\widehat{r_1r_2}=\dfrac{\pi}{2}$, $\widehat{r_1r_3}=\pi$. Hallar las longitudes de los semiejes.

Solución: Sea la elipse $\rho=\dfrac{p}{1+e\cos\omega}$. $r_1=\dfrac{p}{1+e\cos\theta}=2$, $r_2=\dfrac{p}{1+e\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)}=$ $=\dfrac{p}{1-e\sin\theta}=4$, $r_3=\dfrac{p}{1+e\cos(\theta+\pi)}=\dfrac{p}{1-e\cos\theta}=8$. Resolviendo este sistema: $p=\dfrac{16}{5}=\dfrac{b^2}{a}$, $e=\sqrt{\dfrac{2}{5}}=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$. Luego $a=\dfrac{16}{3}$, $b=\dfrac{16\sqrt{15}}{15}$.

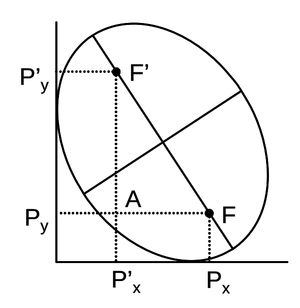
D 122- Hallar el lugar geométrico de los puntos tales que, trazando por cada uno de ellos, tangentes a la elipse, una de ellas sea perpendicular a la cuerda de los contactos.

Solución: Sea el punto $P(\alpha,\beta)$. Su polar es: $\dfrac{\alpha x}{a^2}+\dfrac{\beta y}{b^2}-1=0$. La ecuación de la recta perpendicular por P a la polar, es: $y-\beta=\dfrac{a^2\beta}{b^2\alpha}(x-\alpha)$. Obligando a que dicha recta sea tangente a la elipse, se tiene: $a^2a^4\beta^2+b^2b^4\alpha^2-\alpha^2\beta^2(a^2-b^2)=0$. Por tanto, sustituyendo (α,β) por (x,y), se tiene la ecuación del lugar pedido: $b^6x^2+a^6y^2-x^2y^2(a^2-b^2)^2=0$. El dibujo del lugar se refiere al caso $a=2$, $b=1$, e incluye en línea fina la elipse dada.

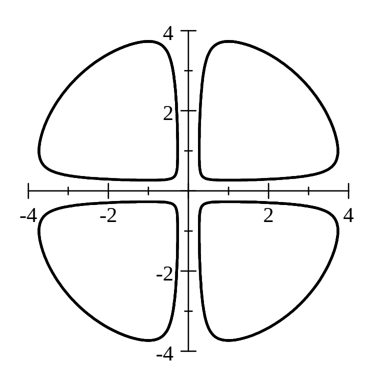


D 123- Se dan dos rectas fijas perpendiculares entre sí. Una elipse se mueve conservándose siempre bitangente a dichas rectas. Hallar el lugar geométrico del centro de la elipse y de sus focos.

Solución:



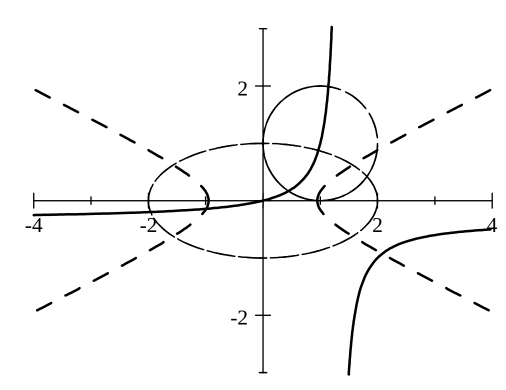
Siendo P y P', los pies de las perpendiculares trazadas desde los focos F y F' sobre una tangente, se tiene: $FP \cdot F'P' = b^2$. Siendo los ejes coordenados las dos rectas perpendiculares tangentes (ver dibujo), se tiene: $FP_y \cdot F'P'_y = \alpha\alpha' = b^2$, $FP_x \cdot F'P'_x = \beta\beta' = b^2$. Y como en el triángulo $FF'A$, se tiene: $FA^2 + F'A^2 = FF'^2$, es decir: $(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2 = 4c^2$, sustituyendo: $\alpha' = \dfrac{b^2}{\alpha}$, $\beta' = \dfrac{a^2}{\beta}$, y cambiando α, β por x, y, el lugar de los focos es: $(x^2 + y^2)(x^2y^2 + b^4) - 4a^2x^2y^2 = 0$. El centro O está en el círculo de Monge, de radio $\sqrt{a^2 + b^2}$. Luego su lugar es: $x^2 + y^2 - a^2 - b^2 = 0$. Se ha dibujado el lugar geométrico de los focos de la elipse para el caso $a = 2$, $b = 1$.



D 124- Se da la elipse $E \equiv \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, y el círculo $C \equiv (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$. 1º) Hallar el lugar geométrico de los puntos que tienen la misma polar respecto a E y C, cuando varía R. 2º) Hallar el lugar de los centros de C para un valor dado de R, cuando la recta que une dos de los cuatro puntos comunes de E y C, es perpendicular a la que une los otros dos puntos.

Solución: 1º) Por ser la misma polar, se tiene: $\dfrac{\frac{x}{a^2}}{x - \alpha} = \dfrac{\frac{y}{b^2}}{y - \beta} = \dfrac{1}{\alpha(x - \alpha) + \beta(y - \beta) + R^2}$. Eliminando R, se tiene el lugar pedido: $(a^2 - b^2)xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0$. 2º) La ecuación de $C + \lambda E = 0$, es: $\left(1 + \dfrac{\lambda}{a^2}\right)x^2 + \left(1 + \dfrac{\lambda}{b^2}\right)y^2 - 2\alpha x - 2\beta y - \lambda + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0$. Obligando a que esta cónica degenere en dos rectas que han de ser perpendiculares entre sí, se tiene, primero, que la suma de los coeficientes: $1 + \dfrac{\lambda}{a^2} + 1 + \dfrac{\lambda}{b^2} = 0$, es decir $\lambda = \dfrac{-2a^2b^2}{a^2 + b^2}$, y segundo, que el determinante A sea nulo, es decir, cambiando α, β por x, y: $\begin{vmatrix} \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} & 0 & -x \\ 0 & \dfrac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} & -y \\ -x & -y & x^2 + y^2 - R^2 + \dfrac{2a^2b^2}{a^2 + b^2} \end{vmatrix} = 0$. Operando, se tiene la ecuación pedida: $2b^2x^2 - 2a^2y^2 + (a^2 - b^2)R^2 - \dfrac{2a^2b^2(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2} = 0$. Se trata de una hipérbola que degenera para $R^2 = \dfrac{2a^2b^2}{a^2 + b^2}$, en dos rectas: $bx \pm ay = 0$. 3º) Se han dibujado los lugares geométricos para el caso $a = 2$, $b = \alpha = \beta = R = 1$: en línea de trazos finos la elipse y la circunferencia dadas, en línea

continua gruesa el lugar del punto 1º, y en línea de trazos gruesos el del punto 2º.



D 125- Hallar la máxima distancia del centro de una elipse a una de sus normales.

Solución: La ecuación de la normal en (α,β) es: $\frac{a^2x}{\alpha} - \frac{b^2y}{\beta} - c^2 = 0$. La distancia del centro a la normal, es: $d = \frac{c^2}{\sqrt{\frac{a^4}{\alpha^2}+\frac{b^4}{\beta^2}}}$. Siendo $\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2} = 1$, $d = \frac{c^2}{a\sqrt{\frac{a^2}{\alpha^2}+\frac{b^2}{a^2-\alpha^2}}} = \frac{c^2}{a\sqrt{F}}$. Luego se trata de encontrar el mínimo de la función $F = \frac{a^2}{\alpha^2}+\frac{b^2}{a^2-\alpha^2}$. Derivando e igualando a 0, se tiene que $F = \frac{(a+b)^2}{a^2}$. Luego la distancia máxima es: $d = \frac{c^2}{a\sqrt{\frac{(a+b)^2}{a^2}}} = a-b$.

D 126- Demostrar que: 1º) En una elipse se pueden inscribir infinitos triángulos cuyo centro de gravedad sea el de la elipse. 2º) Que todos están circunscritos a una misma elipse. 3º) Que son equivalentes. 4º) Que la suma de los cuadrados de sus lados, es constante.

Solución: 1º) Sean los tres vértices $(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$, $(a\cos\beta, b\sin\beta)$, $(a\cos\gamma, b\sin\gamma)$. Su centro de gravedad es $\left[\frac{a}{3}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma), \frac{b}{3}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)\right]$. Como el centro de gravedad es el centro de la elipse: $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma = 0$, $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma = 0$. Sumando las igualdades $\cos^2\alpha = (-\cos\beta-\cos\gamma)^2$, $\sin^2\alpha = (-\sin\beta-\sin\gamma)^2$, se tiene: $1 = 2\cos(\beta-\gamma)$, es decir $\beta-\gamma = 120º$. Análogamente: $\gamma-\alpha = 120º$, $\alpha-\beta = 120º$. Luego hay infinitos triángulos que cumplen la condición del enunciado, siendo las diferencias de los argumentos de sus vértices iguales a 120º. 2º) Aplicando una afinidad de módulo $M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{b}{a}$, la elipse se transforma en su círculo principal, y los triángulos en equiláteros, circunscritos a un círculo de radio $\frac{a}{2}$. Deshaciendo la afinidad, este círculo se transforma en la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{4}$. 3º) El área de los triángulos equiláteros es: $\frac{3\sqrt{3}\,a^2}{4}$, siendo el área de los triángulos, tras deshacer la afinidad: $\frac{3\sqrt{3}\,a^2}{4}M = \frac{3\sqrt{3}\,ab}{4}$. Luego estos triángulos son equivalentes. 4º) La expresión correspondiente a la suma de los cuadrados de los lados, es la siguiente:
$[a\cos\alpha - a\cos(\alpha+120º)]^2 + [a\sin\alpha - a\sin(\alpha+120º)]^2 + [a\cos\alpha - a\cos(\alpha-120º)]^2 +$
$+[a\sin\alpha - a\sin(\alpha-120º)]^2 + [a\cos(\alpha+120º) - a\cos(\alpha-120º)]^2 + [a\sin(\alpha+120º) - a\sin(\alpha-120º)]^2 =$
$= \frac{9}{2}(a^2+b^2)$, que es constante.

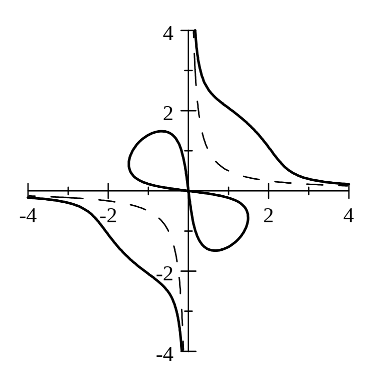
D 127- Por un punto $P(\lambda,\mu)$, se trazan dos rectas paralelas a las bisectrices de los ejes de la elipse canónica. Se pide: 1º) Ecuación del haz de cónicas que pasan por los puntos de intersección de la elipse con dichas rectas. 2º) Lugar geométrico de los centros de estas cónicas, separando el lugar de los centros correspondientes a elipses de los correspondientes a hipérbolas.

Solución: 1º) Siendo la elipse canònica: $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2 = 0$, y siendo la ecuación del conjunto de las rectas paralelas a las bisectrices trazadas por P: $(x-\lambda)^2-(y-\mu)^2 = 0$, la ecuación del haz de cónicas

es: $\Phi \equiv b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 + \theta\left[(x-\lambda)^2 - (y-\mu)^2\right] = 0$. 2º) Luego: $\Phi'_x = 2b^2x + 2\theta(x-\lambda) = 0$, $\Phi'_y = 2a^2y + 2\theta(y-\mu) = 0$. Eliminando θ, se tiene la ecuación pedida: $(a^2+b^2)xy - b^2\mu x - a^2\lambda y = 0$ (hipérbola equilátera que pasa por el origen y por P). Como en la ecuación del haz, se tiene: $A_{33} = \begin{vmatrix} b^2+\theta & 0 \\ 0 & a^2-\theta \end{vmatrix} = (b^2+\theta)(a^2-\theta)$, la cónica es elipse si $(b^2+\theta)(a^2-\theta) > 0$, y es hipérbola si $(b^2+\theta)(a^2-\theta) < 0$. Para $\theta = 0$, la cónica es una elipse cuyo centro es el origen. Luego la rama de la hipérbola equilátera que pasa por el origen, corresponde a centros de elipse, y la rama que pasa por P corresponde a centros de hipérbola.

D 128- Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de la hipérbola $2xy = c^2$, cuya longitud es constante e igual a $2d$.

Solución: Sean dos puntos de la hipérbola $\left(c\alpha, \frac{c}{2\alpha}\right)$, $\left(c\beta, \frac{c}{2\beta}\right)$, siendo su punto medio (x,y). Luego se verifica que: $2x = c(\alpha+\beta)$, $2y = \frac{c(\alpha+\beta)}{2\alpha\beta}$. De donde se obtiene que: $\alpha+\beta = \frac{2x}{c}$, $\alpha\beta = \frac{x}{2y}$. Como $(c\alpha - c\beta)^2 + \left(\frac{c}{2\alpha} - \frac{c}{2\beta}\right)^2 = 4d^2$, introduciendo en esta ecuación los valores anteriores y operando, se tiene: $(2xy - c^2)(x^2+y^2) - 2d^2xy = 0$. Se ha dibujado este lugar para el caso $c = 1$, $d = 2$; se ha incluido en puntos la hipérbola dada.



D 129- Se da un número primo p que es la base de un triángulo. Uno de los ángulos adyacentes es de 60º. Encontrar los otros dos lados sabiendo que son números enteros.

Solución: $x^2 = y^2 + p^2 - 2py\cos 60º = y^2 - py + p^2$. La curva $x^2 - y^2 - p^2 + py = 0$, es una hipérbola de centro $\left(0, \frac{p}{2}\right)$ y cuyas asíntotas son: $x - y + \frac{p}{2} = 0$, $x + y - \frac{p}{2} = 0$. Por tanto, se tiene que cumplir que: $(2x - 2y + p)(2x + 2y - p) = 3p^2$. Se dan los siguientes casos:

Caso a): $2x - 2y + p = 1$, $2x + 2y - p = 3p^2$, de donde: $x = \frac{3p^2+1}{4}$, $y = \frac{3p^2+2p-1}{2}$. Las soluciones se recogen en el siguiente cuadro:

p	1	3	5	7	11	…
x	1	7	19	37	91	…
y	1	8	21	40	96	…

Caso b): $2x - 2y + p = 3$, $2x + 2y - p = p^2$, de donde: $x = \frac{p^2+3}{4}$, $y = \frac{p^2+2p-3}{4}$. Las soluciones se recogen en el siguiente cuadro:

p	3	5	7	11	13	…
x	3	7	13	31	43	…
y	3	8	15	35	48	…

Caso c): $2x - 2y + p = p$, $2x + 2y - p = 3p$, de donde: $x = p$, $y = p$. Las soluciones se recogen en el siguiente cuadro:

p	1	2	3	5	7	…
x	1	2	3	5	7	…
y	1	2	3	5	7	…

Caso d): $2x - 2y + p = 3p$, $2x + 2y - p = p$, de donde: $x = y = p$, como en el caso c.

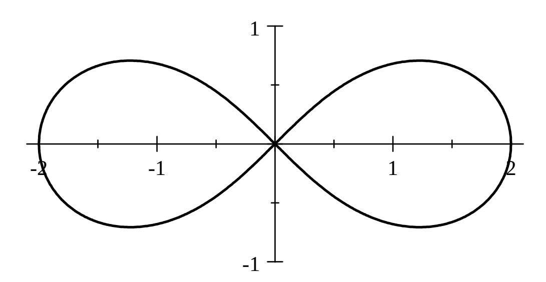
Caso e): $2x - 2y + p = p^2$, $2x + 2y - p = 3$, de donde: $x = \frac{3+p^2}{4}$, $y = \frac{p^2+2p-3}{4}$, como en el caso b.

Caso f): $2x - 2y + p = 3p^2$, $2x + 2y - p = 1$, de donde: $x = \frac{3p^2+1}{4}$, $y = \frac{1+2p-3p^2}{4}$, solución no

válida, pues para $p > 1, y < 0$.

D 130- Hallar la ecuación general de la hipérbola equilátera que tiene por centro el origen $(0,0)$, y pasa por $(2,0)$. Hallar el lugar geométrico de sus vértices.

Solución: Las asíntotas son: $y - mx = 0$, $x + my = 0$. La ecuación general es: $(y - mx)(x + my) + \lambda = 0$. Por pasar por $(2,0)$, $\lambda = 4$. Luego la ecuación de la hipérbola equilátera es: $m(x^2 - y^2) + (m^2 - 1)xy - 4m = 0$. Los ejes son: $y = \frac{m-1}{m+1}x$, $y = -\frac{m+1}{m-1}x$, de donde $m = \frac{x+y}{x-y}$. Sustituyendo este valor, se tiene el lugar pedido: $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 4x^2 + 4y^2 = 0$ (lemniscata), cuyo dibujo se incluye a continuación:



D 131- Se considera la hipérbola que tiene por asíntota el eje OY, pasa por $(a,0)$, y tiene un foco en el eje OX. Se pide 1º) Ecuación general de la hipérbola. 2º) Lugar geométrico del punto de intersección de la directriz correspondiente al foco citado, con la otra asíntota.

Solución: 1º) Se tiene: foco $(\alpha,0)$, centro $(0,\beta)$, eje: $\beta x + \alpha y - \alpha\beta = 0$, asíntota: $x = 0$, segunda asíntota: $y - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta}x - \beta = 0$. La ecuación de la hipérbola es: $x\left(y - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta}x - \beta\right) + \lambda = 0$. Para que $y = \pm i(x - \alpha)$, sea tangente, se tiene: $\lambda = \frac{\alpha\beta}{2}$. Para que pase por $(a,0)$, $\beta = \frac{\pm a\alpha}{a - \alpha}$. La ecuación pedida es: $\alpha(\alpha - 2a)x^2 - 2a(a - \alpha)xy + 2a^2\alpha x - a^2\alpha^2 = 0$. 2º) La directriz es: $xf'_x + yf'_y + zf'_z = 0$, es decir: $(\alpha - a)x + ay = 0$, de donde: $\alpha = \frac{a(x-y)}{x}$. Sustituyendo en la ecuación de la segunda asíntota los valores de α y β, se tiene el lugar pedido: $x^2 + y^2 - 2ax + 2ay = 0$. Si se toma para β el valor $\frac{-a\alpha}{a - \alpha}$, la ecuación del lugar es: $x^2 + y^2 - 2ax + 2ay = 0$. Es decir, el lugar es $x^2 + y^2 - 2ax \pm 2ay = 0$.

D 132- Se considera una hipérbola equilátera y una circunferencia tangente a las dos asíntotas. Hallar el lugar geométrico de los puntos de intersección de las tangentes al círculo, trazadas desde las proyecciones de un punto A de la hipérbola sobre sus asíntotas.

Solución: Siendo ortogonales las asíntotas de la hipérbola equilátera, se toman como ejes coordenados, con lo que su ecuación es: $xy - a = 0$, y la ecuación de la circunferencia en coordenadas homogéneas es: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2bxz - 2byz + b^2z^2 = 0$, en donde a y b son valores conocidos. Siendo (α,β,γ) un punto del lugar, la ecuación del conjunto de las tangentes a la circunferencia, trazadas desde él, es: $(xf'_\alpha + yf'_\beta + zf'_\gamma)^2 - 4f(x,y,z) \cdot f(\alpha,\beta,\gamma) = 0$. Cortando el conjunto de las tangentes por $y = 0$, se tiene: $(xf'_\alpha + zf'_\gamma)^2 - 4f(x,0,z) \cdot f(\alpha,\beta,\gamma) = 0$. Desarrollando esta ecuación, se tiene que el producto de sus dos raíces es: $x_1x_2 = \frac{f'^2_\gamma - 4f(0,0,1) \cdot f(\alpha,\beta,\gamma)}{f'^2_\alpha - 4f(1,0,0) \cdot f(\alpha,\beta,\gamma)} = \frac{2b^2\alpha}{2b - \beta}$. Procediendo análogamente para $x = 0$, se tiene que: $y_1y_2 = \frac{f'^2_\gamma - 4f(0,0,1) \cdot f(\alpha,\beta,\gamma)}{f'^2_\beta - 4f(0,1,0) \cdot f(\alpha,\beta,\gamma)} = \frac{2b^2\beta}{2b - \alpha}$. Como de acuerdo con la ecuación de la hipérbola se tiene que: $x_1y_1 = x_2y_2 = a$, el producto: $x_1y_1x_2y_2 = a^2$, por lo que se tiene que: $\frac{4\alpha\beta b^4}{(2b - \beta)(2b - \alpha)} = a^2$. Sustituyendo (α,β) por (x,y), la ecuación pedida es: $(4b^4 - a^2)xy + 2a^2bx + 2a^2by - 4a^2b^2 = 0$. Se trata de una hipérbola equilátera con centro en la primera bisectriz.

D 133- Hallar la ecuación de la hipérbola equilátera definida por el foco $(-1,2)$ y su directriz $y - x = 0$.

Solución: La ecuación focal es: $(x+1)^2 + (y-2)^2 = k(y-x)^2$. Siendo $e^2 = 2k = 2$, $k = 1$. La ecuación es: $2xy + 2x - 4y + 5 = 0$.

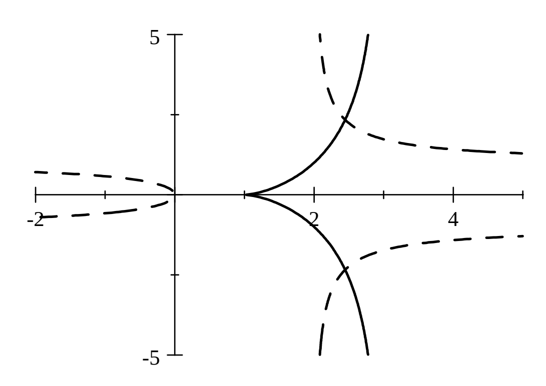
D 134- Hallar la ecuación de la hipérbola que tiene por asíntotas las rectas $x + y + 1 = 0$, $2x - y + 2 = 0$, y

que pasa por el origen.

Solución: $(x+y+1)(2x-y+2)=2$, es decir: $2x^2-y^2+xy+4x+y=0$.

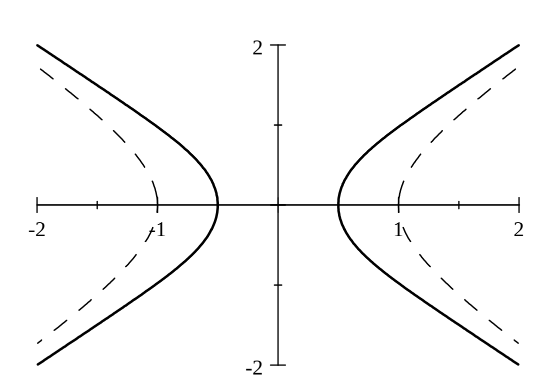
D 135- 1º) Hallar la ecuación general de las hipérbolas de vértice el origen de coordenadas, siendo la recta $x-a=0$, una de sus asíntotas. 2º) Hallar el lugar de la proyección del segundo vértice sobre la segunda asíntota. 3º) Hallar el lugar de los focos.

Solución: 1º) Sea (a,λ) el centro de la hipérbola. Su eje es: $\lambda x-ay=0$. La segunda asíntota es la simétrica de $x-a=0$ respecta al eje, es decir: $(a^2-\lambda^2)x+2a\lambda y-a^3-a\lambda^2=0$. La ecuación de la hipérbola es: $(x-\alpha)[(a^2-\lambda^2)x+2a\lambda y-a^3-a\lambda^2]+\mu=0$. Obligando a que pase por $(0,0)$: $(a^2-\lambda^2)x^2+2a\lambda xy-2a^3x-2a^2\lambda y=0$. 2º) El segundo vértice es $(2a,2\lambda)$, y las coordenadas de la proyección: $\left(\dfrac{a(a^2+3\lambda^2)}{a^2+\lambda^2},\dfrac{2\lambda^3}{a^2+\lambda^2}\right)$. Eliminando λ, se obtiene la ecuación del lugar de la proyección: $(x^2+y^2)(x-3a)+a^2(3x-a)=0$. 3º) Las coordenadas del foco son $F(a\mu,\lambda\mu)$. Haciendo que las rectas isótropas que pasan por F sean tangentes a la hipérbola, se tiene el lugar: $y^2(x-2a)-a^2x=0$. 4º) Se han dibujado los lugares geométricos para el caso $a=1$, en línea continua el lugar del punto 2º, y en línea de trazos el del punto 3º.



D 136- Se considera la hipérbola $x^2-y^2=a^2$, y una infinidad de círculos concéntricos con ella. A cada uno de estos círculos se le trazan las tangentes que sean, simultáneamente, normales a la hipérbola. Hallar el lugar geométrico del punto medio de los puntos de contacto y de incidencia.

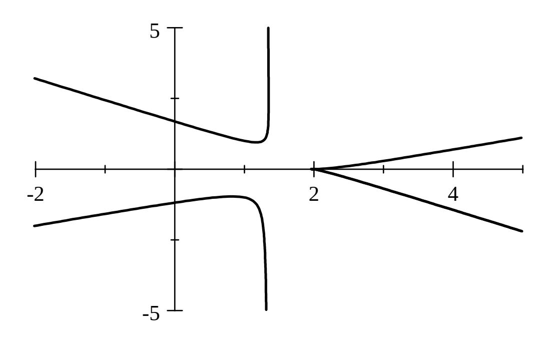
Solución: Sea un punto de la hipérbola: $\left(\lambda,\sqrt{\lambda^2-a^2}\right)$. La ecuación de la normal en este punto, es: $\lambda y+\sqrt{\lambda^2-a^2}\,x-2\lambda\sqrt{\lambda^2-a^2}=0$. Su perpendicular desde el origen es: $y=\dfrac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-a^2}}x$. Ambas rectas se cortan en: $\left(\dfrac{2\lambda(\lambda^2-a^2)}{2\lambda^2-a^2},\dfrac{2\lambda^2\sqrt{\lambda^2-a^2}}{2\lambda^2-a^2}\right)$. Las coordenadas del punto medio vienen dadas por: $2x=\lambda+\dfrac{2\lambda(\lambda^2-a^2)}{2\lambda^2-a^2}$, $2y=\sqrt{\lambda^2-a^2}+\dfrac{2\lambda^2\sqrt{\lambda^2-a^2}}{2\lambda^2-a^2}$. Eliminando λ, se obtiene el lugar pedido: $4(x^2+y^2)^2(x^2-y^2)=a^2[3(x^2-y^2)-a^2]^2$. Se ha dibujado este lugar para el caso $a=1$, incluyendo en trazos la hipérbola dada.



D 137- En ejes rectangulares se da el punto A sobre OX, y el punto B sobre OY. Por A se traza una recta cualquiera AR de coeficiente angular m. Se pide: 1º) Ecuación de la hipérbola H tangente a OX en el origen O de coordenadas, que pasa por B, y de asíntota AR. 2º) Al variar m, hallar el lugar del punto de

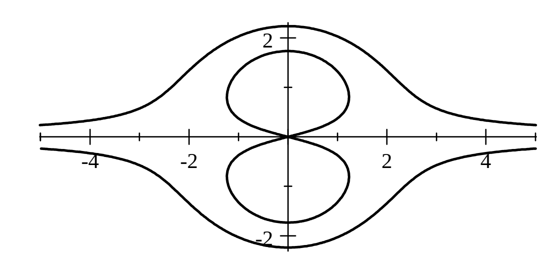
encuentro de la tangente en B a la hipérbola, con la asíntota AR. 3º) Se considera el círculo que pasa por OAB, y que corta a la hipérbola en $OBPQ$. Hallar la ecuación de PQ y el lugar del punto de intersección de PQ con AR.

Solución: 1º) Sea $A(a,0)$, $B(0,b)$, $AR \equiv y = m(x-a)$. La ecuación de la hipérbola, es: $H \equiv y(y-mx+am)+\lambda(y-mx)^2 = 0$. Por pasar por B, $\lambda = \frac{-b-am}{b}$, con lo que se tiene que: $H \equiv (bm+am^2)x^2-(b+2am)xy+ay^2-aby = 0$. 2º) La tangente trazada en B es: $y-b = \frac{b+2am}{b}x$. Eliminando m entre esta ecuación y la de AR, se tiene el lugar pedido: $bx^2+axy+a^2y-a^2b = 0$. 3º) La ecuación del círculo es: $\Gamma \equiv x^2+y^2-ax-by = 0$. Se tiene; $H+\mu\Gamma = x \cdot PQ$. Como $\mu = -a$, la ecuación de PQ es: $(am^2+bm-a)x-(2am+b)y+a^2 = 0$. El lugar de la intersección de PQ con AR, es: $ax^3-2bx^2y-3axy^2-3a^2x^2+3abxy+2a^2y^2+3a^3x-a^2by-a^4 = 0$. Se ha dibujado este lugar para el caso $a = 2$, $b = 1$.



D 138- Hallar el lugar geométrico del centro de la hipérbola equilátera de magnitud constante que pasa por dos puntos fijos.

Solución: Sea la ecuación de la hipérbola $Ax^2-Ay^2+2Bxy+2Cx+2Dy+F = 0$, y sean los puntos dados $(d,0)$ y $(-d,0)$. Por pasar por ellos: $F = -Ad^2$, $C = 0$, con lo que la ecuación queda: $Ax^2-Ay^2+2Bxy+2Dy-Ad^2 = 0$. En la hipérbola equilátera canónica $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2} = 1$, se tienen los siguientes valores de los invariantes: $I_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{a^2} \end{vmatrix} = \frac{-1}{a^4}$, $I_3 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{a^4}$. Luego $I_2' = \begin{vmatrix} A & B \\ B & -A \end{vmatrix} = -A^2-B^2 = \frac{-1}{a^4}$, $B^2 = \frac{1}{a^4}-A^2$; $I_3' = \begin{vmatrix} A & B & 0 \\ B & -A & D \\ 0 & D & -Ad^2 \end{vmatrix} = A^3d^2-AD^2+AB^2d^2 =$ $= \frac{1}{a^4}$, $D^2 = A^2d^2+\left(\frac{1}{a^4}-A^2\right)d^2-\frac{1}{a^4A}$. Como $\frac{1}{2}f_x' = Ax+By = 0$, $\frac{1}{2}f_y' = -Ay+Bx+D = 0$, las coordenadas del centro son: $x = \frac{-BD}{A^2+B^2}$, $y = \frac{AD}{A^2+B^2}$. Sustituyendo estos valores y operando, se obtiene la ecuación del lugar geométrico pedido: $(x^2+y^2-d^2)^2y^2-a^4(x^2+y^2) = 0$. En coordenadas polares: $\rho^2 = d^2+\frac{a^2}{\sin\theta}$. Se ha dibujado este lugar para el caso $a = 1$, $d = 2$.



D 139- Se da el punto $A(a,0)$ en ejes rectangulares. Se considera el círculo Γ tangente a OX en A, y que encuentra a OY en B y C. La hipérbola equilátera que pasa por A,B,C y por el centro del círculo Γ, encuentra al círculo en un cuarto punto M. Hallar los lugares geométricos de M y del centro de la hipérbola.

Solución: Siendo (a,λ) las coordenadas del centro de Γ, su ecuación es: $\Gamma \equiv (x-a)^2+(y-\lambda)^2-\lambda^2 = x^2+y^2-2ax-2\lambda y+a^2 = 0$. De donde $\lambda = \dfrac{x^2+y^2-2ax+a^2}{2y}$. Siendo $M(\alpha,\beta)$, la ecuación de AM es: $AM \equiv y(\alpha-a)-\beta(x-a) = 0$. La ecuación de la hipérbola es $H \equiv x^2+y^2-2ax-2\lambda y+a^2+ \mu x[y(\alpha-a)-\beta(x-a)] = 0$, puesto que pasa por los puntos de corte de Γ con OY y AM. Obligando a que H pase por (a,λ), se tiene: $\mu = \dfrac{\lambda}{a(\alpha-a)}$. Y por ser equilátera: $\lambda = \dfrac{2a(\alpha-a)}{\beta}$. Igualando los dos valores obtenidos de λ, y sustituyendo (α,β) por (x,y), se tiene la ecuación del lugar geométrico de M: $\dfrac{x^2+y^2-2ax+a^2}{2y} = \dfrac{2a(x-a)}{y}$, es decir, operando: $x^2+y^2-6ax+5a^2 = 0$. La ecuación de H es: $x^2-y^2-\dfrac{2(\alpha-a)}{\beta}xy+\dfrac{4a(\alpha-a)}{\beta}y-a^2 = 0$. Derivando respecto a x, $H'_x = 2x-\dfrac{2(\alpha-a)}{\beta}y = 0$, y respecto a y, $H'_y = -2y-\dfrac{2(\alpha-a)}{\beta}x+\dfrac{4a(\alpha-a)}{\beta} = 0$. Eliminando α, se tiene la ecuación del lugar del centro de H: $x^2+y^2-2ax = 0$.

D 140- Un ángulo recto AMB corta a los ejes coordenados en los puntos $A(a,0)$ y $B(0,b)$, siendo M variable. 1º) Hallar la ecuación general de las hipérbolas equiláteras que pasan por el origen O, y tienen por ejes las rectas MA y MB. 2º) Hallar el lugar de las proyecciones del origen sobre las asíntotas.

Solución:

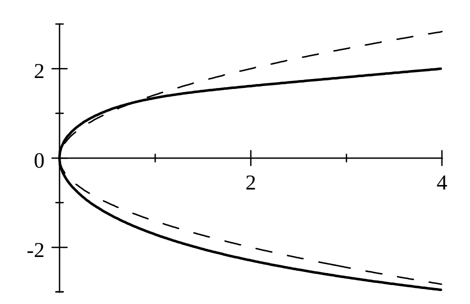
1º) $A(a,0)$, $B(0,b)$, $BM \equiv y-\lambda x-b = 0$, $AM \equiv \lambda y+x-a = 0$. Las bisectrices de estas dos rectas, son: $(\lambda+1)y+(1-\lambda)x-a-b = 0$, $(1-\lambda)y-(1+\lambda)x+a-b = 0$. La ecuación de la hipérbola es: $[(\lambda+1)y+(1-\lambda)x-a-b][(1-\lambda)y-(1+\lambda)x+a-b]+\mu = 0$. Como pasa por $(0,0)$, la ecuación queda: $(1-\lambda^2)y^2-(1-\lambda^2)x^2-4\lambda xy+2(a+b\lambda)x-2(b+a\lambda)y = 0$. 2º) La proyección del origen sobre $(\lambda+1)y+(1-\lambda)x-a-b = 0$, viene dada por su intersección con $(1-\lambda)y-(\lambda+1)x = 0$, de donde: $\lambda = \dfrac{y-x}{y+x}$, y el lugar es: $2x^2+2y^2-(a+b)(x+y) = 0$. Procediendo de la misma forma con la segunda asíntota, se tiene el lugar: $2x^2+2y^2-(a-b)(x-y) = 0$.

D 141- Se da un punto F y una recta r situada a la distancia a de F. Hallar: 1º) Ecuación de las hipérbolas de foco F y asíntota r. 2º) Desde el centro de cada hipérbola se traza una perpendicular a r, que se prolonga hasta su intersección M con la directriz correspondiente a F. Hallar el lugar de M. 3º) Hallar el lugar de las proyecciones de F sobre la segunda asíntota de las hipérbolas consideradas.

Solución: 1º) Sea $r \equiv y = 0$, $F(0,a)$, centro $(\lambda,0)$, directriz: $\lambda x-ay-\lambda^2+\mu(\lambda^2+a^2) = 0$. Ecuación focal de la hipérbola: $x^2+(y-a)^2 = e^2(\lambda x-ay-\lambda^2+\mu)^2$. Obligando a que el centro sea $(\lambda,0)$ y la asíntota sea r, se tiene que: $e^2 = \dfrac{1}{\lambda^2}$. Por tanto, sustituyendo este valor, la ecuación focal de la hipérbola es: $(\lambda^2-a^2)y^2+2a\lambda xy-2a\lambda^2 y+\lambda^2 a^2 = 0$. 2º) La directriz es: $\lambda x-ay = 0$. Como la perpendicular a r por $(\lambda,0)$ es: $\lambda = x$, el lugar de M es: $x^2-ay = 0$. 3º) La segunda asíntota es: $y = \dfrac{2a\lambda}{a^2-\lambda^2}(x-\lambda)$. La perpendicular por F es: $y-a = \dfrac{\lambda^2-a^2}{2a\lambda}x$, de donde: $\lambda = \dfrac{x^2+y^2-ay}{x}$, y la ecuación del lugar pedido es: $x^4+y^4+2x^2y^2-4ax^2y-4ay^3+a^2x^2+5a^2y^2-2a^3y = (x^2+y^2-2ay+a^2)(x^2+y^2-2ay) = \left[x^2+(y-a)^2\right](x^2+y^2-2ay) = 0$. Como el primer factor corresponde al punto F, la ecuación del lugar es la circunferencia: $x^2+y^2-2ay = 0$.

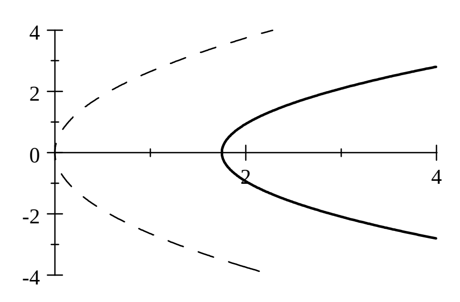
D 142- Desde un punto $P(a,b)$ se traza una secante arbitraria a la parábola $y^2 = 2px$. Por el punto medio de la cuerda, se traza una perpendicular a dicha cuerda, y por el vértice de la parábola se traza una paralela a la cuerda. Hallar el lugar geométrico de los puntos de intersección de esta paralela con la citada perpendicular.

Solución: La ecuación de la secante es: $y - b = m(x - a)$. Las ordenadas de la intersección con la parábola vienen dadas por la ecuación: $my^2 - 2py - ma + b = 0$, siendo la suma de las ordenadas: $\frac{2p}{m}$, y la de las abscisas: $\frac{\frac{2p}{m} + 2ma - 2b}{m}$. Luego el punto medio es: $\left(\frac{2p + 2m^2a - 2mb}{2m^2}, \frac{p}{m}\right)$. La ecuación de la perpendicular es: $y - \frac{p}{m} = \frac{-1}{m}\left(x - \frac{p + m^2a - mb}{m^2}\right)$, y la de la paralela es: $y = mx$. Eliminado m entre estas dos ecuaciones, se obtiene el lugar pedido: $x^2y^2 + y^4 - px^3 + bx^2y - (a+p)xy^2 = 0$. Se ha dibujado este lugar para el caso $a = 2$, $b = p = 1$, incluyéndose en trazos la parábola dada.



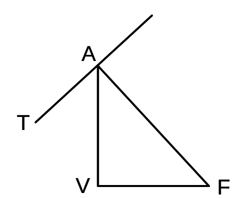
D 143- Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas focales de la parábola $y^2 = 7x$.

Solución: El foco es $\left(\frac{7}{4}, 0\right)$. La ecuación de una recta variable que pasa por el foco, es: $y = m\left(x - \frac{7}{4}\right)$. Las coordenadas del punto medio de los puntos de intersección de esta recta con la parábola, son: $x = \frac{7}{4}\left(1 + \frac{2}{m^2}\right)$, $y = \frac{7}{2m}$. Eliminando m entre estas dos últimas igualdades, se tiene la ecuación del lugar: $8y^2 - 28x + 49 = 0$. Se ha dibujado este lugar, incluyendo en trazos la parábola dada.



D 144- Hallar el lugar geométrico de los focos de las parábolas que tienen por vértice el punto $(2,2)$, y por tangente la recta $x + y = 0$.

Solución:



Sea el foco $F(\alpha, \beta)$, y sea la tangente $AT \equiv x + y = 0$. La proyección de F sobre la tangente AT, ha de caer sobre la tangente en el vértice V, por lo que el triángulo VAF es rectángulo. Luego el foco F describe una parábola de vértice V y cuyo eje es perpendicular a la tangente AT. Analíticamente, se tiene que:

$VF \equiv y-2 = \dfrac{2-\beta}{2-\alpha}(x-2)$, $VA \equiv y-2 = \dfrac{\alpha-2}{2-\beta}(x-2)$, AF (perpendicular a AT)$\equiv y-\beta = x-\alpha$. Las coordenadas de A, intersección de FA y AT, son: $\left(\dfrac{2\alpha+2\beta-8}{\alpha-\beta}, \dfrac{-2\alpha-2\beta+8}{\alpha-\beta}\right)$. Haciendo que dichas coordenadas estén en AF, y cambiando (α,β) por (x,y), se tiene la ecuación del lugar geométrico pedido: $x^2+y^2-2xy-4x-4y+16 = 0$.

D 145- Dada la circunferencia $x^2+y^2-2Ry = 0$, hallar el lugar geométrico de los focos de las parábolas osculadoras a dicha circunferencia en el origen $(0,0)$.

Solución: Derivando en la ecuación de la circunferencia, y particularizando para el origen $(0,0)$, se tiene: $y' = \dfrac{-2x}{2y-2R} = 0$, $y'' = \dfrac{-1-y'^2}{y-R} = \dfrac{1}{R}$. Siendo (α,β) el foco de la parábola, su ecuación focal es: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = \dfrac{(x+ny+p)^2}{1+n^2}$. Para que pase por $(0,0)$: $\alpha^2+\beta^2 = \dfrac{p^2}{1+n^2}$. Derivando en la ecuación de la parábola, particularizando las derivadas para $(0,0)$, e igualándolas a las obtenidas para la circunferencia, se tiene: $-\alpha = \dfrac{p}{1+n^2}$, $1-\dfrac{\beta}{R} = \dfrac{1+\dfrac{np}{R}}{1+n^2}$. Operando: $p = \dfrac{-\alpha^2-\beta^2}{\alpha}$, $n = \dfrac{\beta-R}{\alpha}-\dfrac{R}{p}$. Sustituyendo estos valores, y cambiando (α,β) por (x,y), se tiene la ecuación del lugar pedido: $y(2x^2+2y^2-Ry) = 0$, que está compuesto por el eje $y = 0$ y por la circunferencia $2x^2+2y^2-Ry = 0$.

D 146- Hallar la ecuación de la parábola P que pasa por $(2,-3)$, es tangente a los ejes coordenados, y su punto del infinito es el de la recta $x+2y+1 = 0$.

Solución: $P \equiv (x+2y+\mu)^2+\lambda y = 0$. Obligando a que $x = 0$ sea tangente, se tiene: $\lambda = -8\mu$. Obligando a que pase por $(2,-3)$, se tiene: $\mu = -8\pm 4\sqrt{3}$. La ecuación pedida es: $x^2+4y^2+4xy+\left(-16\pm 8\sqrt{3}\right)x+\left(32\mp 16\sqrt{3}\right)y+112\mp 64\sqrt{3} = 0$ (se trata de dos parábolas).

D 147- Hallar la ecuación de la parábola tangente al eje OX en el origen, y cuyo eje es: $x+2y-2 = 0$.

Solución: La ecuación de las parábolas tangentes a OX en el punto de intersección con $x+2y = 0$, es: $(x+2y)^2+\lambda y = 0$. La ecuación del eje es: $9x+18y+2\lambda = 0$. Luego $\lambda = -9$. La ecuación pedida es: $x^2+4y^2+4xy-9y = 0$.

D 148- Hallar la ecuación de las parábolas P que pasan por los puntos $(0,1)$ y $(3,0)$, y son tangentes a los ejes coordenados.

Solución: $P \equiv xy+\lambda(x+3y-3)^2 = 0$. Obligando a que sea parábola: $\begin{vmatrix} \lambda & \dfrac{1+6\lambda}{2} \\ \dfrac{1+6\lambda}{2} & 9\lambda \end{vmatrix} = 0$, de donde: $\lambda = \dfrac{-1}{12}$. La ecuación pedida es: $x^2+9y^2-6xy-6x-18y+9 = 0$.

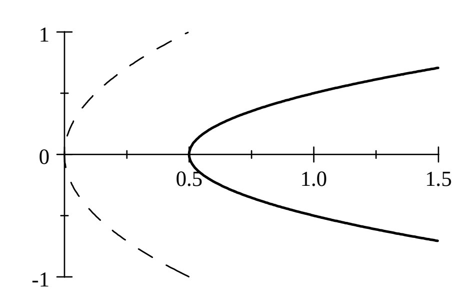
D 149- Se da una parábola P, un punto A sobre ella, y una recta r. Una secante variable que pasa por A, corta a P en Q, y a r en R. Hallar el lugar geométrico de la intersección de la paralela a r trazada por Q, con el diámetro que pasa por R.

Solución: Sea A el origen de coordenadas, y sea $r \equiv x-a = 0$. Una cónica que pasa por O es: $x^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey = 0$. Obligando a que esta cónica sea parábola: $B = C^2$, y la ecuación es: $P \equiv x^2+C^2y^2+2Cxy+2Dx+2Ey = 0$ (los coeficientes C, D y E son conocidos). Sea la recta $AP \equiv y-mx = 0$. Esta recta corta a P en Q cuyas coordenadas son: $\left(\dfrac{-2(D+mE)}{(1+mC)^2}, \dfrac{-2m(D+mE)}{(1+mC)^2}\right)$, y corta a r en $R(a,ma)$. La paralela a r trazada por Q es: $x = \dfrac{-2(D+mE)}{(1+mC)^2}$. El diámetro que pasa por R es: $y-ma = \dfrac{x-a}{mC}$. Eliminando m entre estas dos últimas ecuaciones, se tiene la ecuación del lugar pedido: $Cx(x+Cy)^2+2aE(x+Cy)+2a^2(CD-E) = 0$.

D 150- Hallar la ecuación del lugar geométrico de las proyecciones ortogonales del foco de una parábola sobre sus normales.

Solución: Sea la parábola $y^2-2px = 0$. Su foco es $\left(\dfrac{p}{2},0\right)$, y su normal en un punto de la curva

$\left(\frac{t^2}{2p}, t\right)$, es: $y - t = \frac{-t}{p}\left(x - \frac{t^2}{2p}\right)$. La perpendicular por el foco, es: $y = \frac{p}{t}\left(x - \frac{p}{2}\right)$. Eliminando t entre estas dos ecuaciones, se tiene el lugar pedido: $8y^2[2(x^2+y^2) - 3px + p^2] - p(2x-p)^3 = 0$. Se ha dibujado este lugar para el caso $p = 1$, incluyendo en línea de trazos la parábola inicial.



D 151- Se considera la familia de parábolas $y = ax^2 + bx + \frac{b^2}{8}$, siendo a y b parámetros. Encontrar la relación entre a y b para que la envolvente de la familia con un parámetro tenga un contacto de segundo orden con cada involuta.

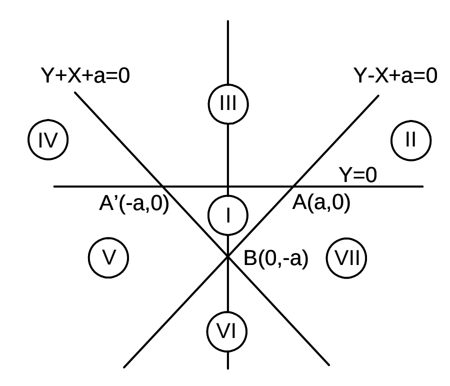
Solución: La ecuación general de las involutas viene dada por el conjunto de las dos ecuaciones: $y = ax^2 + bx + \frac{b^2}{8}$, $b = f(a)$. La envolvente se obtiene de estas dos ecuaciones: $y = ax^2 + bx + \frac{b^2}{8}$, $x^2 + x\frac{db}{da} + \frac{b}{4} \cdot \frac{db}{da} = 0$. La ecuación de la tangente a la involuta es: $y' = 2ax + b$, que es también tangente a la envolvente. Las dos primeras derivadas de la involuta, son: $y' = 2ax + b$, $y'' = 2a$. Y las de la envolvente: $y' = 2ax + b$, $y'' = 2x\frac{da}{dx} + 2a + \frac{db}{da} \cdot \frac{da}{dx}$. Como las derivadas segundas han de ser iguales: $2a = 2x\frac{da}{dx} + 2a + \frac{db}{da} \cdot \frac{da}{dx}$, de donde $\frac{db}{da} = -2x$. Introduciendo este valor en la ecuación $x^2 + x\frac{db}{da} + \frac{b}{4} \cdot \frac{db}{da} = 0$, se tiene: $x^2 - 2x^2 + x^2 - 2x \cdot \frac{b}{4} = 0$. Luego: $b = -2x$, y por tanto: $\frac{db}{da} = b$. De donde: $\frac{db}{b} = da$. Integrando: $\ln b = C \cdot a$, es decir: $b = C \cdot e^a$.

D 152- Se da un círculo Γ y una parábola Π. Se considera el cuadrilátero formado por sus tangentes comunes. Hallar la envolvente del eje de las cónicas inscritas en dicho cuadrilátero.

Solución: Tomando como origen de coordenadas el centro O de Γ, y como eje OX la paralela por O al eje de Π, la ecuación de Γ es: $x^2 + y^2 - R^2 = 0$, y la de Π: $y^2 - 2ax - 2by + c = 0$. Sus respectivas ecuaciones tangenciales, son: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & u \\ 0 & 1 & 0 & v \\ 0 & 0 & -R^2 & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -a & u \\ 0 & 1 & -b & v \\ -a & -b & c & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0$. Operando, se tiene: $\Gamma \equiv R^2(u^2+v^2) - w^2 = 0$, $\Pi \equiv (b^2-c)u^2 + a^2v^2 - 2abuv - 2auw = 0$. La ecuación tangencial de la cónica inscrita en el cuadrilátero formado por las tangentes comunes al círculo Γ y a la parábola Π, es: $\Phi \equiv \lambda[R^2(u^2+v^2) - w^2] + (b^2-c)u^2 + a^2v^2 - 2abuv - 2auw = 0$. Las coordenadas tangenciales de sus ejes vienen dadas por las ecuaciones: $\frac{\Phi'_u}{u} = \frac{\Phi'_v}{v} = \frac{\Phi'_w}{w}$. Como las derivadas de Φ, son: $\Phi'_u = 2u(\lambda R^2 + b^2 - c) - 2abv - 2aw$, $\Phi'_v = 2v(\lambda R^2 + a^2) - 2abu - 2aw$, $\Phi'_w = -2\lambda w - 2au$, se tiene que: $\frac{2u(\lambda R^2 + b^2 - c) - 2abv - 2aw}{u} = \frac{2v(\lambda R^2 + a^2) - 2abu - 2aw}{v} = \frac{-2\lambda w - 2au}{w}$. De la primera igualdad, en la que λ queda eliminada, se obtiene la ecuación tangencial de la envolvente de los ejes: $abu^2 - abv^2 + (b^2 - c - a^2)uv - avw = 0$. Se trata de una parábola, pues no tiene término en w^2.

D 153- Se dan en ejes rectangulares los puntos $A(a,0)$, $A'(-a,0)$, $B(0,-a)$. 1º) Hallar la ecuación general de las parábolas circunscritas al triángulo $AA'B$, tomando como parámetro el coeficiente angular m del eje. 2º) Demostrar que por cada punto del plano, pasan dos parábolas, y distinguir las regiones del plano en que las dos parábolas son reales. 3º) Hallar el lugar geométrico Γ de los puntos para los que los ejes de las dos parábolas son ortogonales. 4º) Hallar el lugar del pie de la perpendicular trazada desde O a los ejes de las parábolas. 5º) Hallar el lugar de los puntos de cruce de los ejes de las dos parábolas correspondientes a puntos de la curva Γ. 6º) Demostrar que la hipérbola equilátera circunscrita al triángulo $AA'B$, y cuyos ejes son paralelos a los de las parábolas que pasan por un punto M, pasa por M.

Solución:



1º) $AB \equiv x-y-a=0$, $A'B \equiv x+y+a=0$, $AA' \equiv y=0$. La ecuación de las cónicas circunscritas a $AA'B$, es: $\lambda y(x+y+a)+\mu y(x-y-a)+(x+y+a)(x-y-a)=0$. Obligando a que la cónica sea parábola: $A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & \frac{\lambda+\mu}{2} \\ \frac{\lambda+\mu}{2} & \lambda-\mu-1 \end{vmatrix} = \lambda-\mu-1-\frac{(\lambda+\mu)^2}{4}=0$. Como la pendiente m del eje es: $m=-\frac{\lambda+\mu}{2(\lambda-\mu-1)}$, se tiene que $\lambda+\mu=\frac{-2}{m}$, $\lambda-\mu-1=\frac{1}{m^2}$. Por tanto, la ecuación de la parábola es: $m^2x^2+y^2-2mxy+a(1-m^2)y-m^2a^2=0$. 2º) Ordenando la ecuación según potencias de m, se tiene: $(x^2-ay-a^2)m^2-2xym+y(y+a)=0$. Luego para cada punto (x,y), hay dos valores de m, y por tanto hay dos parábolas de la familia que pasan por dicho punto. El discriminante de esta ecuación en m, es: $\Delta=x^2y^2-y(y+a)(x^2-ay-a^2)=ay(x+y+a)(-x+y+a)$. Estas tres rectas, $y=0$, $x+y+a=0$, $-x+y+a=0$, forman el triángulo $AA'B$, dividiendo al plano en siete regiones. A los puntos del interior del triángulo (región **I**), les corresponden dos parábolas imaginarias, igual que a las tres regiones opuestas por los vértices (regiones **II**, **IV** y **VI**). A los puntos correspondientes a las tres regiones adyacentes a los tres lados del triángulo (regiones **III**, **V** y **VII**), les corresponden dos parábolas reales. A los puntos correspondientes a las tres rectas, les corresponden una parábola real. 3º) Se ha de verificar que $m_1m_2=-1$. Por tanto el lugar Γ es: $\frac{y(y+a)}{x^2-ay-a^2}=-1$, es decir, $\Gamma \equiv x^2+y^2-a^2=0$. 4º) El eje de la parábola es: $2(m^2+1)y-2m(m^2+1)x+a(1-m^2)=0$. La intersección con $y=\frac{-1}{m}x$, da el lugar pedido: $2(x^2+y^2)^2+ay(y^2-x^2)=0$. 5º) En el punto 4º anterior, se ha incluido la ecuación de uno de los ejes. La ecuación del segundo eje es $2\left(\frac{1}{m^2}+1\right)y+2\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m^2}+1\right)x+a\left(1-\frac{1}{m^2}\right)=0$, es decir: $2m(1+m^2)y+2(1+m^2)x+am(m^2-1)=0$. Las coordenadas de la intersección de los dos ejes, son: $\left(\frac{am(1-m^2)}{(1+m^2)^2},\frac{-a(1-m^2)^2}{2(1+m^2)^2}\right)$. Eliminando m, se tiene el lugar: $x^2+y^2+\frac{a}{2}y=0$. 6º) Obligando a que la cónica del punto 1º, sea hipérbola equilátera, se tiene $\lambda=\mu$, con lo que queda la ecuación: $x^2-y^2+2\lambda xy-2ay-a^2=0$. Las pendientes de sus ejes vienen dadas por la siguiente expresión: $a_{12}m^2+(a_{11}-a_{22})m-a_{12}=\lambda m^2+2m-\lambda=0$. Como $\lambda=\frac{-x^2+y^2+2ay+a^2}{2xy}$, la ecuación que proporciona las pendientes de los ejes en función de las coordenadas de un punto del plano, es: $\frac{-x^2+y^2+2ay+a^2}{2xy}m^2+2m-\frac{-x^2+y^2+2ay+a^2}{2xy}=0$, es decir: $(-x^2+y^2+2ay+a^2)m^2+4xym-$ $-(-x^2+y^2+2ay+a^2)=0$. Como esta ecuación ha de tener las mismas raíces que la de las pendientes de las parábolas (punto 2º anterior), se tiene que: $\frac{-x^2+y^2+2ay+a^2}{x^2-ay-a^2}=\frac{4xy}{-2xy}=-\frac{-x^2+y^2+2ay+a^2}{y(y+a)}$. Luego: $x^2-ay-a^2=-y(y+a)$, es decir: $x^2+y^2-a^2=0$, que es la ecuación de Γ, con lo que queda demostrado este punto 6º.

D 154- En ejes rectangulares se da un círculo tangente a los ejes. Hallar el lugar geométrico de los focos de las parábolas tangentes a los ejes y al círculo.

Solución: La ecuación del círculo: $C \equiv (x-a)^2+(y-a)^2-a^2=0$. Un punto genérico del círculo es: $M[a(1+\cos\theta),a(1+\sin\theta)]$. La tangente al círculo en M, corta a OX en $A\left[\frac{a(\cos\theta+\sin\theta+1)}{\cos\theta},0\right]$, y a

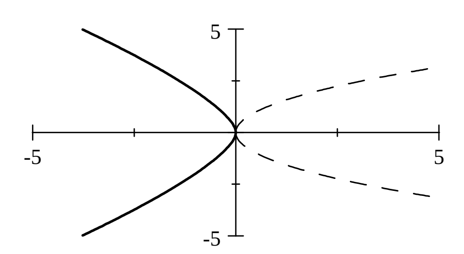
OY en $B\left[0, \dfrac{a(\cos\theta+\sin\theta+1)}{\sin\theta}\right]$. Las ecuaciones tangenciales de los vértices del triángulo OAB, son: $\dfrac{a(\cos\theta+\sin\theta+1)}{\cos\theta}u+w=0$, $\dfrac{a(\cos\theta+\sin\theta+1)}{\sin\theta}v+w=0$, $a(1+\cos\theta)u+a(1+\sin\theta)v+w=0$. De donde se deduce la ecuación tangencial de la parábola, tangente a dichos lados, que es: $\left[\dfrac{a(\cos\theta+\sin\theta+1)}{\cos\theta}u+w\right]\left[\dfrac{a(\cos\theta+\sin\theta+1)}{\sin\theta}v+w\right]-w[a(1+\cos\theta)u+a(1+\sin\theta)v+w]=0$. Simplificando: $2a^2(1+\sin\theta\cos\theta+\sin\theta+\cos\theta)uv+a\sin^2\theta(1+\sin\theta)uw+a\cos^2\theta(1+\cos\theta)vw=0$. Dividiendo por: $a(1+\sin\theta)(1+\cos\theta)$, se tiene: $2auv+(1-\cos\theta)+(1-\cos\theta)uw++(1-\sin\theta)vw=0$. Sustituyendo: $u=1$, $v=i$, $w=-z=-x-yi$, siendo (x,y) las coordenadas del foco, se tiene: $z=x+yi=\dfrac{2a(1-\sin\theta)+2a(1-\cos\theta)i}{(1-\cos\theta)^2+(1-\sin\theta)^2}$. Por tanto, se tiene que: $x=\dfrac{2a(1-\sin\theta)}{(1-\cos\theta)^2+(1-\sin\theta)^2}$, $y=\dfrac{2a(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)^2+(1-\sin\theta)^2}$. Haciendo $\lambda=x(1-\cos\theta)=y(1-\sin\theta)$, se obtiene que: $\lambda=\dfrac{2axy}{x^2+y^2}$, $\sin\theta=1-\dfrac{\lambda}{y}$, $\cos\theta=1-\dfrac{\lambda}{x}$. Luego la ecuación del lugar geométrico del foco de las parábolas, es: $\left(1-\dfrac{\lambda}{y}\right)^2+\left(1-\dfrac{\lambda}{x}\right)^2-1=0$, es decir: $(x-2a)^2+(y-2a)^2-4a^2=0$.

D 155- Hallar el lugar geométrico de los puntos desde los que se puede trazar dos tangentes a la parábola, que sean perpendiculares entre sí.

Solución: Sea la parábola $y^2=2px$. Tangente por el punto (x,y) de la parábola: $y=mx+\dfrac{p}{2m}$, es decir: $2xm^2-2ym+p=0$. Como $m_1m_2=\dfrac{p}{2x}=-1$, el lugar es: $x=\dfrac{-p}{2}$, la directriz.

D 156- Se da la parábola $\Pi\equiv y^2-2px=0$. Se traza un círculo Γ tangente a Π en el punto M, y cuyo centro está en el eje OY. Además de la tangente en M, hay otras dos tangentes comunes a Π y Γ. Hallar el lugar geométrico de P, intersección de estas dos tangentes comunes.

Solución: Las coordenadas del punto M de Π, son $M(2pt^2,2pt)$. La ecuación de la normal en M a Π, es: $y-2pt+2t(x-2pt^2)$, que corta a OY en $[0,2pt(2t^2+1)]$. El radio de Γ es $R=2pt^2\sqrt{1+4t^2}$. La ecuación del círculo Γ es: $x^2+[y-2pt(2t^2+1)]^2-4p^2t^4(1+4t^2)$, y su ecuación tangencial: $-4p^2t^4(1+4t^2)u^2+4p^2t^2(1+3t^2)v^2+4pt(1+2t^2)vw+w^2=0$. La ecuación tangencial de Π es: $pv^2-2uw=0$. Los puntos M y P forman un conjunto de puntos umbilicales asociados a Γ y Π. Luego se tiene la identidad: $\Gamma+\lambda\Pi\equiv(\alpha u+\beta v+w)(2pt^2u+2ptv+w)$, siendo el primer factor la ecuación tangencial de $P(\alpha,\beta)$, y el segundo factor la de M. De aquí se tiene: $\alpha=-2pt^2(1+4t^2)$, $\beta=2pt(1+4t^2)$, de donde eliminando t y cambiando (α,β) por (x,y) se obtiene el lugar de P: $y^4+2px(y^2+4x^2)=0$. Se ha dibujado este lugar para el caso $p=1$, incluyendo en línes de trazos la parábola dada.



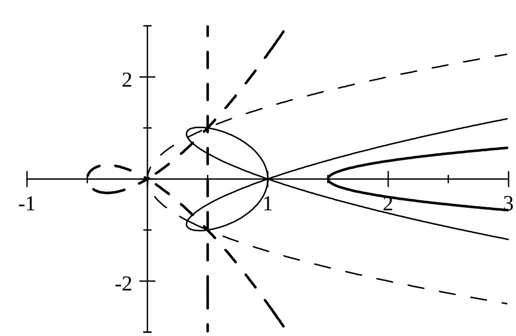
D 157- Se da la recta r de ecuación $x=a$. Se considera el haz de parábolas que pasan por el origen, cuya directriz es r. Hallar: 1º) Lugar geométrico del vértice y del foco de estas parábolas. 2º) Por un punto M del plano pasan dos de estas parábolas. Determinar la región del plano en que debe situarse M, para que las dos parábolas que pasan por M, sean reales.

Solución: 1º) Siendo el foco (α,β), la ecuación de las parábolas es: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(x-a)^2$. Como pasan por el origen se tiene que: $\alpha^2+\beta^2=a^2$, es decir que la ecuación del lugar del foco es: $x^2+y^2-a^2=0$. Como el vértice es el punto medio de la recta perpendicular trazada desde el foco sobre la directriz, se tiene que el lugar del vértice es: $(2x-a)^2+y^2-a^2=0$. 2º) Haciendo: $\alpha=a\cos\theta$, $\beta=a\sin\theta$, la ecuación del haz de parábolas, es: $(x-a\cos\theta)^2+(y-a\sin\theta)^2=(x-a)^2$, es decir: $y^2+2ax(1-\cos\theta)-2ay\sin\theta=0$. Siendo: $\tan\dfrac{\theta}{2}=t$, $\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, se tiene: $y^2+2a\dfrac{2t^2}{1+t^2}x-2a\dfrac{2t}{1+t^2}y=0$, es decir: $t^2(y^2+4ax)-4ayt+y^2=0$. Luego por cada punto (x,y) del

plano, existen dos raíces de t, y por tanto dos parábolas que pasan por dicho punto. Para que ambas sean reales, ha de verificarse que: $4a^2y^2 - y^2(y^2+4ax) > 0$ Esta región del plano corresponde a los puntos interiores de la parábola: $y^2+4ax-4a^2 = 0$.

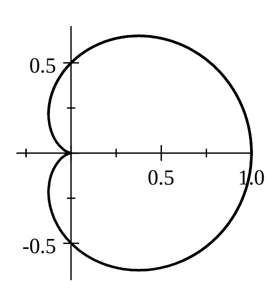
D 158- Se da la parábola $\Pi \equiv y^2 = 2px$ y el punto $A(a,0)$. Por A se traza una recta variable que encuentra a la parábola en P y Q. 1º) Hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias Γ que pasan por P, Q y O (origen de coordenadas). 2º) Hallar el lugar de la intersección de las secantes comunes a círculo y parábola, PQ y OR. 3º) Hallar el lugar de la proyección de R, cuarto punto de intersección, sobre PQ.

Solución: 1º) Recta $PQ \equiv y-\lambda(x-a) = 0$. Recta $OR \equiv y-\mu x = 0$. Ecuación de las cónicas que pasan por OPQ: $\theta(y^2-2px)+[y-\lambda(x-a)](y-\mu x) = 0$. Por ser circunferencia: $\lambda\mu = \theta+1$, $-\lambda-\mu = 0$, de donde se obtiene que: $\lambda = -\mu$, $\theta = -(1+\mu^2)$, quedando la ecuación de la circunferencia: $\Gamma \equiv \mu^2(x^2+y^2)-(2p+2p\mu^2+a\mu^2)x-\mu^2 y = 0$ Eliminando μ entre $\Gamma'_x = 0$, $\Gamma'_y = 0$, se tiene la ecuación pedida: $8py^2-2a^2x+a^2(2p+a) = 0$. 2º) Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de PQ y OR, se tiene: $2x = a$, recta que forma parte del lugar pedido. Por otra parte, hallando la ecuación del lugar geométrico de los puntos que tienen la misma polar respecto a las curvas Π y Γ, se tiene: $\frac{2\mu^2x-2p(1+\mu^2)-a\mu^2}{-2p} = \frac{\mu^2(2y-1)}{2y} = \frac{-2p-\mu^2(2p+a+1)}{-2px}$. Eliminando μ y simplificando, se tiene: $4px^3+2apx^2-a^2y^2 = 0$, que junto con $2x = a$, forman el lugar pedido. 3º) La intersección de Π y OR, da las coordenadas de R: $\left(\frac{2p}{\mu^2}, \frac{2p}{\mu}\right)$. La ecuación de PQ es: $y+\mu(x-a) = 0$. La ecuación de la perpendicular por R a PQ, es: $y-\frac{2p}{\mu} = \frac{1}{\mu}\left(x-\frac{2p}{\mu^2}\right)$. Eliminando μ entre estas dos ecuaciones, se tiene la ecuación del lugar pedido: $y^4+y^2(x-a)(x+2p)-2p(x-a)^3 = 0$. 4º) Se han dibujado los lugares geométricos para el caso $a = p = 1$: en línea continua gruesa el lugar del punto 1º, en línea de trazos gruesos el del punto 2º, en línea continua fina el del punto 3º, y se ha incluido en línea de trazos finos la parábola dada.



D 159- Hallar el lugar geométrico del vértice de las parábolas de foco O (origen de coordenadas), y que pasan por el punto dado $A(a,0)$.

Solución: Sea el vértice: $V(\alpha,\beta)$; el eje: $y = \frac{\beta}{\alpha}x$; la directriz: $y-2\beta = \frac{-\alpha}{\beta}(x-2\alpha)$, es decir: $\alpha x+\beta y-2\alpha^2-2\beta^2 = 0$. La ecuación focal de la parábola, es: $x^2+y^2 = \frac{(\alpha x+\beta y-2\alpha^2-2\beta^2)^2}{\alpha^2+\beta^2}$. Obligando a que pase por A, y cambiando (α,β) por (x,y), se tiene la ecuación del lugar pedido: $a^2(x^2+y^2)-(ax-2x^2-2y^2)^2 = 0$. Pasando a polares: $a^2\rho^2-(a\rho\cos\theta-2\rho^2)^2 = 0$. Simplificando, se tiene: $\rho = \frac{a}{2}(\cos\theta \pm 1)$ (homotética de la concoide del círculo de diámetro OA). Se incluye el dibujo del lugar geométrico para el caso $a = 1$.

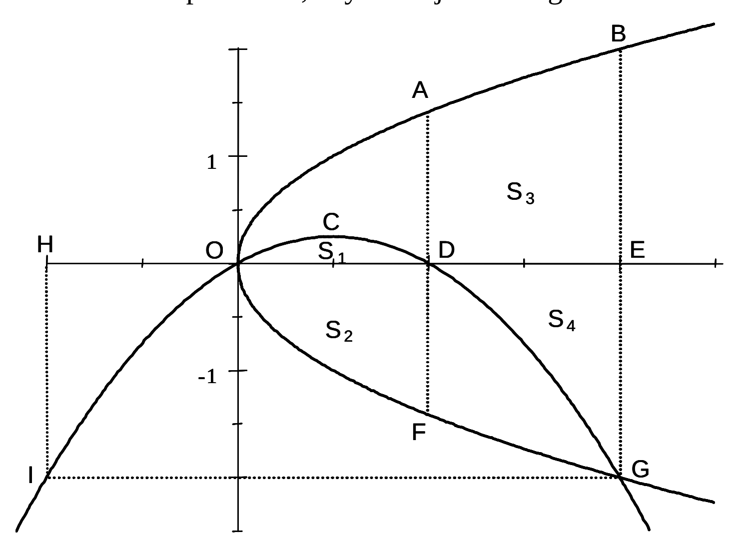


D 160- Se consideran las parábolas tangentes al eje OY en O, y normales a $x = a$, en un punto A variable de esta recta. Existen tres parábolas cuyos ejes pasan por un punto P del plano. Hallar el lugar geométrico de los vértices de los triángulos formados por las tres directrices de dichas parábolas, cuando P describe la recta $x = a$.

Solución: Sea $A(a,\lambda)$. Las rectas $x = 0$, $y = \lambda$, son tangentes a la parábola. La recta que une los puntos de contacto, es: $OA \equiv ay - \lambda x = 0$. La ecuación de las cónicas tangentes a las rectas $x = 0$, $y = \lambda$, en los puntos O y A, respectivamente, es: $x(y-\lambda) + \mu(ay - \lambda x)^2 = 0$. Obligando a que esta cónica sea parábola, se verifica que: $\begin{vmatrix} \lambda^2\mu & \frac{1}{2} - a\lambda\mu \\ \frac{1}{2} - a\lambda\mu & a^2\mu \end{vmatrix} = 0$, de donde: $\mu = \dfrac{1}{4a\lambda}$. Luego la ecuación de las parábolas es: $\dfrac{\lambda^2}{a}x^2 + 2\lambda xy + ay^2 - 4\lambda^2 x = 0$. La ecuación de su eje es: $(\lambda^3 + a^2\lambda)x + (a\lambda^2 + a^3)y - 2a\lambda^3 = 0$. Al ser esta ecuación de tercer grado en λ, para cada punto del plano, hay tres ejes, cuyas pendientes son $\dfrac{-\lambda_i}{a}$. La directriz pasa por $(0,\lambda)$ y su pendiente es $\dfrac{a}{\lambda}$, siendo su ecuación: $y - \lambda = \dfrac{a}{\lambda}x$, es decir $\lambda^2 - y\lambda + ax = 0$. Obligando a que el eje pase por (a,b), se tiene: $\lambda^3 - b\lambda^2 - a^2\lambda - a^2b = 0$. Como esta ecuación tiene tres raíces, y la anterior dos, se tiene: $\lambda^3 - b\lambda^2 - a^2\lambda - a^2b \equiv (\lambda^2 - y\lambda + ax)(\lambda - \delta)$, de donde, identificando coeficientes: $b = y + \delta$, $-a^2 = ax + \delta y$, $a^2b = a\delta x$. Eliminando b, se tiene la ecuación del lugar pedido: $x^2 + y^2 - a^2 = 0$.

D 161- Hallar el área de la superficie del plano limitada por las curvas $y^2 = 2x$, $y = x - x^2$.

Solución: Las curvas dadas son dos parábolas, cuyo dibujo es el siguiente:



Una de las parábolas pasa por los puntos $O(0,0)$, $A\left(1,\sqrt{2}\right)$, $B(2,2)$, $F\left(1,-\sqrt{2}\right)$, $G(2,-2)$, siendo su eje OX. La segunda, de eje vertical, tiene su vértice en el punto $C\left(\frac{1}{2}.\frac{1}{4}\right)$, y pasa por los puntos $I(-1,-2)$, $O(0,0)$, $D(1,0)$, $G(2,-2)$. Para resolver el problema, se utiliza la fórmula correspondiente a la superficie de un segmento parabólico, cuya cuerda es perpendicular al eje. Siendo c la cuerda y f la flecha, el área del segmento parabólico es: $\frac{2}{3}cf$. El área pedida S es igual a $S_1 + S_2 + S_3 - S_4$, siendo $S_1 = S_{OCDO}$, $S_2 = S_{ODFO}$, $S_3 = S_{DEGFD}$, $S_4 = S_{DEGD}$. En base a la fórmula anterior, se tiene:

$S_{OCDO} = \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$;

$S_{ODFO} = \frac{1}{2}S_{OAFO} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{2}\,1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$;

$S_{DEGFD} = \frac{1}{2}S_{ABGFA} = \frac{1}{2}(S_{BOGB} - S_{AOFA}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\left(4 \cdot 2 - 2\sqrt{2} \cdot 1\right) = \frac{8}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3}$;

$S_{DEGD} = \frac{1}{2}(S_{HEGIH} - S_{ICGI} + S_{OCDO}) = \frac{1}{2}\left(3 \cdot 2 - \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \frac{9}{4} + \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{6}$.

El área pedida es: $S = \frac{1}{6} + \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{8}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{5}{6} = 2$.

D 162- Hallar el lugar geométrico de los focos de las parábolas que tienen como triángulo autopolar el formado por los puntos $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$.

Solución: Las parábolas que tienen un triángulo conjugado dado, tienen su foco sobre el círculo de los nueve puntos. Luego el lugar del foco es el círculo que pasa por O y es tangente a BC en su punto medio, siendo su ecuación: $x\left(x-\frac{1}{2}\right)+y\left(y-\frac{1}{2}\right)=0$, es decir: $2(x^2+y^2)-(x+y)=0$.

Resolviendo el problema analíticamente, la ecuación general de las cónicas circunscritas al triángulo ABC, es: $\lambda x^2+\mu y^2+(x+y-1)^2=(\lambda+1)x^2+(\mu+1)y^2+2xy-2x-2y+1=0$. Obligando a que sea parábola: $\begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 \\ 1 & \mu+1 \end{vmatrix}=\lambda\mu+\lambda+\mu=0$, de donde: $\mu=\frac{-\lambda}{1+\lambda}$. Por tanto, la ecuación de la parábola es: $(\lambda+1)x^2+\frac{y^2}{\lambda+1}+2xy-2x-2y+1=0$. Para obtener su ecuación tangencial, se tiene que: $\begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 & -1 & u \\ 1 & \frac{1}{\lambda+1} & -1 & v \\ -1 & -1 & 1 & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix}=u^2-(\lambda+1)v^2+2uw-2(\lambda+1)vw=0$. Para hallar el foco, se plantea el sistema (ver Nota): $2x+2(\lambda+1)y-1-(\lambda+1)=0$, $(\lambda+1)x-y=0$, de donde eliminando $\lambda=\frac{y-x}{x}$, queda la ecuación del lugar del foco: $2(x^2+y^2)-x-y=0$.

Nota: Siendo $F(u,v,w)=au^2+2buv+cv^2+2duw+2evw+fw^2=0$, la ecuación tangencial de una cónica, las coordenadas de su foco vienen dadas por el sistema: $f(x^2-y^2)-2dx+2ey+a-c=0$, $fxy-ex-dy+b=0$. En el caso de la parábola, se tiene $f=0$, con lo que el sistema es: $-2dx+2ey+a-c=0$, $-ex-dy+b=0$.

D 163- La tangente en un punto M de una parábola encuentra a la tangente en el vértice, en un punto N. Se traza por N una paralela NM' a OM, y por O una paralela OM' a MN. Las rectas NM' y OM' se cortan en M'. 1º) Hallar la envolvente de $M'N$. 2º) Hallar el lugar geométrico de M'. 3º) Hallar la envolvente de $M'M$. 4º) Hallar el lugar del centro de la circunferencia circunscrita a OMN.

Solución: Sean las siguientes ecuaciones y coordenadas: $\Pi\equiv y^2-2px=0$, $M(2p\lambda^2,2p\lambda)$, $MN\equiv x-2\lambda y+2p\lambda^2=0$, $N(0,p\lambda)$, $OM\equiv x-\lambda y=0$, $NM'\equiv x-\lambda y+p\lambda^2=0$, $OM'\equiv x-2\lambda y=0$, $M'(-2p\lambda^2,-p\lambda)$, $MM'\equiv 3x-4\lambda y+2p\lambda^2=0$. 1º) Derivando la ecuación de NM' respecto al parámetro λ, se tiene: $\frac{d}{d\lambda}(x-\lambda y+p\lambda^2)=-y+2p\lambda=0$, $\lambda=\frac{y}{2p}$. La ecuación de la envolvente de $M'N$ es: $y^2-4px=0$. 2º) $x=-2p\lambda^2$, $y=-p\lambda$. Luego: $\lambda^2=\frac{x}{-2p}=\frac{y^2}{p^2}$. Por tanto, la ecuación del lugar geométrico de M', es: $2y^2+px=0$. 3º) Derivando la ecuación de MM' respecto a λ, se tiene que: $\frac{d}{d\lambda}(3x-4\lambda y+2p\lambda^2)=-4y+4p\lambda=0$. De donde: $\lambda=\frac{y}{p}$. La ecuación de la envolvente de $M'M$ es: $2y^2-3px=0$. 4º) La circunferencia circunscrita a OMN, es: $(x-\alpha)^2+\left(y-\frac{p\lambda}{2}\right)^2-\alpha^2-\frac{p^2\lambda^2}{4}=0$. Por pasar por M: $(2p\lambda^2-\alpha)^2+(2p\lambda-\frac{p\lambda}{2})^2-\alpha^2-\frac{p^2\lambda^2}{4}=0$. Como $\alpha=x$, $\frac{p\lambda}{2}=y$, se tiene la ecuación del lugar pedido: $8y^2-2px+p^2=0$.

D 164- Hallar el lugar geométrico de la intersección de las normales a la parábola $y^2=2px$, trazadas en los extremos de una cuerda que se desplaza paralelamente a una dirección dada.

Solución: Sean los puntos de la parábola: $(2pa^2,2pa)$, $(2pb^2,2pb)$. La dirección dada es $m=\frac{2p(a-b)}{2p(a^2-b^2)}=\frac{1}{a+b}$. Las normales son: $y+2ax-2pa-4pa^3=0$, $y+2bx-2pb-4pb^3=0$. La abscisa del punto de intersección es: $p[1+2(a^2+ab+b^2)]$. Sustituyendo $b=\frac{1-am}{m}$, la abscisa es: $p\left[1+2a^2+\frac{2a(1-am)}{m}+\frac{2(1-am)^2}{m^2}\right]$. La ordenada es: $\frac{4ap}{m}\left(a-\frac{1}{m}\right)$. Eliminando a se tiene la ecuación del lugar pedido: $2m^2x-m^3y-2p(2+m^2)=0$.

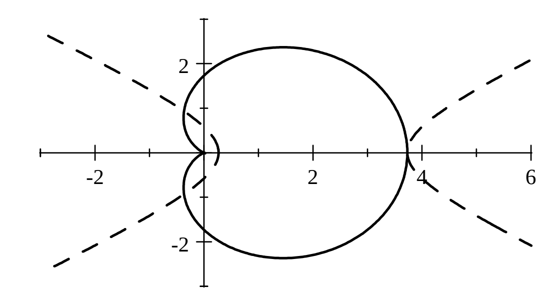
D 165- Sean A, B y C los pies de las normales a una parábola trazadas desde un punto P. Sean A_1, B_1, C_1, los puntos de contacto de las tangentes a dicha parábola paralelas respectivamente a los lados BC, CA y AB del triángulo ABC. Demostrar que las normales en A_1, B_1, C_1 se cortan en un punto P_1.

Solución: Sea la parábola $y^2-2px=0$, y sean $A(2pt_1^2,2pt_1)$, $B(2pt_2^2,2pt_2)$, $C(2pt_3^2,2pt_3)$, los puntos de

contacto. Las normales en estos tres puntos, son: $y+2t_1x-2pt_1-4pt_1^3=0$, $y+2t_2x-2pt_2-4pt_2^3=0$, $y+2t_3x-2pt_3-4pt_3^3=0$. Como las tres normales se han trazado desde un punto, se verifica que: $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2t_1 & -2pt_1-4pt_1^3\\ 1 & 2t_2 & -2pt_2-4pt_2^3\\ 1 & 2t_3 & -2pt_3-4pt_3^3\end{vmatrix}=-8p\begin{vmatrix}1 & t_1 & t_1^3\\ 1 & t_2 & t_2^3\\ 1 & t_2 & t_3^3\end{vmatrix}=0$. Luego, $\delta=\begin{vmatrix}1 & t_1 & t_1^3\\ 1 & t_2 & t_2^3\\ 1 & t_2 & t_3^3\end{vmatrix}=0$. El lado AB tiene por pendiente: $\dfrac{2pt_1-2pt_2}{2pt_1^2-2pt_2^2}=\dfrac{1}{t_1+t_2}$. Análogamente los otros dos lados. La tangente paralela a AB, es: $y=\dfrac{1}{t_1+t_2}x+\dfrac{p(t_1+t_2)}{2}$, y su punto de contacto es $C_1\left[\dfrac{p}{2}(t_1+t_2)^2, p(t_1+t_2)\right]$. La normal en C_1 es: $y+(t_1+t_2)x-p(t_1+t_2)-\dfrac{p}{2}(t_1+t_2)^3=0$. Para que las tres normales concurran en un punto, ha de verificarse que el determinante $\Delta_1=\begin{vmatrix}1 & t_1+t_2 & -p(t_1+t_2)-\frac{p}{2}(t_1+t_2)^3\\ 1 & t_1+t_3 & -p(t_1+t_3)-\frac{p}{2}(t_1+t_3)^3\\ 1 & t_2+t_3 & -p(t_2+t_3)-\frac{p}{2}(t_2+t_3)^3\end{vmatrix}$ sea nulo. Operando en Δ_1, se tiene: $\Delta_1=\dfrac{-p^3}{2}\begin{vmatrix}1 & t_1+t_2 & (t_1+t_2)^3\\ 1 & t_1+t_3 & (t_1+t_3)^3\\ 1 & t_2+t_3 & (t_2+t_3)^3\end{vmatrix}=\dfrac{-p^3}{2}\cdot 2\begin{vmatrix}1 & t_1 & t_1^3\\ 1 & t_2 & t_2^3\\ 1 & t_3 & t_3^3\end{vmatrix}=-p^3\cdot\delta=0$. Luego las normales en A_1, B_1, C_1, concurren en un punto P_1.

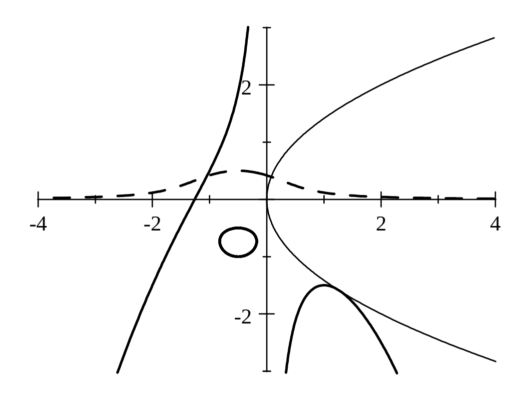
D 166- Se consideran las parábolas que pasan por $A(a,0)$ y son tangentes a un círculo Γ de centro O y radio fijo, en dos puntos M y M' variables. 1º) Hallar la ecuación general de las parábolas. 2º) Hallar la envolvente de MM'. 3º) Hallar el lugar geométrico del punto medio de MM'. 4º) Hallar el lugar de la intersección de las tangentes en M y M' al círculo y a la parábola. 5º) Hallar el lugar del centro del círculo circunscrito al triángulo AMM'.

Solución: $\Gamma\equiv x^2+y^2-R^2=0$, $MM'\equiv x+my+n=0$. 1º) Ecuación general de las cónicas tangentes a Γ en su intersección con MM': $x^2+y^2-R^2+\lambda(x+my+n)^2=0$. Obligando a que las cónicas pasen por A, se tiene que: $a^2-R^2+\lambda(a+n)^2$. Obligando a que estas cónicas sean parábolas, se verifica que: $\begin{vmatrix}1+\lambda & m\lambda\\ m\lambda & 1+\lambda m^2\end{vmatrix}=1+\lambda m^2+\lambda m=0$. De donde $m=\sqrt{-\dfrac{\lambda+1}{\lambda}}$, $n=\sqrt{\dfrac{R^2-a^2}{\lambda}}-a$. La ecuación de la parábola es: $\Pi\equiv x^2+y^2-R^2+\lambda\left(x+\sqrt{-\dfrac{1+\lambda}{\lambda}}y+\sqrt{\dfrac{R^2-a^2}{\lambda}}-a\right)^2$. 2º) La ecuación de MM', es: $x+\sqrt{-\dfrac{1+\lambda}{\lambda}}y+\sqrt{\dfrac{R^2-a^2}{\lambda}}-a=0$. Derivando esta ecuación respecto a λ, e igualando a cero, se tiene que: $\dfrac{x}{\sqrt{-\lambda}}-\dfrac{y}{\sqrt{1+\lambda}}-\dfrac{a}{\sqrt{-\lambda}}=0$. Luego el lugar pedido, en paramétricas, es: $x=a-\sqrt{-\lambda(a^2-R^2)}$, $y=-\sqrt{(a^2-R^2)(1+\lambda)}$. Eliminando λ, se tiene: $x^2+y^2-2ax+R^2=0$. 3º) El punto medio de MM', se obtiene por su intersección con la perpendicular sobre MM' trazada desde O, es decir $y=\sqrt{-\dfrac{1+\lambda}{\lambda}}x$. Eliminando λ, se tiene el lugar pedido: $(x^2+y^2-ax)^2-(a^2-R^2)(x^2+y^2)=0$. 4º) El punto de intersección es el polo de MM' respecto al círculo y a la parábola. Siendo este punto (α,β) su polar respecto al círculo es: $\alpha x+\beta y-R^2=0$. Identificando esta ecuación con la de MM', se tiene: $\dfrac{\alpha}{1}=\dfrac{\beta}{\sqrt{\dfrac{-\lambda-1}{\lambda}}}=\dfrac{-R^2}{\sqrt{\dfrac{R^2-a^2}{\lambda}}-a}$. Eliminando $\lambda=\dfrac{-\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}$, y cambiando (α,β) por (x,y), se tiene la ecuación del lugar pedido: $(x^2+y^2)(R^2-a^2)+(ax-R^2)^2=0$. 5º) La ecuación de las cónicas que pasan por MM', es: $x^2+y^2-R^2+\left(x+\sqrt{-\dfrac{1+\lambda}{\lambda}}y+\sqrt{\dfrac{R^2-a^2}{\lambda}}-a\right)(mx+ny+p)=0$. Obligando a que sea círculo: $m=n=0$. Y como pasa por A, se tiene: $p=\sqrt{\lambda(R^2-a^2)}$. Las coordenadas del centro, son: $x=-\dfrac{1}{2}\sqrt{\lambda(R^2-a^2)}$, $y=\dfrac{1}{2}\sqrt{(a^2-R^2)(1+\lambda)}$. Eliminando λ entre estas dos ecuaciones, se tiene el lugar pedido: $x^2+y^2-\dfrac{a^2-R^2}{4}=0$. 6º) En el dibujo se ha incluido en línea continua el lugar geométrico del punto 3º, y en línea de trazos el del punto 4º, para el caso $a=2$, $R=1$.



D 167- Se considera una parábola $P \equiv y^2 - 2px = 0$, y un círculo Γ cuyo centro es el punto $C(\alpha,\beta)$ y que pasa por el vértice de P. Por los puntos de intersección de P y Γ, pasa otra parábola P'. 1º) Determinar el punto C, de manera que las parábolas P y P' sean iguales, y que P' sea tangente a una tangente T dada de P. 2º) Hallar el lugar geométrico del punto de contacto de P' con T, cuando esta varía. 3º) Hallar la envolvente del círculo circunscrito al triángulo autopolar común a las dos parábolas.

Solución: Vértice de P: $(0,0)$. Ecuación del círculo: $\Gamma \equiv x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0$. Ecuación de las cónicas que pasan por la intersección de P y Γ: $y^2 - 2px + \lambda(x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y) = 0$. Para que estas cónicas sean parábolas, ha de verificarse que: $\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1+\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1) = 0$, luego $\lambda = -1$. Por tanto, $P' \equiv x^2 + 2(p-\alpha)x - 2\beta y = 0$. 1º) Para que $P = P'$, sus parámetros han de ser iguales, luego $\beta = p$. La ecuación de la tangente a P es: $y = mx + \dfrac{p}{2m}$. Cortando la parábola P' por esta tangente, se tiene que: $x^2 + 2(p-\alpha)x - 2\beta\left(mx + \dfrac{p}{2m}\right) = 0$. Para que esta ecuación tenga una raíz doble, su discriminante ha de ser nulo, es decir: $(p-\alpha-pm)^2 + \dfrac{p^2}{m} = 0$. Luego se tiene: $\alpha = p\left(1 - m \pm \sqrt{-\dfrac{1}{m}}\right)$. Por tanto, las coordenadas de C son: $\left[p\left(1 - m \pm \sqrt{-\dfrac{1}{m}}\right), p\right]$. 2º) La abscisa del punto de tangencia es la raíz doble de la ecuación anterior en x, es decir: $-p + \alpha + pm$. Luego en dicha ecuación se tiene para esta raíz doble: $x^2 - 2x^2 - \dfrac{p^2}{m} = 0$, de donde $m = \dfrac{-p^2}{x^2}$. Introduciendo este valor en la ecuación de la tangente, se tiene el lugar pedido: $x^3 + 2pxy + 2p^3 = 0$. 3º) La polar de un punto (x_1, y_1) con respecto a P, es: $-px + y_1 y - px_1 = 0$. Y la polar respecto a P', es: $(x_1 + p - \alpha)x - py + (p-\alpha)x_1 - py_1 = 0$. Luego la ecuación de las cónicas conjugadas con ellas, es: $\begin{vmatrix} -p & y & -px \\ x+p-\alpha & -p & (p-\alpha)x - py \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = 0$. Obligando a que estas cónicas sean circunferencias, se tienen las condiciones: $\lambda = \mu = 1$, $\nu = p - \alpha$. Por tanto, la ecuación de la circunferencia es: $p(x^2+y^2) + p^2 x + \left[p^2 + (p-\alpha)^2\right]y - p^2(p-\alpha) = 0$. Derivando respecto a α, se tiene: $\alpha = p - \dfrac{p^2}{2y}$. Introduciendo este valor en la ecuación de la circunferencia, se tiene la envolvente pedida: $4y(x^2+y^2) + 4py(x+y) - p^3 = 0$. 4º) Se ha dibujado para el caso $p = 1$, en línea continua gruesa el lugar del punto 2º, y en línea de trazos gruesos la envolvente del punto 3º, incluyéndose en trazos finos la parábola dada.

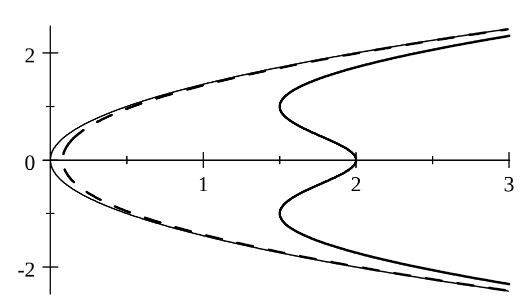


D 168- Por un punto se trazan tres normales a una parábola. Sean A, B, C los centros de curvatura situados en ellas. Por cada uno de estos tres puntos se puede trazar otra normal a la parábola. Demostrar que estas tres normales concurren.

Solución: Desde un punto (α,β) se pueden trazar tres normales a una parábola, cuyos pies vienen dados por las ecuaciones: $y^2-2px=0$, $xy+(p-\alpha)y-p\beta=0$ (hipérbola de Apolonio). Las ordenadas de estos tres pies vienen dadas por la ecuación: $y^3+2p(p-\alpha)y-2\beta p^2=0$. Luego la suma de dichas tres ordenadas es nula, es decir $b_1+b_2+b_3=0$. Siendo β_1, β_2, β_3, las ordenadas de las "nuevas" normales trazadas desde A, B, C, se tiene: $2b_1+\beta_1=0$, $2b_2+\beta_2=0$, $2b_3+\beta_3=0$. Luego $\beta_1+\beta_2+\beta_3=0$, por lo que las tres "nuevas" normales son concurrentes.

D 169- Hallar el lugar geométrico descrito por el punto medio de una cuerda de longitud dada, en una parábola.

Solución: Parábola: $y^2-2px=0$. Coordenadas de los extremos de la cuerda: $A(2pa^2,2pa)$, $B(2pb^2,2pb)$. Longitud de la cuerda: $d^2=[2p(a^2-b^2)]^2+[2p(a-b)]^2$. Las coordenadas del punto medio M de AB, son: $x=p(a^2+b^2)$, $y=p(a+b)$. De donde se tiene que: $a^2+b^2=\frac{x}{p}$, $a+b=\frac{y}{p}$, $2ab=\frac{y^2}{p^2}-\frac{x}{p}$, $(a-b)^2=\frac{x}{p}+\frac{px-y^2}{p^2}$, $a^2-b^2=\frac{y}{p}\sqrt{\frac{x}{p}+\frac{px-y^2}{p^2}}$. Sustituyendo estos valores en d^2, se tiene: $d^2=4y^2\left(\frac{x}{p}+\frac{px-y^2}{p^2}\right)+4p^2\left(\frac{x}{p}+\frac{px-y^2}{p^2}\right)$. Operando, se tiene la ecuación del lugar pedido: $y^4-2pxy^2+p^2y^2-2p^3x+\frac{p^2d^2}{4}=0$. Seguidamente se incluye el dibujo de este lugar geométrico distinguiendo el caso $d>p$ ($p=1$, $d=4$, en línea continua gruesa) y el caso $d<p$ ($p=1$, $d=0.8$, en línea de trazos gruesos), y en el que se representa en línea fina la parábola dada.



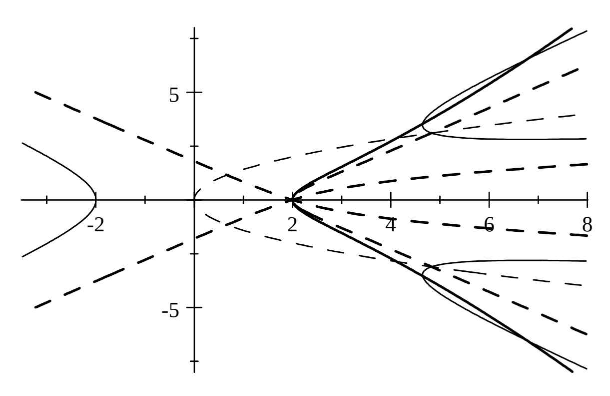
D 170- Una parábola tiene por foco un punto de una elipse, y por directriz la tangente en el punto correspondiente del círculo principal de dicha elipse. 1º) Demostrar que la parábola pasa por dos puntos fijos y hallarlos. 2º) Hallar el lugar de los puntos desde los cuales, las tangentes trazadas a la parábola son paralelas al eje de esta.

Solución: 1º) Sean las coordenadas del foco (α,β), con $\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}=1$, es decir $\alpha^2b^2+\beta^2a^2=a^2b^2$. Sea el punto de tangencia $\left(\alpha,\frac{\beta a}{b}\right)$. La directriz es: $\alpha bx+\beta ay-a^2b=0$. La ecuación focal de la parábola, es: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\frac{(\alpha bx+\beta ay-a^2b)^2}{\alpha^2b^2+\beta^2a^2}=\frac{(\alpha bx+\beta ay-a^2b)^2}{a^2b^2}$. Operando, se obtiene: $a^2b^2\left[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2\right]-(\alpha bx+\beta ay-a^2b)^2=0$. Como el lugar es simétrico respecto a OX, haciendo $y=0$ se tienen los puntos fijos $(\pm c,0)$, siendo $c^2=a^2-b^2$. 2º) Derivando la ecuación de la parábola, y haciendo $y'=0$, se tiene: $b(a^2-\alpha^2)x-a\alpha\beta y=0$. Como $\alpha=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta$, se obtiene: $x\sin\theta=y\cos\theta$, o bien: $x=\lambda\cos\theta$, $y=\lambda\sin\theta$. Sustituidos estos valores en la ecuación de la parábola, se tiene: $\lambda=\frac{a+b}{2}$. Eliminando λ, se tiene la ecuación del lugar pedido es: $x^2+y^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

D 171- Se da la parábola $y^2-2px=0$, y el punto $A(a,0)$. Por A se traza una secante que corta a la parábola en M y N. Por M y N se traza un círculo tangente a la parábola. 1º) Hallar el lugar geométrico del centro del círculo. 2º) Hallar el lugar del punto de intersección con MN, de la normal trazada a la parábola en el punto de contacto.

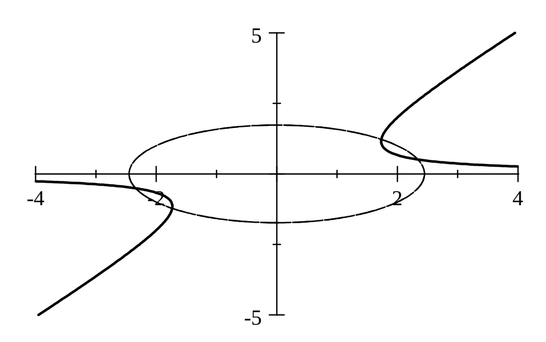
Solución: 1º) Tangente a la parábola en el punto genérico $P\left(\frac{p}{2m^2},\frac{p}{m}\right)$: $y-mx-\frac{p}{2m}=0$. La ecuación de la recta MN es: $y-tx+at=0$. La ecuación de la cónica que pasa por los puntos M, N, P, es:

$\lambda(y^2-2px)+(y-tx+at)\left(y-mx-\dfrac{p}{2m}\right)=0$. Obligando a que sea círculo: $t=-m$, $\lambda=-m^2-1$. La ecuación del círculo es: $m^2(x^2+y^2)-x\left[2p(m^2+1)+am^2-\dfrac{p}{2}\right]+y\left(am+\dfrac{p}{2m}\right)+\dfrac{ap}{2}=0$. Siendo el centro (x,y), se tiene: $2m^2x=2p(m^2+1)+am^2-\dfrac{p}{2}$; $2m^2y=-am-\dfrac{p}{2m}$. Eliminando m entre estas dos igualdades, se tiene el lugar pedido: $27py^2-2(2x-2p-a)(a+x-p)^2=0$. 2º) La normal en $P\left(\dfrac{p}{2m^2},\dfrac{p}{m}\right)$, es: $y-\dfrac{p}{m}=\dfrac{-1}{m}\left(x-\dfrac{p}{2m^2}\right)$. Eliminando m entre esta ecuación y la de la recta $MN\equiv y+mx-am=0$, se tiene el lugar pedido: $2y^4-2y^2(x-a)(x-p)+p(x-a)^3=0$. 3º) En el dibujo se han incluido para el caso $p=1$, $a=2$, en línea continua gruesa el lugar del punto 1º, en línea de trazos gruesos el del punto 2º, y en línea de trazos finos la parábola dada. En línea continua fina se ha incluido el lugar del punto 2º) para el caso $p=1$, $a=-2$.



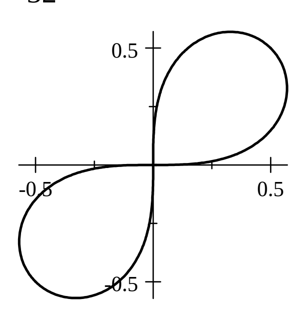
D 172- En ejes rectangulares se dan los puntos $A(a,b)$ y $B(-a,-b)$. 1º) Sobre el eje OX se toma un punto M y se considera la parábola P, tangente en A a MA, y tangente en B a MB. Hallar el lugar geométrico del vértice y del foco al variar M. 2º) Sobre OY se toma un punto N. Se considera la parábola P', tangente en A a NA, y tangente en B a NB. Las dos parábolas se cortan en los puntos A, B, C y D. Hallar la ecuación de CD, y el lugar de C y D cuando M y N se desplazan de manera que la abscisa de M es igual a la ordenada de N.

Solución: 1º) La ecuación general de las cónicas que cumplen el punto primero del enunciado, es: $[bx+(\lambda-a)y-b\lambda][bx-(a+\lambda)y-b\lambda]+\mu(bx-ay)^2=0$. Obligando a que sea parábola: $\mu=-1$, siendo $M(\lambda,0)$. Luego la ecuación de P es: $[bx+(\lambda-a)y-b\lambda][bx-(a+\lambda)y-b\lambda]-(bx-ay)^2=0$. Operando: $\lambda y^2+2b^2x-2aby-b^2\lambda=0$. El vértice es: $\left(\dfrac{a^2+\lambda^2}{2\lambda},\dfrac{ab}{\lambda}\right)$. Eliminando λ, el lugar del vértice, es: $ay^2-2bxy+ab^2=0$. Las coordenadas del foco son: $\left(\dfrac{a^2-b^2+\lambda^2}{2\lambda},\dfrac{ab}{\lambda}\right)$. Eliminando λ, la ecuación del lugar geométrico del foco, es: $(a^2-b^2)y^2-2abxy+a^2b^2=0$. 2º) Siendo $N(0,\mu)$, la ecuación de P' es: $\mu x^2-2abx+2a^2y-a^2\mu=0$. Siendo la ecuación de CD: $mx+ny+p=0$, como: $CD\equiv\dfrac{P-\dfrac{b^2\lambda}{a^2\mu}P'}{bx-ay}$, se obtienen los siguientes valores: $m=\dfrac{b\lambda}{a^2}$, $n=\dfrac{\lambda}{a}$, $p=-2b\left(1+\dfrac{b\lambda}{a\mu}\right)$. Por tanto, $CD\equiv b\lambda\mu x+a\lambda\mu y-2ab(a\mu+b\lambda)=0$. Como $\lambda=\mu$, el lugar de C y D es: $bx^2+ay^2-ab(a+b)=0$. 3º) En el dibujo se han incluido para el caso $a=2$, $b=1$, en línea continua el lugar geométrico del punto 1º, y en línea de trazos el del punto 2º.



D 173- En ejes rectangulares se considera la parábola de vértice el origen O, y que corta a los ejes en A y B, de forma que $OA\cdot OB=k^2$. Hallar el lugar del foco.

Solución: La ecuación focal de la parábola, es: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = \dfrac{(\alpha x+\beta y+\alpha^2+\beta^2)^2}{\alpha^2+\beta^2}$. Luego se tiene que: $OA = \dfrac{4\alpha(\alpha^2+\beta^2)}{\beta^2}$, $OB = \dfrac{4\beta(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha^2}$. Por tanto, la ecuación del lugar geométrico pedido, es: $16(x^2+y^2)^2-k^2xy = 0$, o bien: $\rho^2 = \dfrac{k^2}{32}\sin 2\theta$. Se ha dibujado este lugar para el caso $k = 4$.



D 174- Dada la parábola $x = 2t^2+t-1$, $y = t^2+3t+1$, hallar su vértice, foco y directriz.

Solución: $A_1 = 2$, $B_1 = 1$, $C_1 = -1$, $A_2 = 1$, $B_2 = 3$, $C_2 = 1$. Como $t_V = -\dfrac{A_1B_1+A_2B_2}{2(A_1^2+B_1^2)} = \dfrac{-1}{2}$, las coordenadas del vértice son: $x = -1$, $y = \dfrac{-1}{4}$. Sea la recta de ecuación: $y-\beta-m(x-\alpha) = 0$, es decir: $t^2+3t+1-\beta-m(2t^2+t-1-\alpha) = 0$. Para que sea tangente, el discriminante de la ecuación en t ha de ser nulo, es decir: $(9+8\alpha)m^2-(2+4\alpha+8\beta)m+5+4\beta = 0$. Para que (α,β) sea el foco, ha de cumplirse que: $m^2+1 = 0$. Se obtiene que el foco es $\left(\dfrac{-1}{2},0\right)$. La polar del foco se obtiene de: $2t^2+2t+1 = 0$, $(2+v)t^2+(1+3v)t-1+v+w = 0$, de donde: $v = \dfrac{1}{2}$, $w = \dfrac{7}{4}$. La directriz es: $4x+2y+7 = 0$.

D 175- Hallar el lugar geométrico del centro de un triángulo equilátero cuyos lados son normales a una parábola.

Solución: Como $\tan 3\theta = \dfrac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$, las pendientes de los lados de un triángulo equilátero son raíces de una ecuación de la forma $\dfrac{3m-m^3}{1-3m^2} = \lambda$, es decir: $m^3-3\lambda m^2-3m+\lambda = 0$. Siendo la ecuación de la parábola: $y^2-2px = 0$, las ecuaciones de .las normales, en función de sus coeficientes angulares, son: $y = m_1(x-p)-\dfrac{pm_1^3}{2}$, y sus análogas. Las coordenadas de los puntos de intersección, vértices del triángulo, son: $x_1 = p+\dfrac{p}{2}(m_1^2+m_1m_2+m_2^2)$, $y_1 = \dfrac{p}{2}m_1m_2(m_1+m_2)$, y sus análogas. Las coordenadas del centro del triángulo, son:

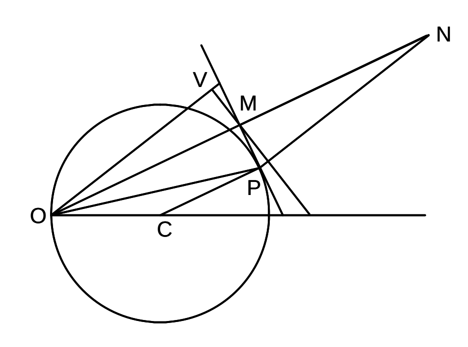
$$x = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} = \frac{3p+\frac{p}{2}\left[2(m_1+m_2+m_3)^2-3(m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3)\right]}{3},$$

$$y = \frac{y_1+y_2+y_3}{3} = \frac{p}{6}[(m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3)(m_1+m_2+m_3)-3m_1m_2m_3].$$

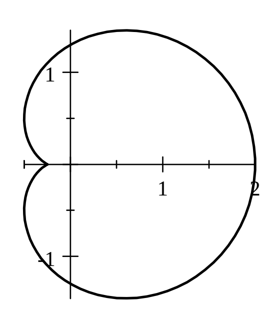
Aplicando las fórmulas de Cardano a la ecuación en m, se tiene que: $m_1+m_2+m_3 = 3\lambda$, $m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3 = -3$, $m_1m_2m_3 = -\lambda$. Por tanto, $x = 3p\lambda^2+\dfrac{5p}{2}$, $y = -p\lambda$. Eliminando λ, se tiene la ecuación del lugar pedido: $3y^2-px+\dfrac{5p^2}{2} = 0$.

D 176- Se da un círculo de centro C y un punto O sobre él. Hallar el lugar geométrico de los vértices de las parábolas de foco O, tangentes al círculo.

Solución: Sea P un punto del círculo de radio R, y M la proyección de O sobre la tangente en P al círculo. Sea N el simétrico de O respecto a PM. El eje de la parábola tangente en P al círculo, y de foco O, es OV, paralelo a PN. El vértice V de la parábola es la proyección de M sobre el eje. Se tiene: $\widehat{VOM} = \widehat{MNP} = \widehat{MOP} = \theta$, $\widehat{MPO} = \dfrac{\pi}{2}-\widehat{MOP}$, $\widehat{OPC} = \dfrac{\pi}{2}-\widehat{MPO} = \widehat{MOP} = \theta$, $\widehat{POC} = \widehat{OPC} = \theta$, $\widehat{VOC} = \widehat{VOM}+\widehat{MOP}+\widehat{POC} = 3\theta$, $OV = OM\cos\theta$, $OM = OP\cos\theta$, $OP = 2R\cos\theta$. De donde se tiene que: $OV = 2R\cos^3\theta$. Es decir que la ecuación en polares del lugar pedido, es: $\rho = 2R\cos^3\theta = 2R\cos^3\dfrac{\omega}{3}$, siendo el polo O, el eje polar OC, $\rho = OV$, $\omega = \widehat{VOC}$.

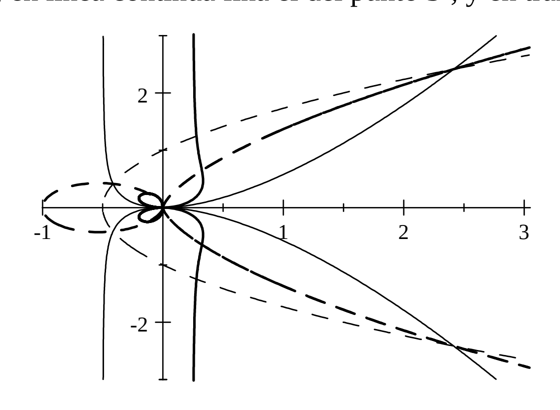


Se ha dibujado este lugar para el caso $R = 1$.



D 177- Dados dos ejes rectangulares y una parábola de foco O, origen de coordenadas, y eje OX, se toma un punto M variable sobre ella. Este punto se proyecta en H sobre OX, y se considera el punto A, simétrico de O respecto a H. Hallar 1º) El lugar geométrico de la proyección de O sobre MA. 2º) Lugar de la proyección de A sobre MO. 3º) Lugar del ortocentro del triángulo OAM.

Solución: Sean la parábola: $y^2 - 2px - p^2 = 0$, y los puntos: $M\left[\frac{p}{2}(\lambda^2-1), \lambda p\right]$, $H\left[\frac{p}{2}(\lambda^2-1), 0\right]$, $A[p(\lambda^2-1), 0]$. 1º) $MA \equiv \frac{2y}{\lambda} = \frac{x - p\lambda^2 + p}{1-\lambda^2}$. Perpendicular por O: $y = \frac{2(\lambda^2-1)x}{\lambda}$. El lugar pedido corresponde a la intersección de esas dos rectas. Por tanto, se tiene: $py^2(x^2+y^2+px) - 4x(x^2+y^2)^2 = 0$. 2º) $MO \equiv y - \frac{2\lambda}{\lambda^2-1}x = 0$. Perpendicular por A: $y - \frac{1-\lambda^2}{2\lambda}(x - p\lambda^2 + p) = 0$. Intersección de esas dos rectas: $4px^3(y^2+px+x^2) - y^2(x^2+y^2)^2 = 0$. 3º) Perpendicular desde M sobre OA: $x = \frac{p}{2}(\lambda^2-1)$. Perpendicular desde O sobre AM: $y = \frac{\lambda^2-1}{2\lambda}x$. Lugar del ortocentro: $x^4 - 2pxy^2 - p^2y^2 = 0$. 4º) En el dibujo se han incluido, para el caso $p = 1$, en línea continua gruesa el lugar del punto 1º, en línea de trazos gruesos el del punto 2º, en línea continua fina el del punto 3º, y en trazos finos la parábola dada.



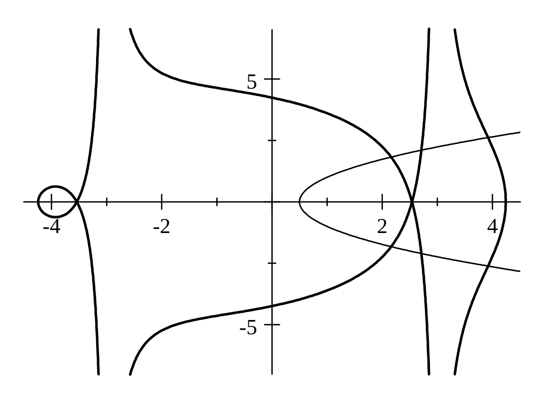
D 178- Hallar la envolvente de las directrices de las parábolas que tienen como autopolar el triángulo de vértices: $v + w = 0$, $u + w = 0$, $2u + w = 0$.

Solución: La ecuación general de las cónicas conjugadas con el triángulo dado, es: $A(v+w)^2 + B(u+w)^2 + C(2u+w)^2 = 0$. Por ser parábola, ha de anularse el coeficiente de w^2, es decir: $C = -A - B$. Luego la ecuación de la parábola es: $-(3A+4B)u^2 + Bv^2 - 2(A+2B)uw + 2Bvw = 0$. La ecuación de la directriz es: $(2A+4B)x - 2By - 3A - 3B = 0$. Haciendo $\frac{B}{A} = \lambda$, esta ecuación queda: $(2+4\lambda)x - 2\lambda y - 3 - 3\lambda = 2x - 3 + \lambda(4x - 2y - 3) = 0$. Derivando respecto a λ, y sustituyendo, se tiene:

$x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{3}{2}$. La envolvente es el punto $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Este punto corresponde al centro del círculo circunscrito al triángulo autopolar.

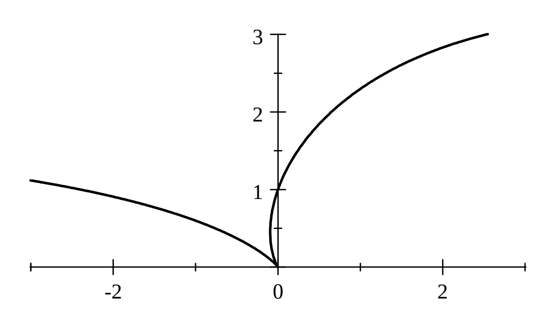
D 179- Se da una parábola. Hallar el lugar geométrico de los centros de un círculo de radio R dado, tal que existan dos tangentes comunes a la parábola y al círculo, que sean perpendiculares entre sí.

Solución: Siendo OX el eje de la parábola, y OY su directriz, la ecuación de la parábola es: $y^2 = 2px - p^2$. Las tangentes a la parábola trazadas desde un punto de su directriz, son perpendiculares entre sí. Siendo $A(0,\lambda)$, la tangente a la parábola trazada desde él, es: $y - \lambda = mx$, con $m^2 + \frac{2\lambda}{p}m - 1 = 0$. Las pendientes de sus bisectrices son: $m^2 + \frac{2p}{\lambda}m - 1 = 0$, siendo la ecuación del conjunto de estas: $(y-\lambda)^2 + (y-\lambda)x\frac{2p}{\lambda} - x^2 = 0$. La ecuación del círculo de centro A y radio $\sqrt{2}R$, es: $x^2 + (y-\lambda)^2 - 2R^2 = 0$. Tanto las bisectrices como este círculo, pasan por el centro (x,y) del círculo de radio R. Restando ambas ecuaciones, se tiene: $\lambda = \frac{pxy}{x^2 + px - R^2}$. Reemplazando este valor en la ecuación del círculo de centro A, se tiene el lugar pedido: $x^2 + \left(y - \frac{pxy}{x^2+px-R^2}\right)^2 - 2R^2 = 0$, o bien: $(2R^2 - x^2)(x^2 - R^2 + px)^2 - y^2(x^2 - R^2)^2 = 0$. En el dibujo se ha incluido este lugar para el caso $R = 3$, y en línea fina la parábola $y^2 - 2x + 1 = 0$.



D 180- Se da un triángulo OAB rectángulo en O. Por A se traza una recta r, y por B la perpendicular r' a r. Se considera la parábola de eje r, cuya tangente en el vértice es r', y que pasa por O. 1º) Hallar la envolvente de la parábola. 2º) Hallar el lugar de la intersección de la tangente en O con la recta r.

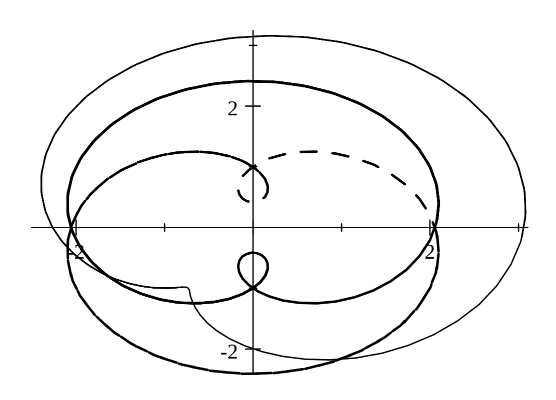
Solución: Tomando como ejes OA y OB, se tienen las siguientes coordenadas y ecuaciones: $O(0,0)$, $A(a,0)$, $B(0,b)$, $r \equiv x\sin\theta - y\cos\theta - a\sin\theta = 0$, $r' \equiv x\cos\theta + y\sin\theta - b\sin\theta = 0$. 1º) La ecuación de la parábola es: $P \equiv (x\sin\theta - y\cos\theta - a\sin\theta)^2 + \lambda(x\cos\theta + y\sin\theta - b\sin\theta) = 0$. Como pasa por O: $\lambda = \frac{a^2\sin\theta}{b}$. Derivando P respecto a θ y eliminando θ, se tiene la ecuación de la envolvente de la parábola: $(ax+2by)^2 - 4by(x^2+y^2) = 0$. 2º) Haciendo $m = \tan\theta$, la ecuación de la tangente en O, es: $(a-2mb)x + (2b+am)y = 0$, cuya intersección con $r \equiv mx - y - ma = 0$, da el lugar pedido: $x^2 + y^2 - ax - 2by = 0$. 3º) Se ha dibujado la envolvente del punto 1º, para el caso $a = 3$, $b = 1$.



D 181- Dos parábolas de vértices fijos giran de manera que sus puntos de intersección son concíclicos. Hallar el lugar de los centros de estos círculos.

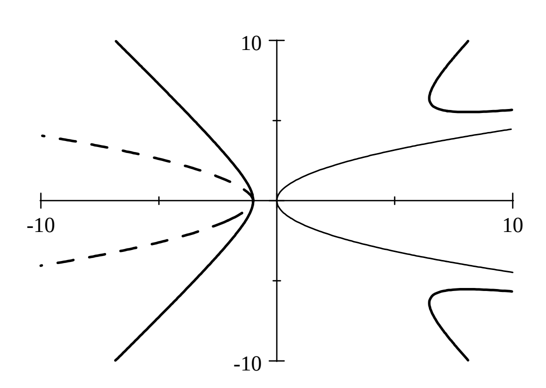
Solución: Sea OX la recta que une los dos vértices, de coordenadas $(a,0)$ y $(-a,0)$. Siendo el eje de la primera parábola P_1, de vértice $(a,0)$, la recta $(x-a)\sin\alpha + y\cos\alpha = 0$, siendo su tangente en el vértice

$(x-a)\cos\alpha - y\sin\alpha = 0$, y siendo su parámetro p, se tiene que su ecuación es: $P_1 \equiv [(x-a)\sin\alpha + y\cos\alpha]^2 - 2p[(x-a)\cos\alpha - y\sin\alpha] = 0$. Análogamente, para la segunda parábola P_2, de vértice $(-a,0)$, siendo su eje la recta $(x+a)\sin\beta + y\cos\beta = 0$, siendo su tangente en el vértice $(x+a)\cos\beta - y\sin\beta = 0$, y siendo su parámetro q, se tiene que su ecuación es: $P_2 \equiv [(x+a)\sin\beta + y\cos\beta]^2 - 2q[(x+a)\cos\beta - y\sin\beta] = 0$. La ecuación general de la cónica intersección, es: $\Gamma = P_1 + \lambda P_2 = 0$. Obligando a que sea circunferencia, se tiene: $\sin^2\alpha + \lambda\sin^2\beta = \cos^2\alpha + \lambda\cos^2\beta$, $2\sin\alpha\cos\alpha + 2\lambda\sin\beta\cos\beta = 0$. De donde, eliminando λ, se tiene: $\sin 4\alpha = \sin 4\beta$, es decir: $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$, siendo $\lambda = 1$. Sustituyendo estos valores en la ecuación de Γ, se tiene que: $\Gamma \equiv x^2 + y^2 + 2x(a\cos^2\alpha - a\sin^2\alpha - p\cos\alpha + q\sin\alpha) + 2y(-2a\sin\alpha\cos\alpha + p\sin\alpha + q\cos\alpha) + {}$ $+a^2 + 2a(p\cos\alpha + q\sin\alpha) = 0$. Luego las ecuaciones paramétricas del centro de este círculo, y por tanto del lugar pedido, son: $x = -a\cos 2\alpha + p\cos\alpha - q\sin\alpha$, $y = a\sin 2\alpha - p\sin\alpha - q\cos\alpha$. Se ha incluido el dibujo de este lugar, en línea continua gruesa, para el caso $a = p = q = 1$, en línea de trazos gruesos para el caso $a = p = -q = 1$, y en línea fina para el caso $a = p = 1$, $q = 2$.



D 182- Desde un punto M de una parábola, se trazan las dos normales distintas de la que tiene su pie en M. Sean P y Q los pies de estas normales. 1º) Hallar la envolvente de la recta PQ. 2º) Lugar geométrico del punto medio de PQ. 3º) Lugar geométrico de la intersección de PQ con la tangente en M. 4º) Lugar de la intersección de PQ con la normal en M. 5º) Lugar de la proyección de M sobre PQ.

Solución: Sea la parábola $\Pi \equiv y^2 - 2px = 0$. Sea el punto $M(2p\lambda^2, 2p\lambda)$. 1º) El círculo de Joachimstal es: $\Gamma \equiv x^2 + y^2 - p(1+2\lambda^2)x - p\lambda y = 0$. La ecuación del haz de cónicas que pasan por la intersección de Γ y Π, es: $\Gamma + \theta \bullet \Pi = x^2 + y^2 - p(1+2\lambda^2)x - p\lambda y + \theta(y^2 - 2px) = 0$. Para que esta cónica degenere: $\theta = -1 - \lambda^2$. Siendo $OM \equiv x - \lambda y = 0$, se tiene: $\frac{\Gamma + \theta \bullet \Pi}{x - \lambda y} = x + \lambda y + p = 0$, que es la ecuación de PQ. La envolvente de PQ es el punto $(-p,0)$. 2º) $x = -\lambda y - p$, $y^2 + 2p\lambda y + 2p^2 = 0$. La ordenada del punto medio es $-p\lambda$, y su abscisa $p(\lambda^2 - 1)$. Su lugar es: $y^2 - px - p^2 = 0$. 3º) El lugar geométrico viene dado por la intersección de la recta $PQ \equiv x + \lambda y + p = 0$ con la tangente $x - 2\lambda y + 2p\lambda^2 = 0$, es decir: $y^2(3x+2p) + 2p(x+p)^2$. 4º) La intersección de la recta $PQ \equiv x + \lambda y + p = 0$ y de la normal $y + 2\lambda x - 2p\lambda(1+2\lambda^2)$, proporciona la ecuación del lugar geométrico pedido: $y^4 - 2xy^2(x+p) + {}$ $+2p(x+p)\left[y^2 + 2(x+p)^2\right] = 0$. 5º) La intersección de $x + \lambda y + p = 0$ con $-\lambda(x - 2p\lambda^2) + y - 2p\lambda = 0$, da el lugar geométrico: $y^4 + x^2y^2 + 2p(x+p)^3 + 3pxy^2 + 2p^2y^2 = 0$. 6º) En el dibujo se han incluido, para $p = 1$, en línea continua el lugar del punto 4º, en línea de trazos gruesos el del punto 5º, y en línea fina la parábola dada.



D 183- Se dan las parábolas $\Pi \equiv y^2 - 2p(x+p) = 0$, $\Pi' \equiv y^2 - 2p(x-p) = 0$. Una tangente a Π' encuentra a Π en P y Q. Sobre PQ como diámetro se describe un círculo que encuentra a Π en R y S. Hallar la envolvente de RS.

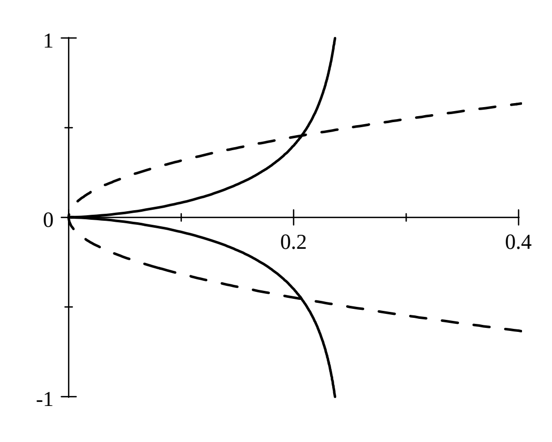
Solución: La ecuación de la tangente a Π', es: $x - 2\lambda y - p + 2p\lambda^2 = 0$. Los puntos de corte con Π, son: $P[p(1+4\lambda+2\lambda^2), 2p(\lambda+1)]$, $Q[p(-1-4\lambda+2\lambda^2), 2p(\lambda-1)]$. Las coordenadas del centro del círculo son: $x = p(1+2\lambda^2)$, $y = 2p\lambda$, y su radio es: $2p\sqrt{1+2\lambda^2}$. La ecuación del círculo Γ es: $x^2+y^2-2p(1+2\lambda^2)x - 4p\lambda y - p^2(3+8\lambda^2-4\lambda^4) = 0$. La ecuación de las cónicas que pasan por Γ y Π, es: $\Gamma + \theta \cdot \Pi \equiv x^2 + (1+\theta)y^2 - 2p(1+2\lambda^2+\theta)x - 4p\lambda y - p^2(3+8\lambda^2-4\lambda^4+2\theta) = 0$. La división entre la ecuación de $\Gamma + \theta \cdot \Pi$, y el polinomio $x - 2\lambda y - p + 2p\lambda^2$, ha de ser exacta, para lo cual $\theta = -1-4\lambda^2$, siendo el cociente la ecuación de la recta $RS \equiv x + 2\lambda y + p(1+2\lambda^2) = 0$, que es tangente a Π. Derivando respecto a λ e igualando a cero, se tiene: $\lambda = \frac{-y}{2p}$. La envolvente de RS es: $y^2 - 2p(x+p) = 0$, es decir, la parábola Π.

D 184- Se consideran todas las parábolas osculatrices a un círculo en un punto dado de este. 1º) Demostrar que las directrices de las parábolas, pasan por un punto fijo. 2º) Hallar el lugar geométrico del foco de las parábolas:

Solución: 1º) Sea el círculo $x^2+y^2-ax = 0$ y el punto $(0,0)$. La tangente en $(0,0)$ es $x = 0$. La ecuación de las cónicas osculatrices, es: $(x^2+y^2-ax) + x(mx+py) = 0$. Para que sea parábola, se verifica: $\begin{vmatrix} 1+m & \frac{p}{2} \\ \frac{p}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 + m - \frac{p^2}{4} = 0$, luego: $m = \frac{p^2-4}{4}$. Por tanto, la ecuación de la parábola es: $p^2x^2 + 4y^2 + 4pxy - 4ax = 0$. Su ecuación tangencial es: $\begin{vmatrix} p^2 & 2p & -2a & u \\ 2p & 4 & 0 & v \\ -2a & 0 & 0 & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0$, de donde: $av^2 - 4uw + 2pvw = 0$. La directriz es: $4x - 2py + a = 0$, que pasa por el punto fijo $\left(\frac{-a}{4}, 0\right)$. 2º) El foco viene dado por las ecuaciones: $4x + 2py - a = 0$, $-px + 2y = 0$. El lugar es: $x^2 + y^2 - \frac{a}{4}x = 0$.

D 185- Se consideran las parábolas de vértice $O(0,0)$, y que pasan por $A(a,0)$. 1º) Hallar el lugar geométrico de los focos. 2º) Hallar la envolvente de las directrices.

Solución: Sea el eje $y = mx$, y el foco $(\lambda, m\lambda)$. La directriz es: $x + my + \lambda(1+m^2) = 0$. La ecuación focal es: $(x-\lambda)^2 + (y-m\lambda)^2 = \frac{[x+my+\lambda(1+m^2)]^2}{1+m^2}$. Obligando a que la parábola pase por A, se tiene: $\lambda = \frac{am^2}{4(1+m^2)}$. 1º) El foco es: $\left(\frac{am^2}{4(1+m^2)}, \frac{am^3}{4(1+m^2)}\right)$. La ecuación del lugar pedido es: $4x(x^2+y^2) - ay^2 = 0$. En polares: $\rho = \frac{a\sin^2\theta}{4\cos\theta}$. 2º) La directriz es: $x + my + \frac{am^2}{4} = 0$. Derivando, se obtiene: $m = \frac{-2y}{a}$. La envolvente es: $y^2 - ax = 0$. 3º) En el dibujo se ha incluido para $a = 1$, en línea continua el lugar del punto 1º, y en línea de trazos la envolvente del punto 2º.

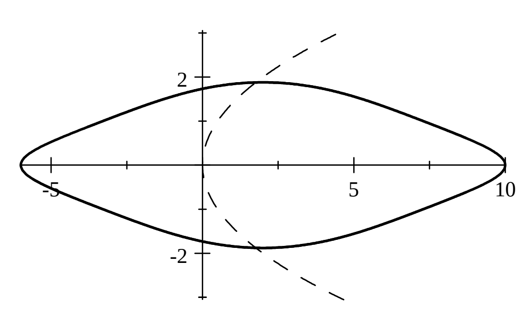


D 186- Se consideran todas las parábolas que tienen por directriz la recta $x-a=0$, y que pasan por el origen O. 1º) Hallar el lugar geométrico de los focos. 2º) Hallar el lugar de los vértices. 3º) Por un punto M del plano pasan dos de estas parábolas. Hallar el lugar de M para que dichas parábolas se corten ortogonalmente en el origen. Demostrar que en este caso la recta que une sus focos pasa por un punto fijo.

Solución: 1º) Foco (λ,μ). Ecuación focal: $(x-\lambda)^2+(y-\mu)^2=(x-a)^2$. Para que pase por el origen: $\lambda^2+\mu^2=a^2$. Luego el lugar de los focos es: $x^2+y^2=a^2$. 2º) El vértice es $V\left(\dfrac{a+\lambda}{2},\mu\right)$, de donde $2x=a+\lambda$. El lugar de los vértices es: $(2x-a)^2+y^2=a^2$, es decir: $4x^2+y^2-4ax=0$. 3º) La ecuación focal de las parábolas, en función de λ, es: $y^2+2(a-\lambda)x-2\sqrt{a^2-\lambda^2}\,y=0$, es decir: $(4x^2+4y^2)\lambda^2-4x(2ax+y^2)\lambda+y^4+4axy^2+4a^2(x^2-y^2)=0$, que es de 2º grado en λ, luego por cada punto pasan dos parábolas de la familia. Las tangentes en el origen tienen por pendiente: $y'=\sqrt{\dfrac{a-\lambda}{a+\lambda}}$. Como $m_1\cdot m_2=-1$, $\lambda=0$. El lugar es: $y^4+4axy^2+4a^2(x^2-y^2)=0$, que corresponde a dos parábolas: $y^2+2ax\pm 2ay=0$. Para $\lambda=0$, los focos son $(0,\pm a)$, y las rectas que los unen pasan siempre por el origen.

D 187- Se da la parábola $y^2-2px=0$. Encontrar el lugar de los puntos P tales que los círculos que pasan por el vértice de la parábola y por los puntos de contacto de las tangentes trazadas por P a la parábola, tengan un radio constante dado.

Solución: $P(\alpha,\beta)$. Polar de P: $-px+\beta y-p\alpha=0$. Ecuación general de las cónicas que satisfacen el enunciado: $\lambda(y^2-2px)+(px-\beta y+p\alpha)(y+mx)=0$. Para que estas cónicas sean circunferencias, ha de cumplirse que: $pm=\lambda-\beta$, $p-\beta m=0$. De donde: $m=\dfrac{p}{\beta}$, $\lambda=\dfrac{p^2+\beta^2}{\beta}$. Operando, la ecuación de la circunferencia es: $x^2+y^2+\left(\alpha-\dfrac{2\beta^2}{p}-2p\right)x+\dfrac{\alpha\beta}{p}y=0$. Por tanto, su radio viene dado por la ecuación: $4R^2=\left(\alpha-\dfrac{2\beta^2}{p}-2p\right)^2+\dfrac{\alpha^2\beta^2}{p^2}$. El lugar pedido es: $(px-2y^2-2p^2)^2+x^2y^2-4p^2R^4=0$. En el dibujo se han incluido para $p=1$, $R=2$, en línea continua el lugar geométrico, y en línea de trazos la parábola dada.

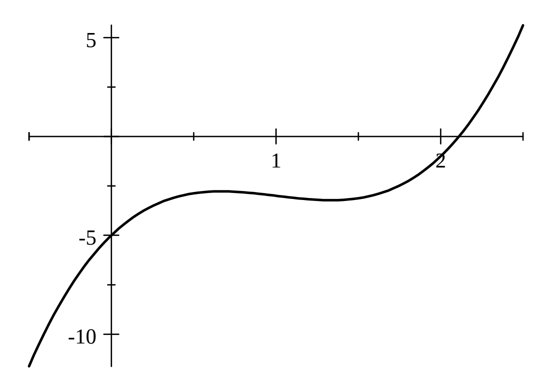


Sección E - CURVAS

CURVAS EN EXPLÍCITAS

E 1- Dibujar la curva $y = 3x^3 - 9x^2 + 8x - 5$

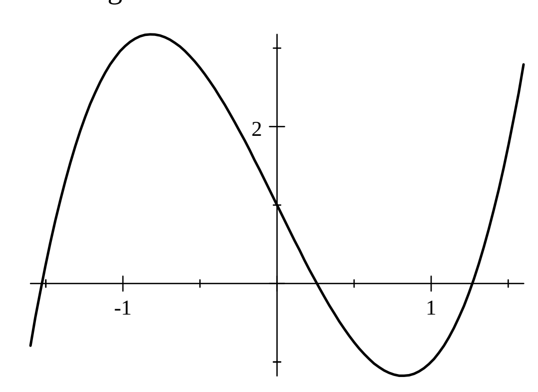
Solución: La curva no tiene asíntotas. Tiene una rama parabólica según el eje positivo OY para valores de $x \to +\infty$, y una rama parabólica según el eje negativo OY' para valores de $x \to -\infty$. Derivando la ecuación de la curva e igualando a cero: $y' = 9x^2 - 18x + 8 = 0$, cuyas raíces son $\frac{4}{3}$ y $\frac{2}{3}$. Volviendo a derivar: $y'' = 18(x-1)$. Luego $y''\left(\frac{4}{3}\right) > 0$, $y''\left(\frac{2}{3}\right) < 0$. Por tanto, el punto $\left(\frac{2}{3}, \frac{-25}{9}\right)$ es un máximo, y el punto $\left(\frac{4}{3}, \frac{-29}{9}\right)$ es un mínimo. Para $y'' = 0$, se tiene el punto de inflexión $(1,-3)$, en el que la pendiente de su tangente es -1. La curva corta al eje XX' en el punto de abscisa 2.11, siendo la pendiente de su tangente 10.1. La curva corta al eje YY' en el punto de ordenada -5, siendo la pendiente de su tangente 8. El dibujo de la curva es el siguiente:



Nota: Para representar las curvas se utilizan escalas horizontal y vertical que proporcionan una adecuada comprensión de sus características.

E 2- Dibujar la curva $y = 2x^3 - 4x + 1$

Solución: La curva no tiene asíntotas. Tiene una rama parabólica según el eje positivo OY para valores de $x \to +\infty$, y una rama parabólica según el eje negativo OY' para valores de $x \to -\infty$. Derivando la ecuación de la curva e igualando a cero: $y' = 6x^2 - 4 = 0$, cuyas raíces son $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. Volviendo a derivar: $y'' = 12x$. Luego $y''\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) > 0$, $y''\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) < 0$. Por tanto, el punto $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{9-8\sqrt{6}}{9}\right)$ es un mínimo, y el punto $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{9+8\sqrt{6}}{9}\right)$ es un máximo. Para $y'' = 0$, se tiene el punto de inflexión $(0,1)$, en el que la pendiente de su tangente es -4. La curva corta al eje XX' en tres puntos, cuyas abscisas son, aproximadamente: -1.5; 0.26; 1.2. El punto de intersección con el eje YY', es el de inflexión, ya estudiado. El dibujo de la curva es el siguiente:

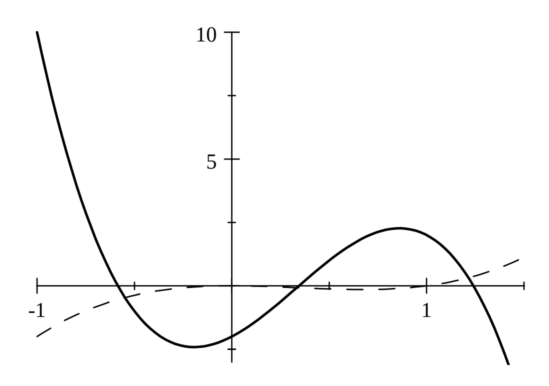


E 3- Dada la curva $y = x^3 - 1$, hallar: 1º) Los valores de la subnormal y la subtangente en el punto $(0,-1)$. 2º) Ecuación del haz de tangentes trazadas desde el origen de coordenadas.

Solución: 1º) Derivando y particularizando para el punto dado: $y' = 3x^2 = 0$. La subnormal $S_n = yy' = 0$. La subtangente $S_t = \dfrac{y}{y'} = \infty$. 2º) Sea $y = \lambda x$, la recta genérica que pasa por el origen. Su intersección con la curva viene dada por $x^3 - \lambda x - 1 = 0$. Esta ecuación debe tener una raíz común con su derivada, $3x^2 - \lambda = 0$. Luego: $4\lambda^3 - 27 = 0$. El haz es: $4\left(\dfrac{y}{x}\right)^3 - 27 = 0$. Operando: $4y^3 - 27x^3 = 0$.

E 4- Dada la curva $y = x^3 - x^2$, hallar el lugar geométrico del punto medio de las cuerdas paralelas a la dirección $y = 2x$.

Solución: Sean (x,y), $(x+\alpha, y+\beta)$ los puntos de intersección de la cuerda con la curva, luego: $y+\beta = (x+\alpha)^3 - (x+\alpha)^2$. Siendo $y = 2x$, se tiene: $2x+\beta-x^3-3x^2\alpha-3x\alpha^2-\alpha^3+x^2+$ $+2\alpha x+\alpha^2 = 0$. Operando: $x^3+(3\alpha-1)x^2+(3\alpha^2-2\alpha-2)x+\alpha^3-\alpha^2-\beta = 0$. Sustituyendo (x,y) por $(-x,-y)$, se tiene: $x^3-(3\alpha-1)x^2+(3\alpha^2-2\alpha-2)x-\alpha^3+\alpha^2+\beta = 0$. Sumando y restando estas dos igualdades y simplificando: $x^3+(3\alpha^2-2\alpha-2)x = 0$, $(3\alpha-1)x^2+\alpha^3-\alpha^2-\beta = 0$. De donde: $x^2 = -3\alpha^2+2\alpha+2 = \dfrac{-\alpha^3+\alpha^2+\beta}{3\alpha-1}$. Por tanto, $\beta = -8\alpha^3+8\alpha^2+4\alpha-2$, o bien, cambiando (α,β) por (x,y), se tiene: $y = -8x^3+8x^2+4x-2$, que es el lugar pedido. En el siguiente dibujo se ha representado en línea continua el lugar geométrico, y en trazos la curva dada.

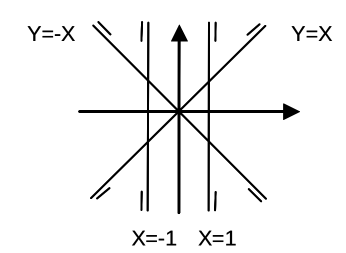


E 5- Dada la curva $y = \pm\dfrac{\sqrt[3]{x^6-x^3+1}}{\sqrt{x^2-1}}$, hallar sus asíntotas y la posición de la curva respecto a ellas.

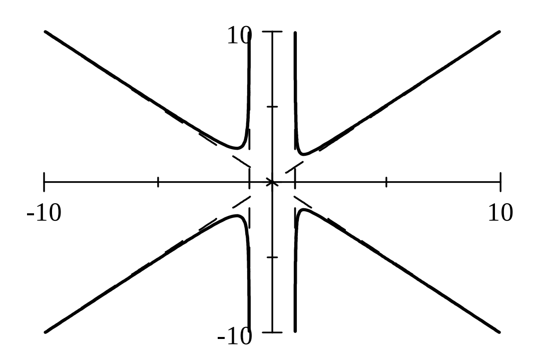
Solución: Los valores que anulan el denominador son $x = \pm 1$, que representan las asíntotas paralelas al eje YY'. Para estudiar la posición de la curva respecta a la asíntota $x = 1$, se sustituye $x = 1+\theta$, con $\theta \to 0$, obteniéndose $y_c - y_a = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2\theta}}$. Luego para $\theta > 0$, se tienen las dos posiciones $y_c \lesseqgtr y_a$, mientras que para $\theta < 0$, no hay curva. Con relación a la asíntota $x = -1$, se sustituye $x = -1+\theta$, con $\theta \to 0$, obteniéndose $y_c - y_a = \pm\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{-2\theta}}$. Luego para $\theta < 0$, se tienen las dos posiciones $y_c \lesseqgtr y_a$, mientras que para $\theta > 0$, no hay curva. Para hallar la asíntota general se tiene que:

$$y = \pm\frac{x^2\left[1+\left(\frac{-1}{x^3}+\frac{1}{x^6}\right)\right]^{\frac{1}{3}}}{x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \pm\frac{x\left[1+\binom{\frac{1}{3}}{1}\left(\frac{-1}{x^3}+\frac{1}{x^6}\right)+\binom{\frac{1}{3}}{2}\left(\frac{-1}{x^3}+\frac{1}{x^6}\right)^2+\ldots\right]}{1-\binom{\frac{1}{2}}{1}\frac{1}{x^2}+\binom{\frac{1}{2}}{2}\frac{1}{x^4}+\ldots} =$$

$$= \pm\frac{x\left(1-\frac{1}{3x^3}+\frac{2}{9x^6}+\ldots\right)}{1-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{8x^4}+\ldots} \simeq \pm\left(x+\frac{1}{2x}\right).$$ Luego las asíntotas generales son: $y = \pm x$. La curva no las corta. Para estudiar la posición de la curva respecto a la asíntota $y = x$, se tiene que $y_c - y_a = \dfrac{1}{2x}$; luego para $x = +\infty$, $y_c > y_a$, y para $x = -\infty$, $y_c < y_a$. Análogamente, para la asíntota $y = -x$, se tiene que $y_c - y_a = \dfrac{-1}{2x}$; luego para $x = +\infty$, $y_c < y_a$, y para $x = -\infty$, $y_c > y_a$. En el esquema siguiente se recogen las posiciones estudiadas.

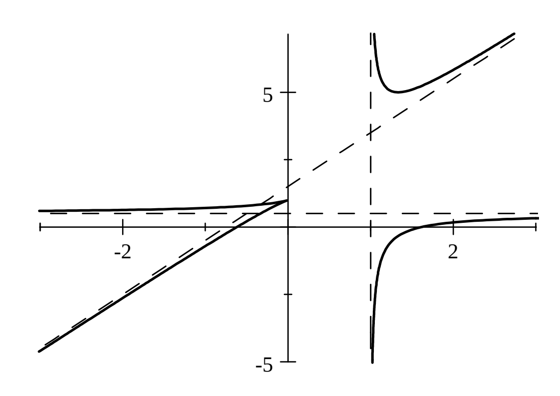


El dibujo de la curva es el siguiente:



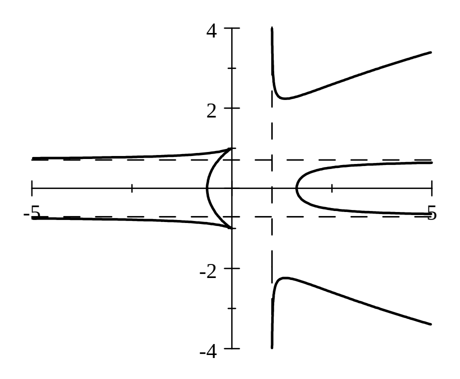
E 6- Dibujar la curva $y = x + 1 \pm \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$.

Solución: La curva no es real para $\frac{x^3}{x-1} < 0$, es decir para $0 < x < 1$. El valor $x = 1$, hace infinito el valor del radicando, luego se trata de una asíntota paralela al eje YY'. Para estudiar la posición de la curva respecto a esta asíntota, se sustituye $x = 1 + \theta$, con $\theta \to 0$, obteniéndose $y = 2 \pm \frac{1}{\sqrt{\theta}}$. Luego para $\theta > 0$, $y = \pm\infty$, mientras que para $\theta < 0$, el valor de y es imaginario, luego no hay curva. Para obtener las asíntotas generales, se tiene: $y = x + 1 \pm x\left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}} = x + 1 \pm x\left[1 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \ldots\right)\right]^{\frac{1}{2}} =$
$= x + 1 \pm x\left[1 + \binom{\frac{1}{2}}{1}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \ldots\right) + \binom{\frac{1}{2}}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \ldots\right)^2 + \ldots\right]$. De donde se tiene que: $y \simeq x + 1 \pm \left(x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x}\right)$. Luego hay dos asíntotas generales: $y = 2x + \frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{2}$. Para estudiar la posición de la curva respecto a $y = 2x + \frac{3}{2}$, se tiene $y_c - y_a = \frac{3}{8x}$; luego para $x = +\infty$, $y_c > y_a$, y para $x = -\infty$, $y_c < y_a$. La curva la corta en $\left(\frac{-1}{3}, \frac{5}{6}\right)$. Con relación a $y = \frac{1}{2}$, se tiene $y_c - y_a = \frac{-3}{8x}$; luego para $x = +\infty$, $y_c < y_a$, y para $x = -\infty$, $y_c > y_a$. La curva la corta en $\left(\frac{-1}{3}, \frac{1}{2}\right)$. Los puntos de intersección de la curva con el eje XX', tienen por abscisas $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. El punto de intersección con el eje YY', tiene por ordenada 1. Este punto $(0,1)$ es de retroceso, siendo su tangente doble $y = x + 1$. Derivando la ecuación de la curva e igualando a cero, se tiene el mínimo $\left(\frac{4}{3}, 5\right)$. De acuerdo con lo anterior, se presenta seguidamente el dibujo de la curva, que también se puede realizar partiendo de la recta $y = x + 1$, sumando y restando a la ordenada de cada uno de sus puntos, la cantidad $\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$.



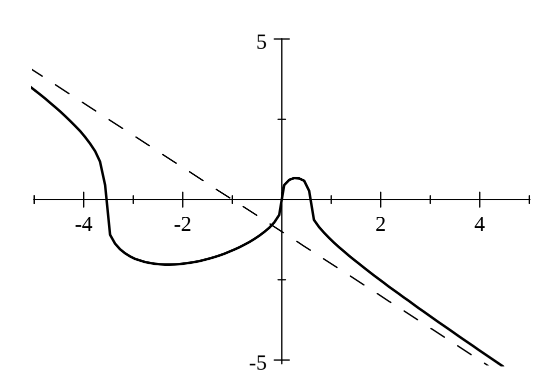
E 7- Dibujar la curva $y^2 = x + 1 \pm \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$.

Solución: Dibujada la curva del ejercicio anterior E 6, en cada punto de ella se extrae la raíz cuadrada de su ordenada, obteniéndose dos puntos que tienen la misma abscisa que el punto de que se trata, y cuyas ordenadas son simétricas respecto al eje XX'. Es evidente que a los puntos de aquella curva cuya ordenada es negativa, no les corresponde curva real al extraer la raíz cuadrada. Las asíntotas de la nueva curva son: $x = 1$, $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. La curva corta a las asíntotas $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, en los puntos de abscisa $\frac{-1}{3}$. La curva tiene ramas parabólicas según el eje OX. La tangente en el punto de retroceso $(0,1)$ es: $y = \frac{x}{2} + 1$. La tangente en el punto de retroceso $(0,-1)$ es: $y = \frac{-x}{2} + 1$. Los puntos de intersección con el eje XX', tienen por abscisas $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Derivando la ecuación de la curva e igualando a cero, se tiene el mínimo $\left(\frac{4}{3}, \sqrt{5}\right)$ y el máximo $\left(\frac{4}{3}, -\sqrt{5}\right)$. Seguidamente se presenta el dibujo de la curva.



E 8- Dibujar la curva $y = \sqrt[3]{-x^3 - 3x^2 + 2x}$, hallando la tangente en el origen como $\lim_{x\to 0} \frac{y}{x}$.

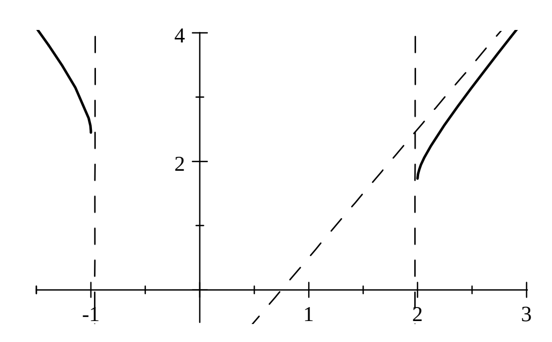
Solución: El $\lim_{x\to 0} \frac{y}{x} = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{-1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = \infty$, luego la tangente en el origen es el eje YY'. Como $y = -x\left[1 + \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}\right)\right]^{\frac{1}{3}} \simeq -x - 1 + \frac{5}{3x}$, la asíntota general es $y = -x - 1$. Como $y_c - y_a = \frac{5}{3x}$, se tiene que para $x = +\infty$, $y_c > y_a$, y para $x = -\infty$, $y_c < y_a$. La curva corta a la asíntota en el punto de abscisa -0.2. Derivando la ecuación de la curva e igualando a cero, se tiene: $3x^2 + 6x - 2 = 0$, de donde se obtiene el máximo $\left(\frac{-3 + \sqrt{15}}{3}, \frac{-36 + 10\sqrt{15}}{9}\right)$ y el mínimo $\left(\frac{-3 - \sqrt{15}}{3}, \frac{-36 - 10\sqrt{15}}{9}\right)$. Los puntos de intersección con el eje XX', tienen por abscisas: 0, $\frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$. La curva corta al eje YY' en el origen, cuya tangente se ha calculado más arriba. De acuerdo con lo anterior, el dibujo de la curva es el siguiente:



E 9- Por desarrollo en serie encontrar las asíntotas de la curva $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x^2 - 1}$.

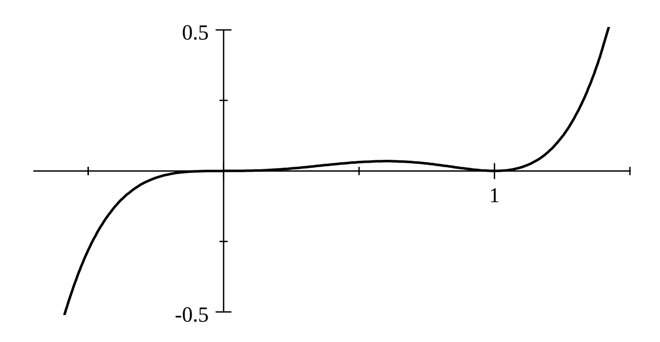
Solución: Se tiene: $y = x\left[1 + \left(\frac{-3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} + x\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 2x - \frac{3}{2} - \frac{5}{8x} + \ldots$. La asíntota es $y = 2x - \frac{3}{2}$. La posición de la curva respecto a la asíntota, viene dada por $y_c - y_a = \frac{-5}{8x}$, luego para

$x = +\infty$, $y_c < y_a$. La curva no corta a la asíntota. No hay curva para $y < 0$. El dibujo de la curva es el siguiente:



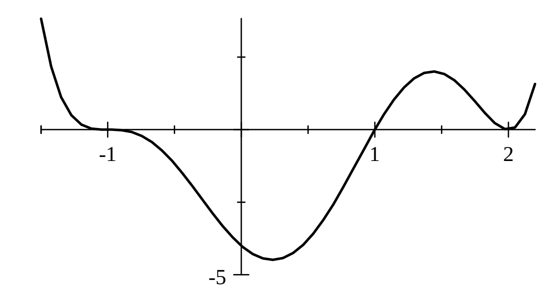
E 10- Dibujar la curva $y = x^3(x-1)^2$.

Solución: No tiene asíntotas. Tiene una rama parabólica según OY en el primer cuadrante, y otra según OY' en el tercer cuadrante. Derivando la ecuación de la curva e igualando a cero, se tiene: $y' = x^2(5x^2 - 8x + 3) = 0$, obteniéndose las raíces 0, $\frac{3}{5}$, 1. Siendo la segunda derivada $y'' = 2x(10x^2 - 12x + 3)$, el punto $(0,0)$ es de inflexión, el punto $\left(\frac{3}{5}, \frac{108}{3125}\right)$ es un máximo, el punto $(1,0)$ es un mínimo. La tangente en $(0,0)$ es el eje XX'. La curva no tiene otros puntos de intersección con los ejes que los ya reseñados. El dibujo de la curva es el siguiente:



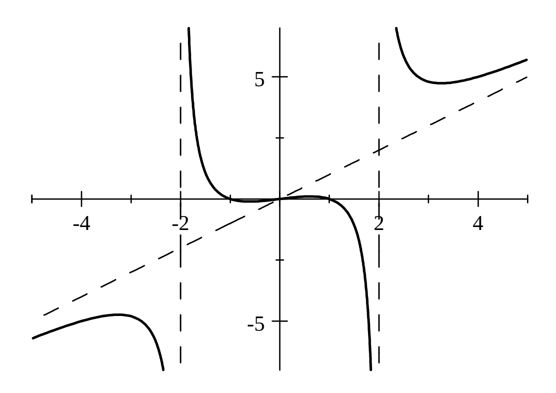
E 11- Dibujar la curva $y = (x-1)(x+1)^3(x-2)^2$.

Solución: La curva no tiene asíntotas. Tiene una rama parabólica en el primer cuadrante, según el eje OY, y otra en el segundo, también según OY. Derivando la ecuación de la curva e igualando a cero: $y' = 2(x+1)^2(x-2)(3x^2 - 5x + 1) = 0$, cuyas raíces son: -1, 2 y $\frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$. Como la segunda derivada es $y'' = 4(x+1)(x-2)(3x^2 - 5x + 1) + 2(x+1)^2(3x^2 - 5x + 1) + 2(x+1)^2(x-2)(6x-5)$, el punto $(-1,0)$ es de inflexión, el punto $(2,0)$ es un mínimo, el punto $\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6}, -4.49\right)$ es un mínimo, el punto $\left(\frac{5+\sqrt{13}}{6}, 2\right)$ es un máximo. La tangente en $(-1,0)$ es el eje XX'. Los puntos de intersección con el eje XX', tienen por abscisas: -1, 1, 2. Los puntos $(-1,0)$ y $(2,0)$ se han estudiado más arriba. La pendiente de la tangente en $(1,0)$ es 8. La intersección con YY' es el punto $(0,-4)$, siendo -4 la pendiente de su tangente. A continuación se presenta el dibujo de la curva, atendiendo a lo expuesto.



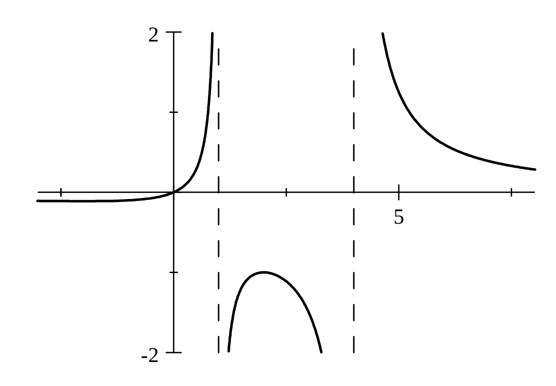
E 12- Dibujar la curva $y = \dfrac{x(x^2-1)}{(x-2)(x+2)}$.

Solución: Las asíntotas paralelas al eje YY' son: $x = 2$, $x = -2$. Para estudiar la posición de la curva con relación a $x = 2$, se sustituye $x = 2+\theta$, con $\theta \to 0$, con lo que $y_c = \dfrac{3}{2\theta}$, luego para $\theta > 0$, $y = +\infty$, y para $\theta < 0$, $y = -\infty$. En cuanto a $x = -2$, se sustituye $x = -2+\theta$, con $\theta \to 0$, con lo que $y_c = \dfrac{2}{\theta}$, luego para $\theta > 0$, $y = +\infty$, y para $\theta < 0$, $y = -\infty$. Para hallar la asíntota general se tiene: $y = \dfrac{x^3-x}{x^2-4} = x + \dfrac{3}{x} + \ldots$, luego la asíntota es $y = x$. Para hallar la posición de la curva, se tiene: $y_c - y_a = \dfrac{3}{x}$, luego para $x > 0$, $y_c > y_a$, y para $x < 0$, $y_c < y_a$. Derivando la ecuación de la curva e igualando a cero, se tiene: $x^4 - 11x^2 + 4 = 0$, obteniéndose el máximo $(-3.26, -4.74)$, el mínimo $(-0.614, -0.106)$, el máximo $(0.614, 0.106)$ y el mínimo $(3.26, 4.74)$. Las intersecciones con el eje XX', tienen por abscisas: 0 y ± 1. El punto $(0,0)$ es de inflexión, siendo $\dfrac{1}{4}$ la pendiente de su tangente. Las tangentes en los puntos $(-1,0)$ y $(1,0)$ tienen la misma pendiente: $\dfrac{-2}{3}$. El único punto de intersección con el eje YY' es el origen, ya estudiado. A continuación se presenta el dibujo de la curva.



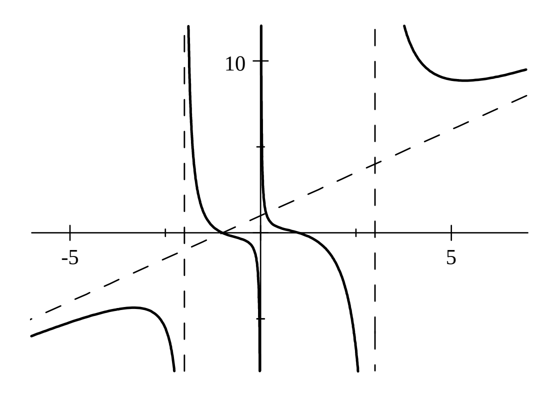
E 13- Dibujar la curva $y = \dfrac{x}{x^2-5x+4}$.

Solución: Siendo $y = \dfrac{x}{(x-1)(x-4)}$, las asíntotas paralelas al eje YY' son: $x = 1$, $x = 4$. Para estudiar la posición de la curva respecto a $x = 1$, se sustituye $x = 1+\theta$, con $\theta \to 0$, con lo que $y_c = \dfrac{1}{-3\theta}$, luego para $\theta > 0$, $y_c = -\infty$, y para $\theta < 0$, $y_c = +\infty$. En cuanto a $x = 4$, se sustituye $x = 4+\theta$, con $\theta \to 0$, con lo que $y_c = \dfrac{1}{3\theta}$, luego para $\theta > 0$, $y_c = +\infty$, y para $\theta < 0$, $y_c = -\infty$. Como $y = \dfrac{x}{x^2-5x+4} = \dfrac{1}{x} + \ldots$, se tiene la asíntota $y = 0$. Para estudiar la posición de la curva respecto a ella, se sustituye $x = \theta$, con $\theta \to 0$, con lo que $y_c = \dfrac{1}{\theta}$, luego para $\theta > 0$, $y = +\infty$, y para $\theta < 0$, $y = -\infty$. Derivando la ecuación de la curva e igualando a cero, se tiene $x^2 - 4 = 0$, obteniéndose el mínimo $\left(-2, \dfrac{-1}{9}\right)$ y el máximo $(2,-1)$. La curva corta a los ejes en el punto $(0,0)$. La pendiente de la tangente en $(0,0)$ es $\dfrac{4}{9}$. De acuerdo con lo anterior, el dibujo de la curva es el siguiente:



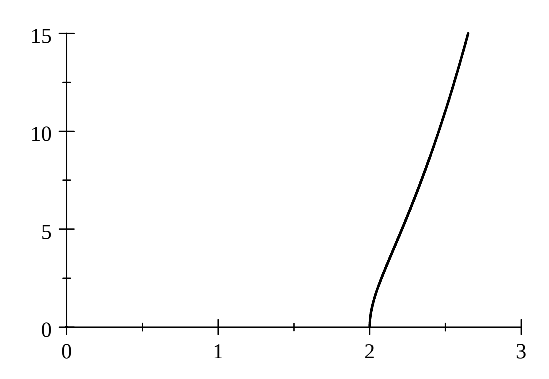
E 14- Dibujar la curva $y = \dfrac{x^4 - 1}{x(x+2)(x-3)}$.

Solución: Los valores que anulan el denominador corresponden a las asíntotas: $x = -2$, $x = 0$, $x = 3$. Para estudiar la posición relativa de la curva con relación a $x = -2$, se sustituye $x = -2 + \theta$, con $\theta \to 0$, con lo que $y_c = \dfrac{8}{5\theta}$, luego para $\theta > 0$, $y_c = +\infty$, y para $\theta < 0$, $y_c = -\infty$. En relación a $x = 0$, se sustituye $x = \theta$, con $\theta \to 0$, con lo que $y_c = \dfrac{1}{12\theta}$, luego para $\theta > 0$, $y_c = +\infty$, y para $\theta < 0$, $y_c = -\infty$. En relación a $x = 3$, se sustituye $x = 3 + \theta$, con $\theta \to 0$, con lo que $y_c = \dfrac{27}{5\theta}$, luego para $\theta > 0$, $y_c = +\infty$, y para $\theta < 0$, $y_c = -\infty$. Para hallar la asíntota general, se tiene, dividiendo el numerador por el denominador: $y = x + 1 + \dfrac{7}{x} + \ldots$, obteniéndose la asíntota $y = x + 1$, siendo $y_c - y_a = \dfrac{7}{x}$, con lo que para $x > 0$, $y_c > y_a$, y para $x < 0$, $y_c < y_a$. La curva corta a esta asíntota, en los puntos de abscisas -1 y $\dfrac{1}{7}$. Derivando la ecuación de la curva e igualando a cero, se tiene: $x^6 - 2x^5 - 18x^4 + 3x^2 - 2x - 6 = 0$, que tiene las raíces reales: $x_1 \simeq -3.3$, que corresponde a un máximo, y $x_2 \simeq 5.3$, que corresponde a un mínimo. Los puntos de intersección con el eje XX' son $(-1, 0)$ y $(1, 0)$; las pendientes de sus tangentes son, respectivamente, -1 y $\dfrac{-2}{3}$. De acuerdo con lo anterior, el dibujo de la curva es el siguiente:



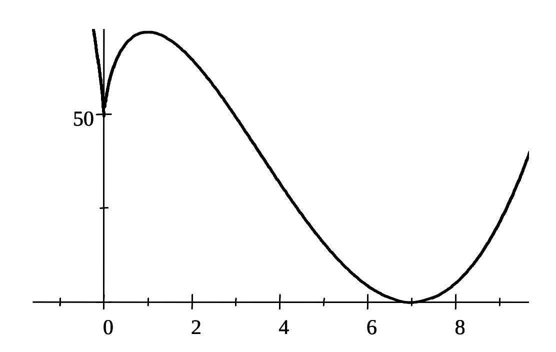
E 15- Dibujar la curva $y = x^3\left(+\sqrt{x-2}\right)$.

Solución: La curva tiene valores reales para $x \geq 2$. Para $x = 0$, tiene el punto aislado $(0, 0)$. Como el signo de la raíz es el positivo, se tiene que $y \geq 0$. No tiene asíntotas. Tiene una rama parabólica según el eje OY, en el primer cuadrante. El punto $(2, 0)$ es de discontinuidad, siendo ∞ la pendiente de su tangente. El dibujo de la curva es el siguiente:



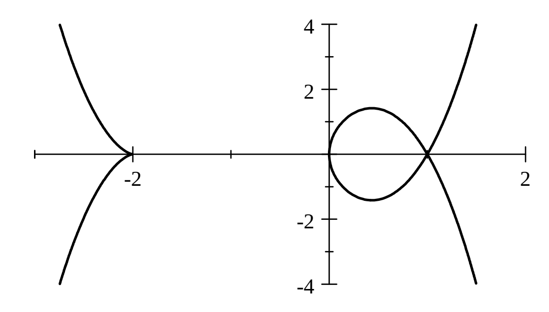
E 16- Dibujar la curva $y = \left(1 + x^{\frac{2}{3}}\right)(7 - x)^2$.

Solución: No tiene asíntotas. Tiene una rama parabólica según el eje OY en el primer cuadrante, y otra, también según dicho eje, en el segundo cuadrante. Derivando la ecuación de la curva e igualando a cero, se tiene: $(7 - x)\left(4x^{\frac{2}{3}} - 7x^{\frac{-1}{3}} + 3\right) = 0$, obteniéndose el mínimo $(7, 0)$ y el máximo $(1, 72)$. La curva corta al eje YY' en $(0, 49)$, que es un punto de retroceso con tangente $x = 0$. Estas consideraciones se recogen en el dibujo de la curva:



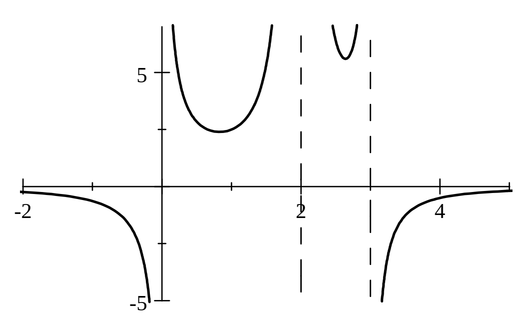
E 17- Dibujar la curva $y = \pm\sqrt{x(x-1)^2(x+2)^3}$.

Solución: Se trata de $y^2 = x(x-1)^2(x+2)^3$, que tiene valores reales para $x \leq -2$, y para $x \geq 0$. No tiene asíntotas. Tiene cuatro ramas parabólicas, dos según el eje OY en el primer y segundo cuadrante, y otras dos según el eje OY' en el tercer y cuarto cuadrante. Es simétrica respecto al eje XX', al que corta en $(-2,0)$, $(0,0)$, $(1,0)$. Las pendientes de sus tangentes son: para $(-2,0)$, la pendiente es 0; para $(0,0)$, es ∞; para $(1,0)$, las de sus dos tangentes son $\pm 6\sqrt{3}$. Derivando la ecuación de la curva e igualando a cero, se obtiene $3x^2 + x - 1 = 0$, a cuya raíz $\dfrac{-1+\sqrt{13}}{6} \simeq 0.43$, corresponde el máximo $(0.43, 4.2)$ y el mínimo $(0.43, -4.2)$. El dibujo de la curva es el siguiente:



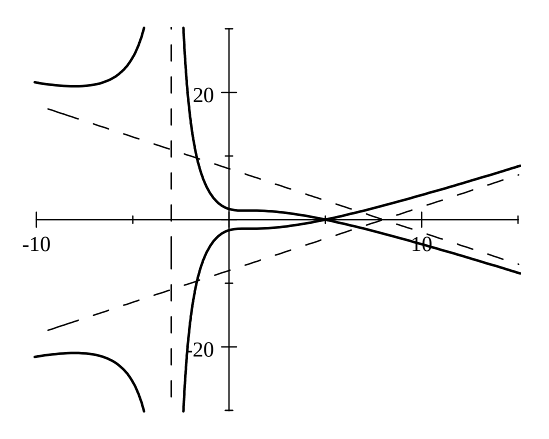
E 18- Dibujar la curva $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{(x-2)^2} - \dfrac{1}{x-3}$.

Solución: Tiene las asíntotas $x = 0$, $x = 2$, $x = 3$. Para estudiar la posición de la curva respecto a $x = 0$, se sustituye $x = \theta$, con $\theta \to 0$, con lo que $y_c = \dfrac{1}{\theta} + k_1$, luego para $\theta > 0$, $y_c = +\infty$, y para $\theta < 0$, $y_c = -\infty$. En relación a $x = 2$, se sustituye $x = 2 + \theta$, con $\theta \to 0$, con lo que $y_c = \dfrac{1}{\theta^2} + k_2$, luego tanto para $\theta > 0$, como para $\theta < 0$, $y_c = +\infty$. En relación a $x = 3$, se sustituye $x = 3 + \theta$, con $\theta \to 0$, con lo que $y_c = \dfrac{-1}{\theta} + k_3$, con lo que para $\theta > 0$, $y_c = -\infty$, y para $\theta < 0$, $y_c = +\infty$. Operando en la ecuación dada, se tiene: $y = \dfrac{(x-2)^2(x-3) + x(x-3) - x(x-2)^2}{x(x-2)^2(x-3)} = \dfrac{-2}{x^2} + \ldots$, obteniéndose la asíntota $y = 0$, siendo $y_c - y_a = \dfrac{-2}{x^2}$, luego tanto para $x = +\infty$, como para $x = -\infty$, $y_c < y_a$. La curva no corta a las asíntotas. Derivando la ecuación de la curva, se tiene: $4x^4 - 33x^3 + 108x^2 - 156x + 72 = 0$, obteniéndose dos mínimos, uno para $x \simeq 0.8$, y el segundo para $x \simeq 2.6$. La curva se puede dibujar también, sumando las tres curvas: $y_1 = \dfrac{1}{x}$, $y_2 = \dfrac{1}{(x-2)^2}$, $y_3 = \dfrac{-1}{x-3}$. El dibujo de la curva es el siguiente:



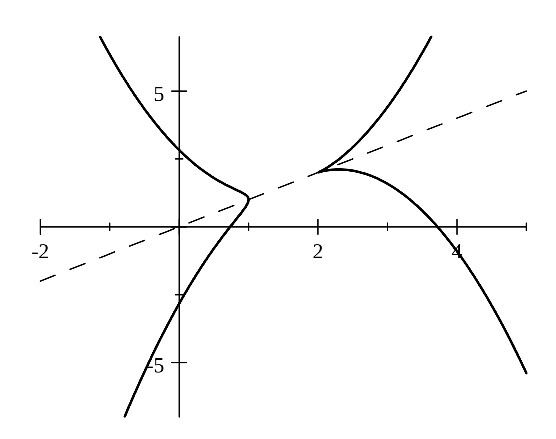
E 19- Dibujar la curva $y = \pm\dfrac{x-5}{x+3}\sqrt{x^2+1}$.

Solución: La curva es simétrica respecto al eje XX'. Tiene la asíntota $x = -3$. Para estudiar la posición de la curva respecto a ella, se sustituye $x = -3+\theta$, con $\theta \to 0$, con lo que $y = \pm\dfrac{-8\sqrt{10}}{\infty}$, luego tanto para $\theta > 0$, como para $\theta < 0$, $y_c = \pm\infty$. Realizando las operaciones de la ecuación dada, se tiene: $y = \pm\left(x-8+\dfrac{49}{2x}+\ldots\right)$. Luego la curva tiene las asíntotas generales $y = \pm(x-8)$. Para estudiar la posición de la curva respecto a $y = x-8$, se tiene $y_c - y_a = \dfrac{49}{2x}$, luego para $x = +\infty$, $y_c > y_a$, y para $x = -\infty$, $y_c < y_a$. La posición con la asíntota $y = -x+8$, es simétrica de la posición anterior, respecto al eje XX'. La curva corta a estas asíntotas en los puntos de abscisas -1.66 y 6.76. Derivando la ecuación dada e igualando a cero, se tiene: $x^3+6x^2-15x+8 = 0$, cuyas raíces son: 1 (raíz doble) y -8. Los puntos $\left(1,\pm\sqrt{2}\right)$ son de inflexión. El punto $\left(-8, \dfrac{13\sqrt{65}}{5}\right)$ es un mínimo, y el punto $\left(-8, \dfrac{-13\sqrt{65}}{5}\right)$ es un máximo. La curva corta al eje XX' en $(5,0)$, donde tiene dos tangentes cuyas pendientes son $\dfrac{\pm\sqrt{26}}{8}$. El dibujo de la curva es el siguiente:



E 20- Dibujar la curva $y = x \pm \sqrt{(x-1)(x-2)^3}$.

Solución: La curva tiene valores reales para $x \leq 1$, y para $x \geq 2$. No tiene asíntotas. Tiene en cada cuadrante una rama parabólica, según OY en los dos primeros cuadrantes, y según OY' en el tercero y cuarto cuadrantes. La curva se puede dibujar sumando y restando a la ordenada de cada punto de $y = x$, la cantidad $\sqrt{(x-1)(x-2)^3}$. En el punto $(1,1)$ la pendiente de la tangente es ∞. En el punto $(2,2)$, la pendiente de la tangente es 1, siendo un punto de retroceso. La curva corta al eje XX' según la ecuación $x^4-7x^3+17x^2-20x+8 = 0$, cuyas raíces reales son 0.73 y 3.72. El dibujo de la curva es el siguiente:



E 21- Hallar la ecuación tangencial de $y^2 = x^3$.

Solución: Como $ux+vy+1 = 0$, $y = \dfrac{-1-ux}{v}$. Luego $x^3 = \left(\dfrac{-1-ux}{v}\right)^2$. Desarrollando, se tiene: $v^2x^3-u^2x^2-2ux-1 = 0$. Derivando respecto a x, se tiene: $3v^2x^2-2u^2x-2u = 0$. De donde se obtiene:

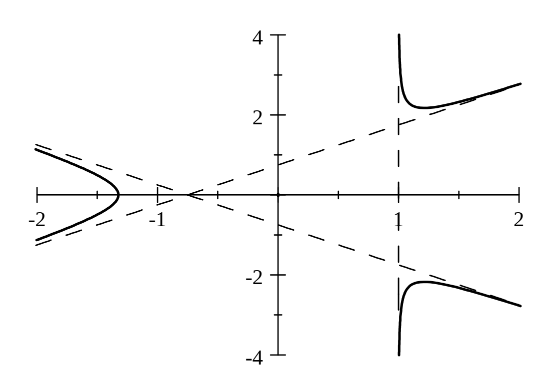
$x=\dfrac{u^2\pm\sqrt{u^4+6uv^2}}{3v^2}$. Luego, sustituyendo este valor en la ecuación $v^2x^3-u^2x^2-2ux-1=0$, se tiene: $v^2\left(\dfrac{u^2\pm\sqrt{u^4+6uv^2}}{3v^2}\right)^3-u^2\left(\dfrac{u^2\pm\sqrt{u^4+6uv^2}}{3v^2}\right)^2-2u\left(\dfrac{u^2\pm\sqrt{u^4+6uv^2}}{3v^2}\right)-1=0$. Operando y simplificando, se tiene la ecuación tangencial: $27v^2+4u^3=0$.

E 22- Hallar la ecuación puntual de $u^2=v^3$.

Solución: Como $ux+vy+1=0$, $v^{\frac{3}{2}}x+vy+1=0$. Derivando respecto a v: $\frac{3}{2}v^{\frac{1}{2}}x+y=0$, de donde $v=\dfrac{4y^2}{9x^2}$, $u=\dfrac{-9x^2-4y^3}{9x^3}$. Luego $\dfrac{(-9x^2-4y^3)^2}{81x^6}=\dfrac{64y^6}{729x^6}$. Operando y simplificando: $27x^2+4y^3=0$.

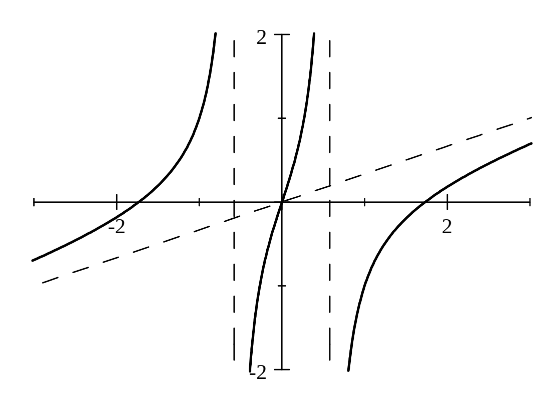
E 23- Dibujar $y=\pm\sqrt{x+\sqrt{\dfrac{x^5}{x-1}}}$.

Solución: Los intervalos de existencia de la curva vienen dados por $\dfrac{x^5}{x-1}\geq 0$, $x+\sqrt{\dfrac{x^5}{x-1}}\geq 0$. La primera desigualdad se cumple para $x\geq 1$, y para $x\leq 0$. La segunda desigualdad se cumple para $x\leq -1.32$, y para $x\geq 1$. La curva es simétrica respecto al eje XX'. El punto de la curva $(0,0)$ es un punto aislado. La curva tiene la asíntota $x=1$; evidentemente la curva toma los valores $\pm\infty$, para $x=1+\theta$, con $\theta\to 0$. Efectuando las operaciones indicadas en la ecuación de la curva, se tiene: $y=\pm x\left(1+\dfrac{3}{4x}-\dfrac{3}{32x^2}+\ldots\right)=\pm\left(x+\dfrac{3}{4}-\dfrac{3}{32x}+\ldots\right)$. Luego la curva tiene las asíntotas generales $y=\pm\left(x+\dfrac{3}{4}\right)$. Para estudiar la posición de la curva respecto a $y=x+\dfrac{3}{4}$, se tiene que $y_c-y_a=\dfrac{-3}{32x}$, luego para $x=+\infty$, $y_c<y_a$, y para $x=-\infty$, $y_c>y_a$. Las posiciones respecto a $y=-x-\dfrac{3}{4}$, son las simétricas de las anteriores, respecto al eje XX'. La curva no corta a las asíntotas. La tangente en $(-1.32,0)$ tiene por pendiente ∞. Derivando la ecuación de la curva e igualando a cero, se tiene: $16x^5-40x^4+21x^3+12x^2-12x+4=0$, que tiene una raíz real para 1.21, es decir que $(1.21,2.03)$ es un mínimo, y su simétrico respecto a XX', es un máximo. El dibujo de la curva es el siguiente:



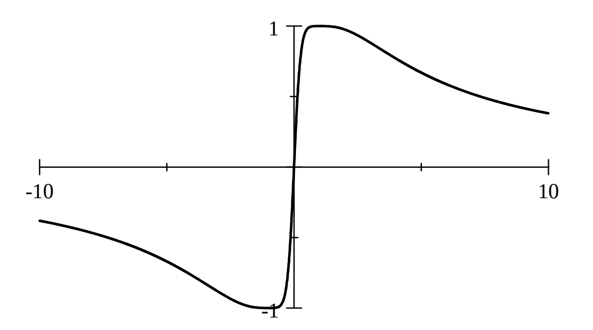
E 24- Dibujar la curva $y=x\dfrac{x^2-3}{3x^2-1}$.

Solución: La curva es simétrica respecto al origen de coordenadas. Tiene las asíntotas paralelas al eje YY', $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Para estudiar la posición de la curva respecto a $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, se sustituye $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\theta$, con $\theta\to 0$, con lo que $y=\dfrac{-4}{9\theta}$, luego para $\theta>0$, $y=-\infty$, y para $\theta<0$, $y=+\infty$. En relación a $x=\dfrac{-1}{\sqrt{3}}$, se sustituye $x=\dfrac{-1}{\sqrt{3}}+\theta$, con $\theta\to 0$, con lo que $y=\dfrac{-4}{9\theta}$, luego para $\theta>0$, $y=-\infty$, y para $\theta<0$, $y=+\infty$. Realizando las operaciones indicadas en la ecuación dada, se tiene: $y=\dfrac{x}{3}-\dfrac{8}{9x}+\ldots$, luego la curva tiene la asíntota general $y=\dfrac{x}{3}$; como $y_c-y_a=\dfrac{-8}{9x}$, para $x=+\infty$, $y_c<y_a$, y para $x=-\infty$, $y_c>y_a$. La curva no tiene máximos ni mínimos, y corta al eje XX' en los puntos de abscisas 0 y $\pm\sqrt{3}$. El punto $(0,0)$ es de inflexión, siendo 3 la pendiente de su tangente. La pendiente de las tangentes en $\left(\pm\sqrt{3},0\right)$ es $\dfrac{3}{4}$. El dibujo de la curva es el siguiente:



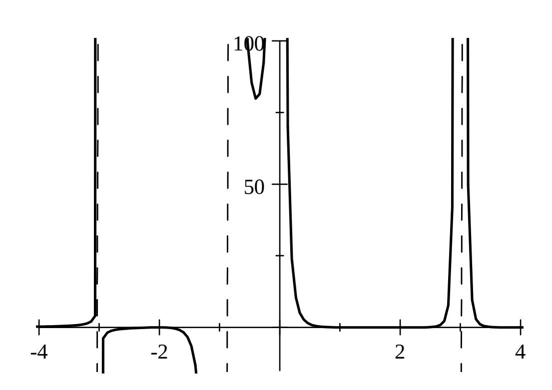
E 25- Calcular $\tanh 4a$ en función de $\tanh a$. En el resultado obtenido, sustituir $\tanh 4a = y$, $\tanh a = x$, representando la curva $y = f(x)$.

Solución: $\tanh 2a = \dfrac{2\tanh a}{1+\tanh^2 a}$, $\tanh 4a = \dfrac{4\tanh a(1+\tanh^2 a)}{\tanh^4 a + 6\tanh^2 a + 1}$, $y = \dfrac{4x(1+x^2)}{x^4+6x^2+1}$. La curva es simétrica respecto al origen de coordenadas. Tiene la asíntota $y = 0$. Para estudiar la posición de la curva respecto a $y = 0$, se tiene que para $x = +\infty$, $y_c > y_a$, y para $x = -\infty$, $y_c < y_a$. Derivando la ecuación de la curva e igualando a cero, se tiene el máximo $(1,1)$ y el mínimo $(-1,-1)$. La pendiente de la tangente en $(0,0)$, que es punto de inflexión, es 4. No tiene ninguna otra intersección con los ejes. El dibujo de la curva es el siguiente:

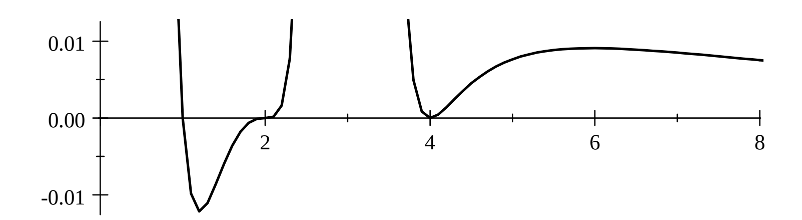


E 26- Dibujar la curva $y = \dfrac{(x+2)^2(x-1)(x-2)^3(x-4)^2}{(x+3)(x+1)^3(x-3)^4x^2}$

Solución: Las asíntotas son $x = -3$, $x = -1$, $x = 3$, $x = 0$, $y = 0$. Las posiciones de la curva respecto a ellas, son las expuestas en el dibujo. La curva no corta a las asíntotas verticales. La curva no corta al eje YY'. El punto $(-2,0)$ corresponde a un máximo. La pendiente de la tangente en $(1,0)$ es $\dfrac{-729}{512}$. El punto $(2,0)$ es de inflexión, siendo su tangente $y = 0$. El punto $(4,0)$ corresponde a un mínimo. La curva tiene otros dos mínimos: $(-0.38, 79.59)$, $(1.19, -0.012)$, y otro máximo para $(6, 0.009)$. El dibujo de la curva es el siguiente:



En el siguiente dibujo se presenta un detalle referente a la posición de la curva respecto al eje XX', para $x > 0$.

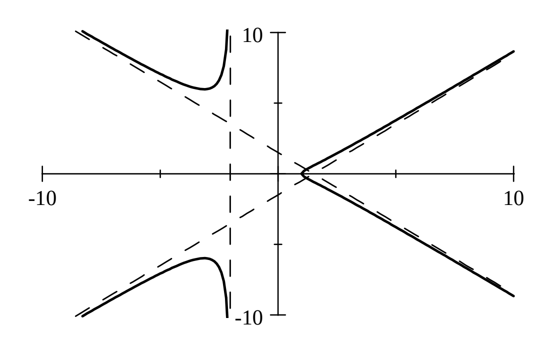


E 27- Representar la curva $y = \pm x\sqrt{\dfrac{x-1}{x-k}}$ y discutirla según los valores de k.

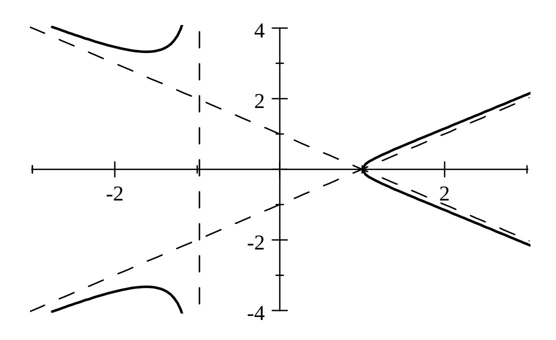
Solución: La curva es simétrica respecto al eje XX'. No hay curva en el intervalo entre $x = 1$ y $x = k$. Tiene la asíntota paralela al eje YY', $x = k$. Efectuando las operaciones de la ecuación dada, se tiene: $y = \pm\left[x + \dfrac{k-1}{2} + \dfrac{(k-1)(3k+1)}{8x} + \dfrac{(k-1)(5k^2+2k+1)}{16x^2} + \ldots\right]$, luego tiene las asíntotas generales $y = \pm\left(x + \dfrac{k-1}{2}\right)$. La curva corta a las asíntotas generales en el punto de abscisa $\dfrac{k(k-1)}{-3k-1}$, y estas cortan al eje XX' en $\left(\dfrac{-k+1}{2}, 0\right)$. La curva corta al eje XX' en los puntos $(0,0)$, $(1,0)$. Solo corta al eje YY' en $(0,0)$. Derivando e igualando a cero la ecuación dada, se tiene que las abscisas de los máximos y mínimos de la curva, vienen dadas por la ecuación $2x^2 - (3k+1)x + 2k = 0$. Se estudian los siguientes casos, según el valor de k, desde $-\infty$ a $+\infty$:

a) $k = -\infty$: La curva se reduce al eje $y = 0$.

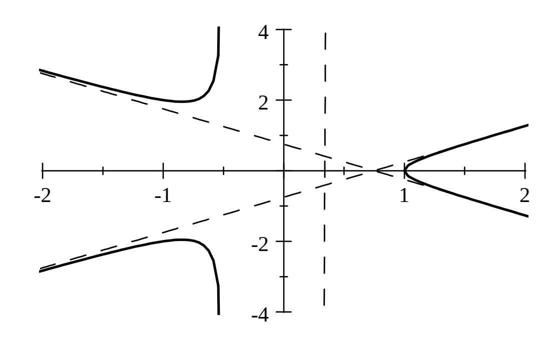
b) $-\infty < k < -1$: La curva tiene las tres asíntotas calculadas. La posición de la curva respecto a la asíntota $y = x + \dfrac{k-1}{2}$, viene dada por $y_c - y_a = \dfrac{(k-1)(3k+1)}{8x}$, luego para $x = +\infty$, $y_c > y_a$, y para $x = -\infty$, $y_c < y_a$. La posición respecto a la otra asíntota general es simétrica a la estudiada, respecto al eje XX'. La abscisa del punto de intersección de las asíntotas con XX' es mayor que 1. El punto $(0,0)$ es un punto aislado. La curva se ha dibujado para $k = -2$.



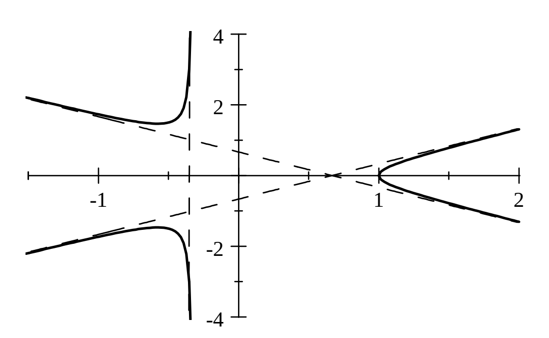
c) $k = -1$: El dibujo es como el del caso anterior, con la particularidad de que las asíntotas generales se cortan en $(1,0)$, donde la curva las corta. Se mantiene el punto aislado $(0,0)$.



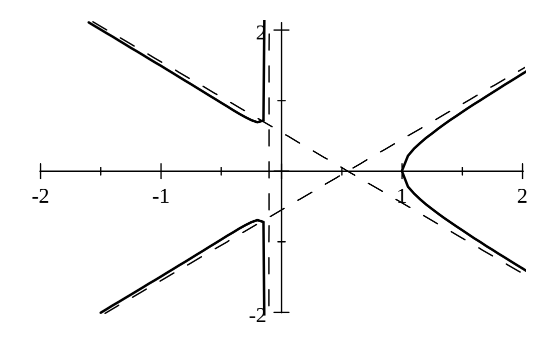
d) $-1 < k < \dfrac{-1}{3}$: El dibujo es como el de los casos anteriores, con la particularidad de que la abscisa del punto de corte de las asíntotas generales es menor que 1, y la abscisa de los puntos de corte de la curva con estas asíntotas, es mayor que 1. Se mantiene el punto aislado $(0,0)$. La curva se ha dibujado para $k = \dfrac{-1}{2}$.



e) $k = \frac{-1}{3}$: Al anularse el término $\frac{(k-1)(3k+1)}{8x}$, se tiene que la diferencia $y_c - y_a$ es igual a: $\frac{(k-1)(5k^2+2k+1)}{16x^2}$, con lo que no varía la posición de la curva con las asíntotas generales para $x = \pm\infty$. La curva no corta a estas asíntotas. Se mantiene el punto aislado $(0,0)$.

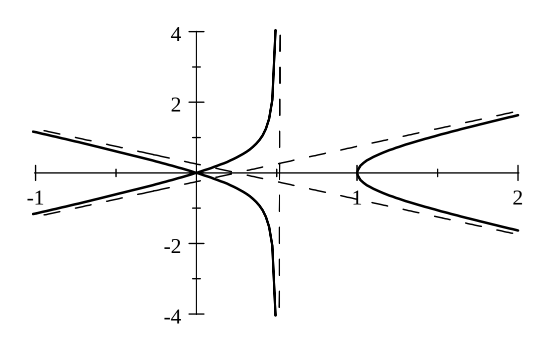


f) $\frac{-1}{3} < k < 0$: Cambia la posición relativa de la curva respecto a las asíntotas generales, con relación a los casos anteriores. Se mantiene el punto aislado $(0,0)$. La curva se ha dibujado para $k = \frac{-1}{10}$.



g) $k = 0$: La curva es la hipérbola $x^2 - y^2 + x = 0$. El origen no es un punto aislado, siendo el eje YY' la tangente en él.

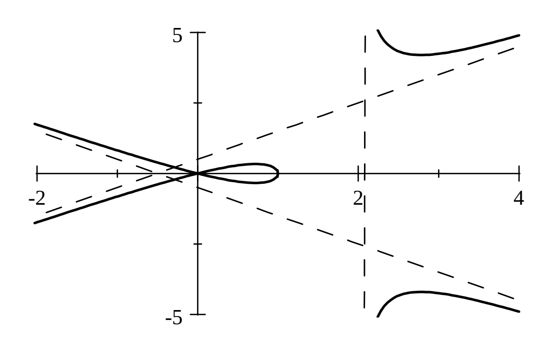
h) $0 < k < 1$: El origen es un punto doble, cuyas tangentes tienen por pendiente $\pm\sqrt{2}$. La tangente en $(1,0)$ es $x = 1$. La curva se ha dibujado para $k = \frac{1}{2}$.



i) $k = 1$: La curva se compone de las dos bisectrices: $y = \pm x$.

j) $1 < k < +\infty$: La curva tiene un lazo entre $0 < x < 1$. Tiene dos máximos y dos mínimos. La curva se ha

dibujado para $k = 2$.



k) $k = +\infty$: La curva se reduce al eje $y = 0$.

E 28- Dada la ecuación de la catenaria $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{-x}{a}}\right)$, determinar a de manera que la curva pase por un punto dado (x_0, y_0). Calcular el valor límite que puede tener la relación $m = \frac{y_0}{x_0}$ para que el problema sea posible.

Solución: Se tiene: $y = a\cosh\frac{x}{a}$, luego $y_0 = a\cosh\frac{x_0}{a}$. Haciendo $\frac{x_0}{a} = t$, se tiene: $\frac{y_0}{x_0}t = \cosh t$, es decir: $mt = \cosh t$, $m = \frac{\cosh t}{t}$. La catenaria $y = \cosh x$, es simétrica respecto al eje YY': a un valor dado de la ordenada y, siempre ≥ 1, le corresponden los valores $\pm x$ de la abscisa. Se establece la siguiente tabla de valores:

t	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,19
$\cosh t$	1	1,005	1,020	1,045	1,081	1,128	1,185	1,255	1,337	1,433	1,543	1,669	1,796
m	∞	10,05	5,100	3,484	2,703	2,255	1,976	1,793	1,672	1,592	1,543	1,517	1,509

t	1,20	1,21	1,3	1,4	1,5	2,0	3,0	10,0	50,0	100
$\cosh t$	1,811	1,826	1,971	2,151	2,352	3,762	10,068	11013,2	$2,59 \cdot 10^{21}$	$1,34 \cdot 10^{43}$
m	1,509	1,509	1,516	1,536	1,568	1,881	3,356	1101,3	$5,18 \cdot 10^{19}$	$1,34 \cdot 10^{41}$

Luego para un punto dado (x_0, y_0), en el que $y_0 \geq 1$, se obtiene $\left|\frac{y_0}{x_0}\right| = m$, al que corresponden en la tabla, dos valores de t, uno de ellos situado en el intervalo $0 < t < 1.2$, y el otro situado en el intervalo $1,20 < t < \infty$. Por tanto, existen dos valores de $a = \frac{|x_0|}{t}$. Para que el problema sea posible ha de cumplirse que $|m| \geq 1,509$.

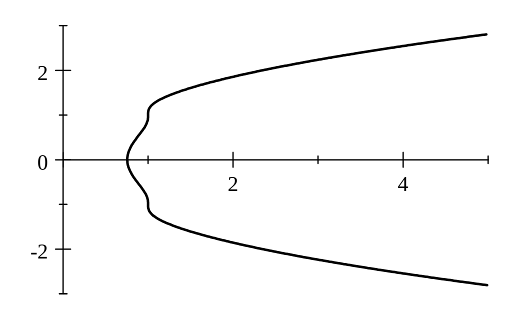
E 29- La curva $y = x(x-a)^2$ es cortada por $y = mx$ en tres puntos. Hallar las tangentes en estos tres puntos y determinar el punto donde cada una de ellas corta a la curva.

Solución: Las abscisas de los tres puntos de intersección se obtienen de la ecuación $mx = x(x-a)^2$, cuyas raíces son: 0, $a \pm \sqrt{m}$. Derivando la ecuación de la curva, se tiene: $y' = 3x^2 - 4ax + a^2$, que particularizada para las tres abscisas anteriores, da las pendientes de las tres tangentes: a^2, $3m \pm 2a\sqrt{m}$. Por tanto, las tres tangentes son: $y = a^2x$, $y - m(a \pm \sqrt{m}) = (3m \pm 2a\sqrt{m})[x - (a \pm \sqrt{m})]$. Estas tangentes cortan a la curva en los puntos: $(2a, 2a^3)$, $(\mp 2\sqrt{m}, \mp 2m\sqrt{m})$, respectivamente.

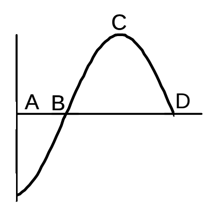
E 30- Dibujar la curva $y = \pm\sqrt{x + \sqrt[3]{x^2 - 1}}$.

Solución: La curva es real para $x + \sqrt[3]{x^2 - 1} \geq 0$, luego $x^3 + x^2 - 1 = 0$, que tiene una raíz real 0.755. Luego la curva es real para $x \geq 0.755$. La curva es simétrica respecto al eje XX'. La pendiente de la tangente en $(0.755, 0)$, es ∞. No tiene asíntotas. Tiene una rama parabólica según el eje OX en el primer cuadrante, y su simétrica respecto a $y = 0$, en el cuarto.

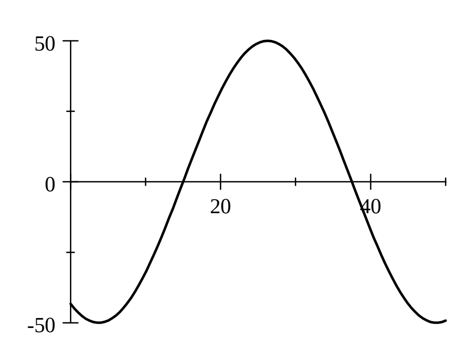
El dibujo de la curva es el siguiente:



E 31- Representada en coordenadas cartesianas la función periódica $y = 50\sin(\omega t - \alpha)$, resulta la figura adjunta, en la que $AB = 15\,\text{mm}$, y el área limitada por el arco BCD y el eje de abscisas, mide $S = \dfrac{2250}{\pi}\,\text{mm}^2$. Determinar el periodo, la frecuencia y la fase de la función dada.



Solución: Para $y = 50\sin(\omega t - \alpha) = 0$, $\omega t - \alpha = k\pi$, es decir: $t = \dfrac{\alpha + k\pi}{\omega}$. Como $AB = t = 15$, $\omega = \dfrac{\alpha + k\pi}{15}$. Para $k = 0$, se tiene: $\alpha = 15\omega$. Para $k = 1$, se tiene: $t = \dfrac{\alpha + \pi}{\omega}$. Por tanto el área definida es: $S = \int_{15}^{\frac{\pi+\alpha}{\omega}} 50\sin(\omega t - \alpha)dt = \int_{15}^{\frac{\pi+15\omega}{\omega}} 50\sin(\omega t - \alpha)dt = \dfrac{50}{\omega}\cos(\omega t - \alpha)\Big|_{15}^{\frac{\pi+15\omega}{\omega}} = \dfrac{-50}{\omega}(\cos\pi - \cos 0) =$ $= \dfrac{100}{\omega} = \dfrac{2250}{\pi}$, de donde $\omega = \dfrac{2\pi}{45}$. Por tanto: $y = 50\sin\left(\dfrac{2\pi t}{45} - 15\omega\right) = 50\sin\left(\dfrac{2\pi t}{45} - \dfrac{2\pi}{3}\right)$. Luego la amplitud es 50, el periodo es 45, la frecuencia es $\dfrac{1}{45}$, y la fase es $\dfrac{-2\pi}{3}$. El dibujo de la curva es el siguiente:



E 32- Hallar los focos de la curva $y = \sin x$.

Solución: Siendo el foco (α,β), la recta $y - \beta = i(x - \alpha)$ será tangente a la curva en el punto $(t, \sin t)$. Como la pendiente en este punto es $y' = \cos t$, ha de tenerse que: $y - \beta - i(x - \alpha) \equiv y - \sin t - \cos t(x - t)$, es decir: $\dfrac{\cos t}{i} = \dfrac{\sin t - t\cos t}{\beta - \alpha i} = 1$. Luego, $\cos t = i$, $\sin t = \pm\sqrt{2}$, $\sin t - t\cos t = \beta - \alpha i$, es decir: $\pm\sqrt{2} - i\arccos i = \beta - \alpha i$ (**A**). Para calcular $z = \arccos i$, se tiene: $\cos z = \dfrac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} = i$, de donde se obtiene que: $e^{2zi} - 2ie^{zi} + 1 = 0$. Luego, $e^{zi} = \left(1 \pm \sqrt{5}\right)i$, $zi = \ln\left[\left(1 \pm \sqrt{5}\right)i\right] = \ln i + \ln\left(1 + \sqrt{5}\right)$, $z = -i\ln i - i\ln\left(1 + \sqrt{5}\right)$. Ahora bien: $e^{\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)i} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = i$. Luego $(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi)i = \ln i$. Por tanto: $z = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln\left(1 + \sqrt{5}\right)$. Sustituyendo en (**A**) este valor de z, se tiene: $\pm\sqrt{2} - i\left[\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln\left(1 + \sqrt{5}\right)\right] = \pm\sqrt{2} - \ln\left(1 + \sqrt{5}\right) - i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \beta - \alpha i$. Por tanto, las coordenadas de los focos son: $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $\beta = \pm\sqrt{2} - \ln\left(1 + \sqrt{5}\right)$.

E 33- Hallar los centros de la curva $y = \sin x$.

Solución: Sea (α,β) un centro de la curva. Trasladando el origen de coordenadas a (α,β), se tiene:

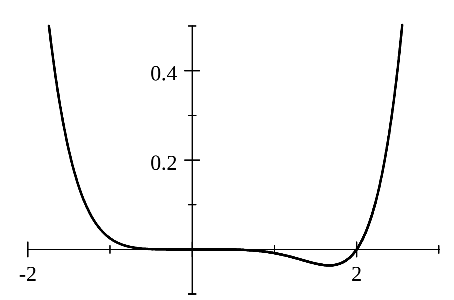
$y+\beta = \sin(x+\alpha) = \sin x\cos\alpha + \cos x\sin\alpha$. Luego se tiene que: $f(x,y) = y+\beta-\cos\alpha\sin x-\sin\alpha\cos x$, $f(-x,-y) = -y+\beta+\cos\alpha\sin x-\sin\alpha\cos x$. Para que haya solución, han de anularse los coeficientes de los términos que no cambian de signo. Por tanto: $\beta = 0$, $\sin\alpha = 0$. Luego hay infinitos centros, cuyas coordenadas son: $(k\pi, 0)$.

E 34- Dada la curva $y^2 = 4x^3$, hallar la curva diametral correspondiente a la dirección (α,β), es decir, la curva conjugada con dicha dirección.

Solución: Sea (a,b) un punto cualquiera por el que pasa una recta paralela a la dirección dada, cuya ecuación es: $x = a+\alpha\lambda$, $y = b+\beta\lambda$. Su intersección con la curva dada, es: $(b+\beta\lambda)^2 = 4(a+\alpha\lambda)^3$. Desarrollando esta ecuación, se obtiene: $4\alpha^3\lambda^3+(12a\alpha^2-\beta^2)\lambda^2+(12a^2\alpha-2b\beta)\lambda+4a^3-b^2 = 0$. Es decir: $[(12a\alpha^2-\beta^2)\lambda^2+4a^3-b^2]+\lambda(4\alpha^3\lambda^2+12a^2\alpha-2b\beta) = 0$. Haciendo $\lambda^2 = t$, se tiene: $\varphi_1+\lambda\varphi_2 = 0$, donde $\varphi_1 = (12a\alpha^2-\beta^2)t+4a^3-b^2$, $\varphi_2 = 4\alpha^3t+12a^2\alpha-2b\beta$. Eliminando t entre $\varphi_1 = 0$ y $\varphi_2 = 0$, se tiene: $4\alpha^3(4a^3-b^2)-(12a^2\alpha-2b\beta)(12a\alpha^2-\beta^2) = 0$. Desparticularizando, se tiene la ecuación pedida: $2\alpha^3(4x^3-y^2)-(6x^2\alpha-y\beta)(12x\alpha^2-\beta^2) = 0$.

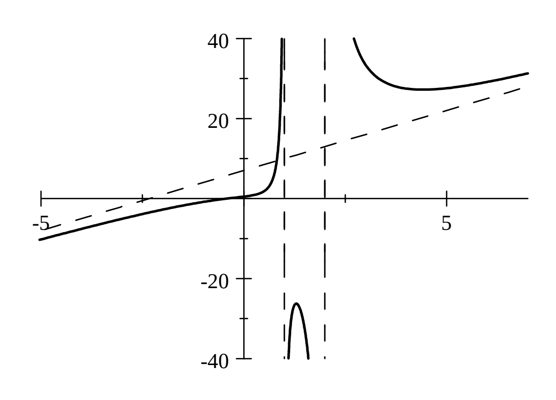
E 35- Calcular máximos, mínimos y puntos de inflexión de la curva $y = \dfrac{x^6}{120}-\dfrac{x^5}{60}$. Dibujar la curva.

Solución: Derivando sucesivamente la ecuación dada, se tiene que: $y' = \dfrac{x^5}{20}-\dfrac{x^4}{12} = \dfrac{x^4}{60}(3x-5)$, $y'' = \dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^3}{3} = \dfrac{x^3}{12}(3x-4)$, $y''' = x^3-x^2$, $y^{iv} = 3x^2-2x$, $y^{v} = 6x-2$. a) Para $y' = 0$, se tienen las raíces 0 y $\dfrac{5}{3}$. Para $x = 0$, $y'' = y''' = y^{iv} = 0$, $y^{v} = -2$, luego $(0,0)$ es un punto de inflexión, siendo su tangente el eje OX. Para $x = \dfrac{5}{3}$, $y'' > 0$, luego es un mínimo. b) Para $y'' = 0$, se tienen las raíces 0 y $\dfrac{4}{3}$. La raíz 0 se ha estudiado más arriba. Para $x = \dfrac{4}{3}$, $y''' \neq 0$, luego el punto $\left(\dfrac{4}{3},-0.0234\right)$es de inflexión, siendo la pendiente de su tangente: $y'\left(\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{-64}{1215}$. El dibujo de la curva es el siguiente:



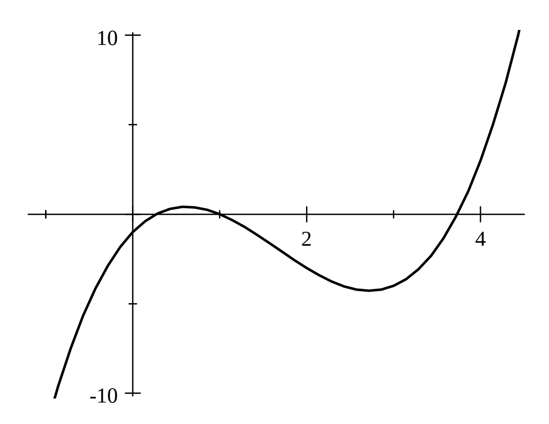
E 36- Calcular las asíntotas de la curva $y = \dfrac{3x^3-2x^2+x+1}{x^2-3x+2}$, y dibujarla.

Solución: Las raíces del denominador, son 1 y 2. Luego las asíntotas paralelas al eje YY', son: $x = 1$, $x = 2$. Para estudiar la posición relativa de la curva respecto a $x = 1$, se sustituye $x = 1+\theta$, con $\theta \to 0$, teniéndose que para $\theta > 0$, $y_c = +\infty$, y para $\theta < 0$, $y_c = -\infty$. Con relación a $x = 2$, sustituyendo $x = 2+\theta$, con $\theta \to 0$, se tiene para $\theta > 0$, $y_c = +\infty$, y para $\theta < 0$, $y_c = -\infty$. La curva no tiene asíntotas paralelas al eje XX'. Para obtener la asíntota general, se realiza la división definida por la ecuación dada, teniéndose: $y = 3x+7+\dfrac{16}{x}+\ldots$, luego la asíntota es: $y = 3x+7$; como $y_c-y_a = \dfrac{16}{x}$, se tiene $y_c > y_a$ para $x = +\infty$, $y_c < y_a$ para $x = -\infty$. La curva corta a esta asíntota en el punto de abscisa $\dfrac{13}{16}$. El dibujo de la curva es el siguiente:



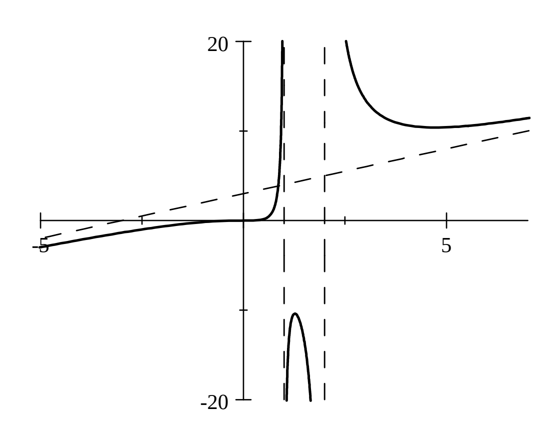
E 37- Representar la función $y = x^3 - 5x^2 + 5x - 1$.

Solución: No tiene asíntotas. Tiene una rama parabólica según el eje OY en el primer cuadrante, y otra según el eje OY' en el tercer cuadrante. Derivando e igualando a cero, se tiene: $y' = 3x^2 - 10x + 5 = 0$, siendo sus raíces $\frac{5 \pm \sqrt{10}}{3}$. Para $x = \frac{5+\sqrt{10}}{3}$, $y'' > 0$, luego es un mínimo. Para $x = \frac{5-\sqrt{10}}{3}$, $y'' < 0$, luego es un máximo. Igualando a cero la segunda derivada, se tiene: $y'' = 6x - 10 = 0$, obteniéndose el punto de inflexión cuya abscisa es $x = \frac{5}{3}$, siendo la pendiente de su tangente $\frac{-10}{3}$. La curva corta al eje XX' en $(1,0)$ y $\left(2 \pm \sqrt{3}, 0\right)$, siendo las pendientes de sus respectivas tangentes, -2 y $6 \pm 2\sqrt{3}$. Corta al eje YY' en $(0,-1)$, siendo 5 la pendiente de su tangente. El dibujo de la curva es el siguiente:



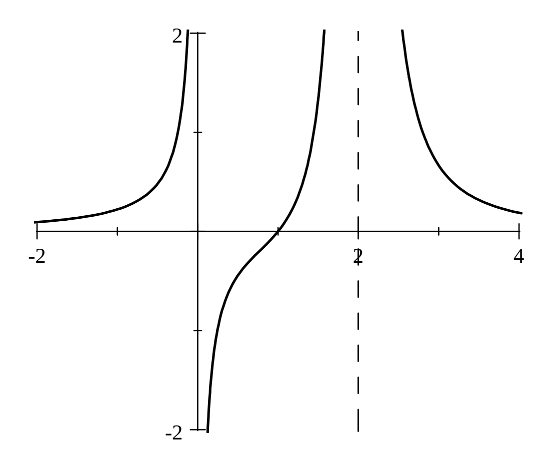
E 38- Calcular la asíntotas de la curva $y = \frac{x^3}{(x-1)(x-2)}$, y dibujarla.

Solución: Las asíntotas paralelas al eje YY' son $x = 1$, $x = 2$. La posición de la curva respecto a $x = 1$, se obtiene sustituyendo $x = 1 + \theta$, con $\theta \to 0$, teniéndose para $\theta > 0$, $y = -\infty$, y para $\theta < 0$, $y = +\infty$. Procediendo análogamente con $x = 2$, se tiene para $\theta > 0$, $y = +\infty$, y para $\theta < 0$, $y = -\infty$. Realizando la división definida en la ecuación dada, se tiene: $y = x + 3 + \frac{7}{x} + \ldots$, luego la asíntota general es $y = x + 3$. Como $y_c - y_a = \frac{7}{x}$, para $x = +\infty$, $y_c > y_a$, y para $x = -\infty$, $y_c < y_a$. La curva corta a esta asíntota en el punto de abscisa $\frac{6}{7}$. El dibujo de la curva es el siguiente:



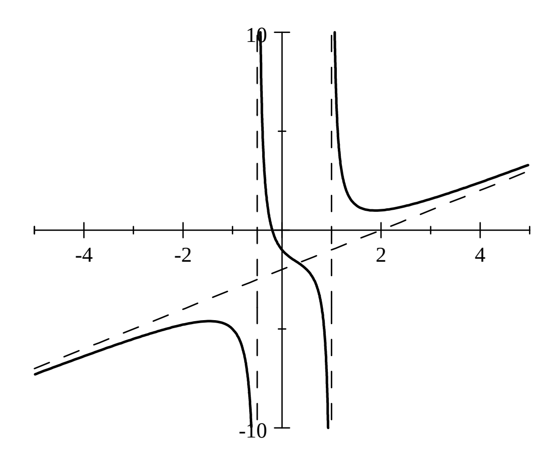
E 39- Estudiar las asíntotas de la curva $y = \frac{x-1}{x(x-2)^2}$, y dibujarla.

Solución: Las asíntotas paralelas al eje YY', son: $x = 0$, $x = 2$. Para estudiar la posición de la curva respecto a $x = 0$, se sustituye $x = \theta$, con $\theta \to 0$, teniéndose para $\theta > 0$, $y = -\infty$, y para $\theta < 0$, $y = +\infty$. Procediendo análogamente con $x = 2$, se sustituye $x = 2 + \theta$, con $\theta \to 0$, teniéndose para $\theta > 0$, $y = +\infty$, y para $\theta < 0$, $y = -\infty$. Efectuando la división definida en la ecuación dada, se tiene $y = \frac{1}{x^2} + \ldots$, luego la asíntota es $y = 0$. Para estudiar la posición de la curva respecto a ella, se tiene: $y_c - y_a = \frac{1}{x^2}$, luego para $x = \pm\infty$, $y_c > y_a$. La curva corta a esta asíntota en el punto $(1,0)$. El dibujo de la curva es el siguiente:



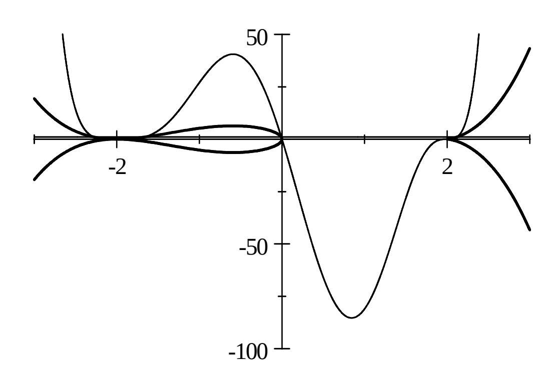
E 40- Estudiar las asíntotas de la curva $y = \dfrac{2x^3 - 5x^2 + 4x + 1}{2x^2 - x - 1}$, y dibujarla.

Solución: Las raíces del denominador son $-\dfrac{1}{2}$ y 1, luego las asíntotas paralelas al eje YY' son: $x = \dfrac{-1}{2}$, $x = 1$. Para estudiar la posición de la curva respecto a $x = \dfrac{-1}{2}$, se sustituye $x = \dfrac{-1}{2} + \theta$, con $\theta \to 0$, con lo que para $\theta > 0$, $y = +\infty$, y para $\theta < 0$, $y = -\infty$. Con relación a $x = 1$, se sustituye $x = 1 + \theta$, con $\theta \to 0$, con lo que para $\theta > 0$, $y = +\infty$, y para $\theta < 0$, $y = -\infty$. Realizando la división definida en la ecuación dada, se tiene $y = x - 2 + \dfrac{3}{2x} + \ldots$, luego la curva tiene la asíntota general $y = x - 2$. Como $y_c - y_a = \dfrac{3}{2x}$, se tiene para $x = +\infty$, $y_c > y_a$, y para $x = -\infty$, $y_c < y_a$. La curva corta a esta asíntota en $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{-5}{3}\right)$. La curva tiene un máximo en $(-1.47, -4.6)$, y un mínimo en $(1.88, 0.99)$. El dibujo de la curva es el siguiente:

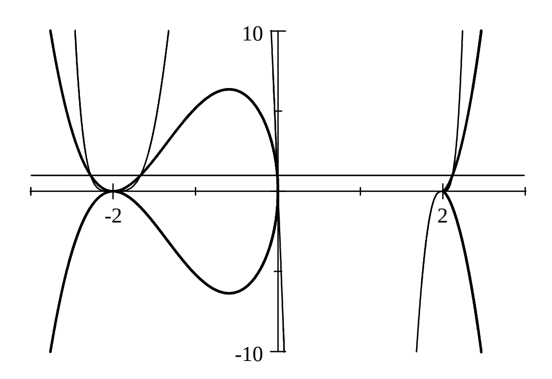


E 41- Dibujar la curva $y = \pm\sqrt{x(x-2)^3(x+2)^4}$.

Solución: Se estudia primero la curva radicando $y_1 = x(x-2)^3(x+2)^4$. Corta al eje XX' en $(0,0)$, $(2,0)$, $(-2,0)$. Tiene un máximo en $(-0.59, 40.52)$, y dos mínimos, uno en $(-2,0)$ y el segundo en $(0.84, -85.3)$. Tiene una rama parabólica en el primer cuadrante según el eje OY, y otra en el segundo cuadrante, según el mismo eje. La curva y_1 es negativa para $0 < x < 2$. Estudiando la curva dada, se tiene que es imaginaria para $0 < x < 2$. Es simétrica respecto a XX'. Tiene un máximo en $(-0.59, 6.36)$, y un mínimo en $(-0.59, -6.36)$. Las pendientes de las tangentes en $(-2,0)$, $(0,0)$ y $(2,0)$, son respectivamente, 0, ∞ y 0. No tiene asíntotas. Tiene cuatro ramas parabólicas, una en cada cuadrante, según el eje OY en el primero y segundo cuadrantes, y según el eje OY' en el tercero y cuarto. La curva dada pasa por los puntos en que la curva radicando es cortada por la recta $y = 1$, así como por sus simétricos respecto a XX'. En el siguiente dibujo se presenta en línea gruesa la curva del enunciado, y en línea fina la curva del radicando, así como la recta $y = 1$.

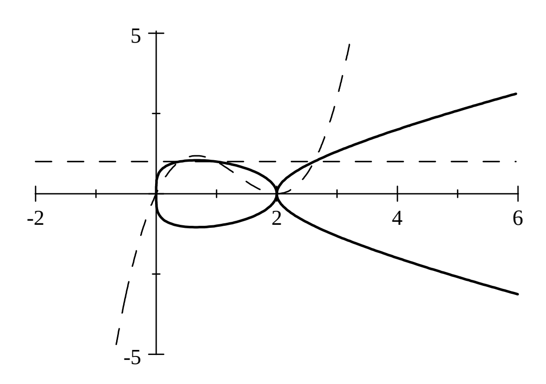


Seguidamente se presenta un detalle de las curvas para $-10 < y < 10$.



E 42- Dibujar la curva $y = \pm\sqrt[4]{x(x-2)^2}$.

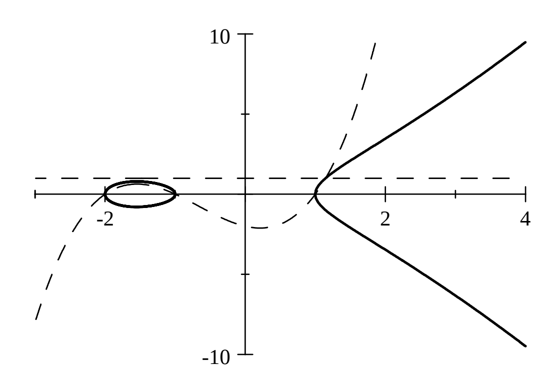
Solución: Se estudia primero la curva radicando $y_1 = x(x-2)^2$. Corta al eje XX' en $(0,0)$ y $(2,0)$, donde tiene un mínimo. No tiene asíntotas. Tiene una rama parabólica en el primer cuadrante, según el eje OY, y otra en el tercer cuadrante, según el eje OY'. Estudiando la curva dada, se tiene que es imaginaria para $x < 0$, siendo simétrica respecto a OX. Las pendientes de las tangentes en $(0,0)$ y en $(2,0)$, son en ambos casos, ∞. Tiene una rama parabólica en el primer cuadrante, según el eje OY, y otra en el cuarto cuadrante, simétrica de la anterior respecto al eje OX. Tiene un máximo en $(0.67, 1.09)$ y un mínimo en $(0.67, -1.09)$. Pasa por los puntos en que la curva radicando es cortada por la recta $y = 1$, así como por sus simétricos respecto a OX. En el dibujo se incluye en línea continua la curva pedida, y en trazos la curva del radicando, y la recta $y = 1$.



E 43- Dibujar la curva $y = \pm\sqrt{x^3 + 2x^2 - x - 2}$.

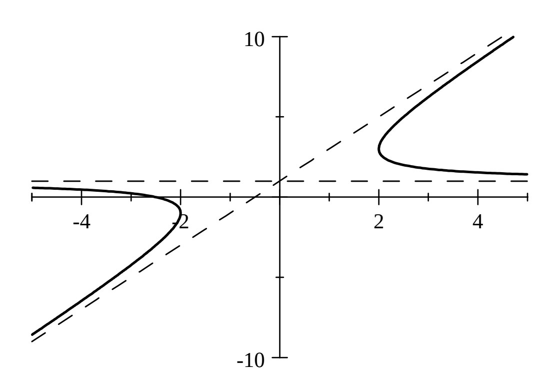
Solución: Se estudia primero la curva radicando $y_1 = x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1)(x+1)(x+2)$, que no tiene asíntotas. Tiene dos ramas parabólicas, una en el primer cuadrante, según el eje OY, y otra en el tercer cuadrante, según el eje OY'. Tiene un máximo en $(-1.55, 0.63)$ y un mínimo en $(0.22, -1.9)$. Estudiando la curva dada, se tiene que es imaginaria para $x < -2$, y para $-1 < x < 1$. Es simétrica respecto a XX'. Las pendientes de las tangentes en $(-2,0)$, (-1.0) y $(1,0)$ son ∞. Tiene un máximo en $(-1.55, 0.79)$ y un mínimo en su simétrico respecto a XX'. Tiene dos ramas parabólicas, una en el primer

cuadrante, según el eje OY, y otra en el cuarto cuadrante, según el eje OY'. En el dibujo se incluye en línea continua la curva dada, y en línea de trazos el radicando y la recta $y = 1$.



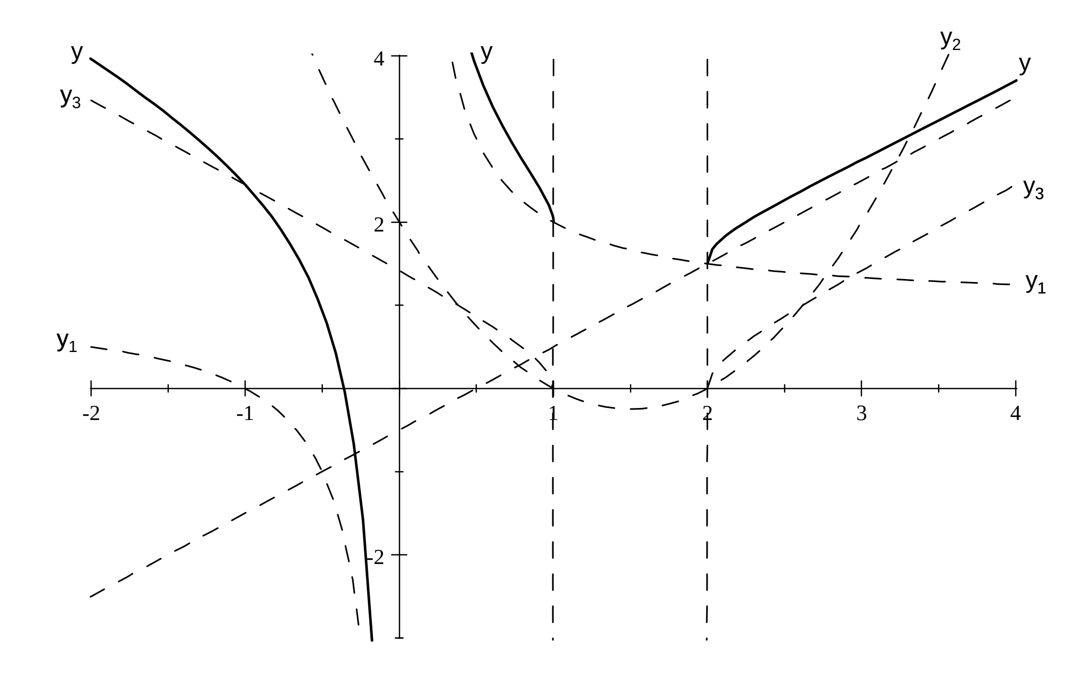
E 44- Dibujar la curva $y = x + 1 \pm \sqrt{x^2 - 4}$.

Solución: La curva dada es imaginaria para $-2 < x < 2$. Efectuando las operaciones indicadas, se tiene $y = x + 1 \pm x\left(1 - \frac{4}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = x + 1 \pm x\left(1 - \frac{2}{x^2} + \ldots\right)$. Por tanto, la curva tiene dos asíntotas: $y = 2x + 1$, $y = 1$. Para estudiar la posición relativa de la curva respecto a la primera, se tiene $y_c - y_a = \frac{-2}{x}$, luego para $x > 0$, $y_c < y_a$, y para $x < 0$, $y_c > y_a$. En relación con $y = 1$, se tiene $y_c - y_a = \frac{2}{x}$, es decir: para $x > 0$, $y_c > y_a$, y para $x < 0$, $y_c < y_a$. La curva no corta a las asíntotas. Las ordenadas para $x = \pm 2$, son 3 y -1. El dibujo de la curva es el siguiente (se trata de una hipérbola):



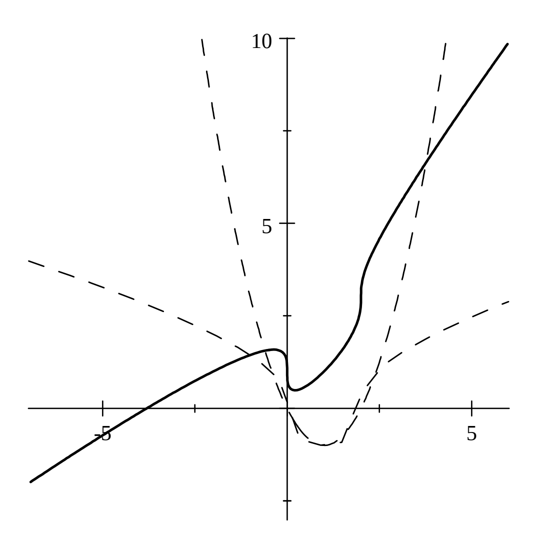
E 45- Dibujar la curva $y = \frac{x+1}{x} + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$.

Solución: **a**) Se estudia la curva $y_1 = \frac{x+1}{x}$. Tiene dos asíntotas: $x = 0$, $y = 1$. Para estudiar la posición de la curva y_1 respecto a $x = 0$, se sustituye $x = +\theta$, con $\theta \to 0$, teniéndose $y_1 = +\infty$, y para $x = -\theta$, con $\theta = 0$, se tiene $y_1 = -\infty$. En relación a la asíntota $y = 1$, se sustituye $y_1 = 1 + \theta$, con $\theta \to 0$, teniéndose $x = +\infty$, y para $y_1 = 1 - \theta$, con $\theta \to 0$, $x = -\infty$. Esta curva corta a XX' en $(-1, 0)$. En el dibujo se incluye en línea de trazos la curva y_1. **b**) Se estudia la curva $y_2 = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. Corta a los ejes en $(1, 0)$, $(2, 0)$ y $(0, 2)$. Tiene una rama parabólica en el primer cuadrante, según el eje OY, y otra en el segundo según el eje OY. La curva es simétrica respecto a $x = \frac{3}{2}$. En el dibujo se incluye en línea de trazos la curva y_2. **c**) Se estudia la curva $y_3 = +\sqrt{y_2}$. Esta curva es imaginaria para $1 < x < 2$. Operando, se tiene: $y_3 = x - \frac{3}{2} - \frac{1}{8x} + \ldots$, luego tiene la asíntota $y = x - \frac{3}{2}$. Como $y_c - y_a = \frac{-1}{8x}$, para $x = +\infty$, $y_c < y_a$, y como y_3 no admite valores negativos, la citada recta no es asíntota para $x = -\infty$. La curva es simétrica respecto a $x = \frac{3}{2}$. Corta a los ejes en $\left(0, \sqrt{2}\right)$, $(1, 0)$ y $(2, 0)$. En el dibujo se incluye en línea de trazos, la curva y_3. **d**) Se estudia la curva $y = y_1 + y_3$. Esta curva es imaginaria para $1 < x < 2$. Operando, se obtiene la asíntota $y = x - \frac{1}{2}$, siendo $y_c - y_a = \frac{7}{8x}$. Luego para $x = +\infty$, $y_c > y_a$, y para $x = -\infty$, $y_c < y_a$. La curva corta a esta asíntota en $\left(2, \frac{3}{2}\right)$, y al eje XX' en $(-0.36, 0)$. Corta a $x = 1$, en $(1, 2)$, cuya tangente es paralela a OY, y corta a $x = 2$, en $\left(2, \frac{3}{2}\right)$, cuya tangente también es paralela a OY. En el dibujo se representa en línea continua esta curva.



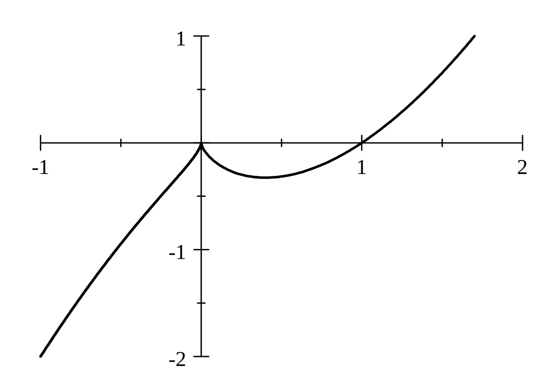
E 46- Dibujar la curva $y = x + 1 + \sqrt[3]{x(x-2)}$.

Solución: Operando, $y = x + 1 + (x^2 - 2x)^{\frac{1}{3}} = x + 1 + x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} + \ldots$ Como $\lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = 1$, y $\lim_{x\to\infty} (y - x) = \lim_{x\to\infty} \left(1 + x^{\frac{2}{3}}\right) = \infty$, la curva no tiene asíntotas, teniendo dos ramas parabólicas, una en el primer cuadrante, según el eje OY, y otra en el tercer cuadrante, según el eje OY'. La curva corta a los ejes en $(-3.8, 0)$ y $(0, 1)$. En este último punto, la pendiente de la tangente es ∞, siendo punto de inflexión. Otro punto de inflexión es $(2, 3)$, siendo ∞ la pendiente de su tangente. La curva se puede dibujar también, obteniendo primero, $y_1 = x(x-2)$, seguidamente $y_2 = \sqrt[3]{y_1}$, y por fin, $y = x + 1 + y_2$. En el siguiente dibujo se incluye en línea continua la curva pedida, y en trazos, la curva radicando y la curva raíz cúbica de este.



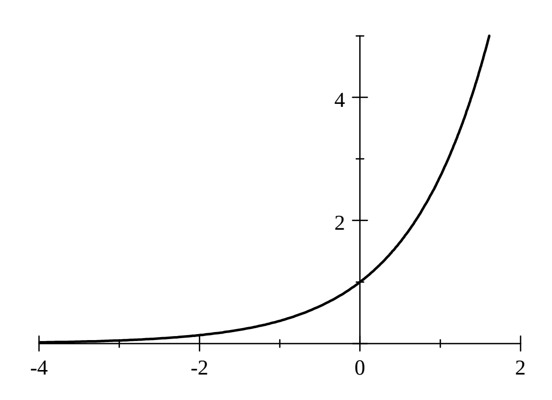
E 47- Dibujar la curva $y = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$.

Solución: No tiene simetrías. No tiene asíntotas paralelas a los ejes. Tiene una rama parabólica en el primer cuadrante, según el eje OY, y otra en el tercer cuadrante, según el eje OY'. Corta a los ejes en $(0, 0)$ y $(1, 0)$, siendo las pendientes de sus respectivas tangentes, $-\infty$ y 1. El punto $(0, 0)$ es de retroceso. La curva tiene un mínimo en $(0.4, -0.3)$. El dibujo de esta curva es el siguiente:



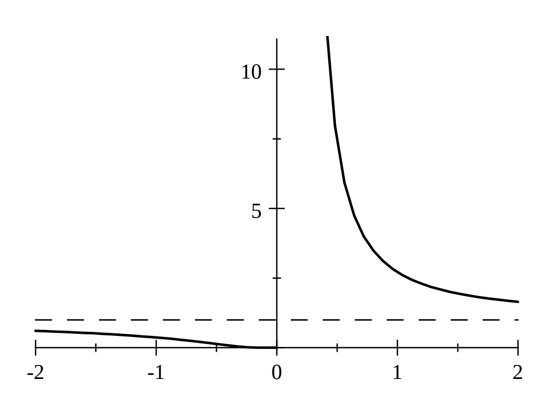
E 48- Dibujar la curva $y = e^x$.

Solución: No hay valores negativos de y. Para $x = +\infty$, $y = +\infty$. Para $x = -\infty$, $y = 0$. La curva corta al eje OY en $(0, 1)$, siendo e la pendiente de su tangente. El dibujo de esta curva es el siguiente:



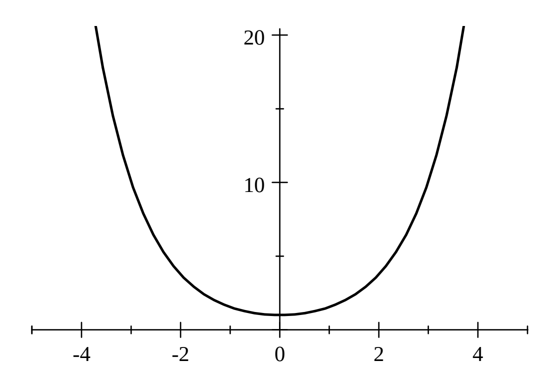
E 49- Dibujar la curva $y = e^{\frac{1}{x}}$.

Solución: No hay valores negativos de y. Para $x = 0$, $y = \infty$, luego la curva tiene la asíntota $x = 0$. Para $x = 0 + \theta$, con $\theta \to 0$, $y = +\infty$. Para $x = 0 - \theta$, con $\theta \to 0$, $y = 0$, siendo por tanto, el punto $(0, 0)$ de discontinuidad, siendo su tangente el eje OX'. Desarrollando la ecuación dada, se tiene: $y = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \ldots$, luego la curva tiene la asíntota $y = 1$. La posición relativa de la curva respecto a $y = 1$, viene dada por $y_c - y_a = \frac{1}{x}$, luego para $x = +\infty$, $y_c > y_a$, y para $x = -\infty$, $y_c < y_a$. El dibujo de esta curva es el siguiente:



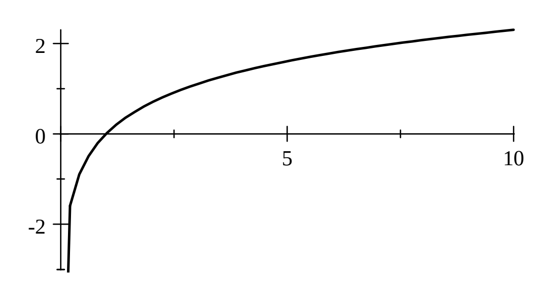
E 50- Dibujar la curva $y = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Solución: La curva es simétrica respecto al eje OY. No tiene valores negativos de y. Para $x = \pm\infty$, $y = +\infty$. Tiene un mínimo en $(0, 1)$. El dibujo de esta curva es el siguiente:



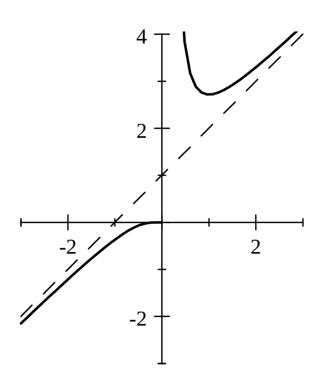
E 51- Dibujar la curva $y = \ln x$.

Solución: Solo hay curva para $x > 0$. Para $x = 0$, $y = -\infty$. Para $x = +\infty$, $y = +\infty$. Corta al eje OX en $(1,0)$, siendo 1 la pendiente de su tangente. El dibujo de esta curva es el siguiente:



E 52- Dibujar la curva $y = xe^{\frac{1}{x}}$.

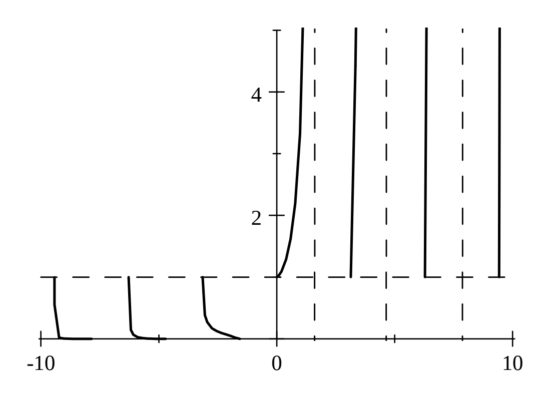
Solución: La curva tiene una discontinuidad en el punto de abscisa $x = 0$, en el que $\lim_{\varepsilon\to 0} y(0+\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon}} = \infty$, y $\lim_{\varepsilon\to 0} y(0-\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} -\varepsilon e^{\frac{1}{-\varepsilon}} = 0$. La pendiente de la tangente en $(0,0)$ es $\lim_{x\to 0}\left(e^{\frac{1}{x}} - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}\right) = 0$. Para hallar la asíntota general $y = ax+b$, se tiene: $a = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$, $b = \lim_{x\to\infty}(y-x) = \lim_{x\to\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left[x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\ldots\right)-x\right] = 1$. Luego la asíntota es $y = x+1$. Para estudiar la posición de la curva respecto a la asíntota, se tiene que: $y_c - y_a = x+1+\frac{1}{2x}+$ $+\ldots-x-1 = \frac{1}{2x}$, por lo que para $x = +\infty$, $y_c > y_a$, y para $x = -\infty$, $y_c < y_a$. Derivando la ecuación de la curva, e igualando a cero, se tiene: $y' = e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right) = 0$, obteniéndose el mínimo $(1,e)$. El dibujo de esta curva es el siguiente:



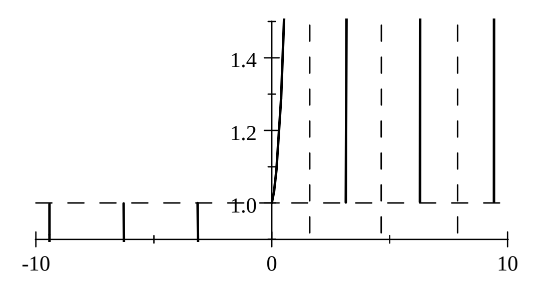
Nota: Ver el problema E 55.

E 53- Dibujar la curva $y = e^{x\sqrt{\tan x}}$.

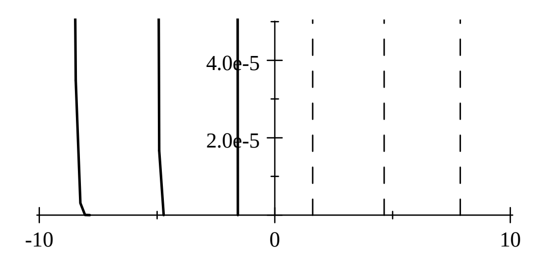
Solución: La curva existe para $\tan x \geq 0$. Por tanto, los límites de variación de x son: $k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Es decir, los intervalos de x para los que existe la curva, son: ..., $-3\pi/\frac{-5\pi}{2}$, $-2\pi/\frac{-3\pi}{2}$, $-\pi/\frac{-\pi}{2}$, $0/\frac{\pi}{2}$, $\pi/\frac{3\pi}{2}$, $2\pi/\frac{5\pi}{2}$,... En los intervalos en los que $x \geq 0$, se tiene que para el límite inferior del intervalo, $y = e^{k\pi\sqrt{\tan k\pi}} = e^0 = 1$, y para el límite superior del intervalo, $y = e^{\frac{(2k+1)\pi}{2}\sqrt{\tan\frac{(2k+1)\pi}{2}}} = e^{\infty} = \infty$, por lo que $1 \leq y \leq \infty$. Por tanto, las rectas $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, son asíntotas de la curva en los puntos $\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}, +\infty\right)$, siendo $x_a > x_c$. Tomando logaritmos y derivando, se tiene que: $\ln y = x\sqrt{\tan x}$, $\frac{y'}{y} = \sqrt{\tan x} + \frac{1}{2\cos^2 x\sqrt{\tan x}}$. Luego: $y' = e^{x\sqrt{\tan x}}\left(\sqrt{\tan x} + \frac{1}{2\cos^2 x\sqrt{\tan x}}\right)$. Para $x = k\pi$, $y' = \infty$, luego la tangente en los puntos $(k\pi, 0)$, es la paralela al eje OY. En los intervalos en los que $x < 0$, se tiene que para el límite inferior del intervalo, $y = e^{-k\pi\sqrt{\tan(-k\pi)}} = e^0 = 1$, y para el límite superior del intervalo, $y = e^{\frac{-(2k+1)\pi}{2}\sqrt{\tan\frac{-(2k+1)\pi}{2}}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0$, por lo que $1 \geq y \geq 0$. En los puntos $(-k\pi, 1)$, $y' = \infty$, luego la tangente en estos puntos es la paralela al eje OY. En los puntos $\left(\frac{-(2k+1)\pi}{2}, 0\right)$, $y' = \infty$, luego la tangente en estos puntos es también la paralela al eje OY. El dibujo de la curva es el siguiente, en el que las asíntotas como también la recta $y = 1$, se han dibujado en trazos discontinuos.



El siguiente dibujo se refiere al entorno $0.9 < y < 1.5$, donde se aprecia la tangente vertical en el punto $(0, 1)$.

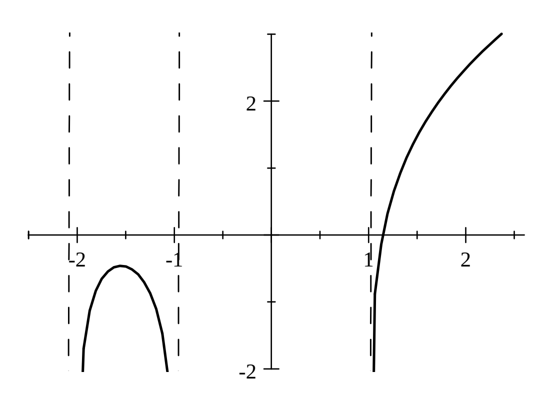


El siguiente dibujo se refiere al entorno $0 \leq y \leq 4.10^{-5}$, donde se aprecian las tangentes verticales en los puntos $\left(\frac{-(2k+1)\pi}{2}, 0\right)$



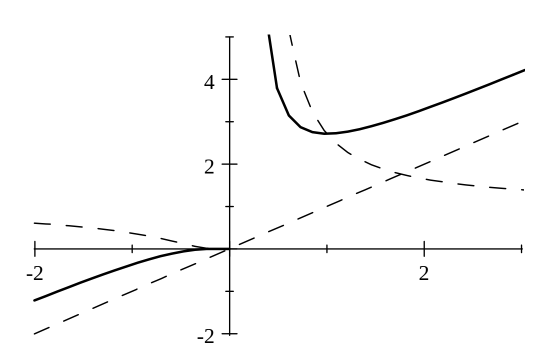
E 54- Dibujar la curva $y = \ln(x^3 + 2x^2 - x - 2)$.

Solución: La curva $y_1 = x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x+2)(x+1)(x-1)$, es una parábola cúbica que corta al eje de abscisas en los puntos $(-2,0)$, $(-1,0)$, $(1,0)$. Por tanto, se tiene: a) para $x < -2$, $y_1 < 0$, por lo que y no es real; b) para $x = -2$, $y_1 = 0$, por lo que $y = -\infty$; c) para $-2 < x < -1$, $0 < y_1 < 1$, por lo que $y < 0$; d) para $x = -1$, $y_1 = 0$, por lo que $y = -\infty$; e) para $-1 < x < 1$, $y_1 < 0$, por lo que y no es real; f) para $x = 1$, $y_1 = 0$, por lo que $y = -\infty$; g) para $x > 1$, $y_1 > 0$, por lo que y es real, siendo su recorrido de $-\infty$ a $+\infty$, cortando al eje de abscisas en el punto en que $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 1$, es decir para $x \simeq 1.15$. El punto $(-1.55, 0.63)$ es un máximo de y_1, por lo que $(-1.55, -0.46)$ es un máximo de y. El dibujo de la curva es el siguiente:



E 55- Dibujar la curva $y = xe^{\frac{1}{x}}$, como producto de las curvas $y_1 = x$, $y_2 = e^{\frac{1}{x}}$.

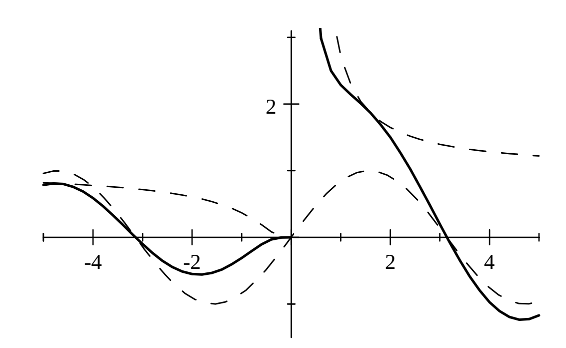
Solución: En el dibujo se han incluido, en trazos, las curvas y_1 e y_2, cuyo producto es la curva y (en línea continua).



Nota: Ver el problema E 52.

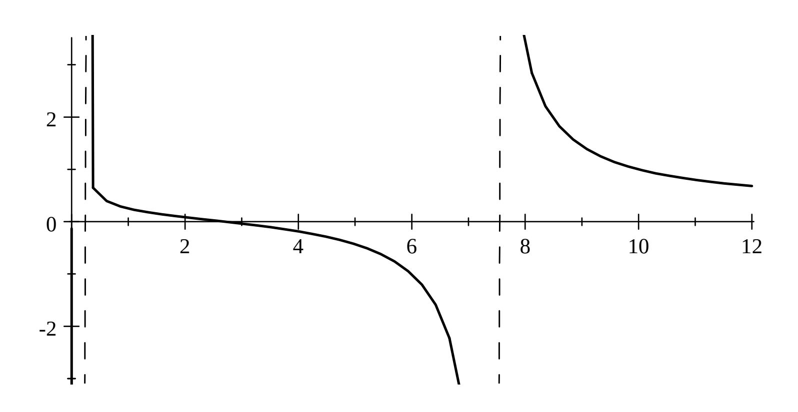
E 56- Dibujar la curva $y = \sin x \cdot e^{\frac{1}{x}}$, como producto de las curvas $y_1 = \sin x$, $y_2 = e^{\frac{1}{x}}$.

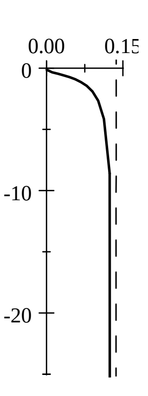
Solución: En el dibujo se han incluido en trazos, las curvas y_1 e y_2, cuyo producto es la curva y (en línea continua).



E 57- Dibujar la curva $y = \dfrac{(\ln x) - 1}{(\ln x)^2 - 4}$.

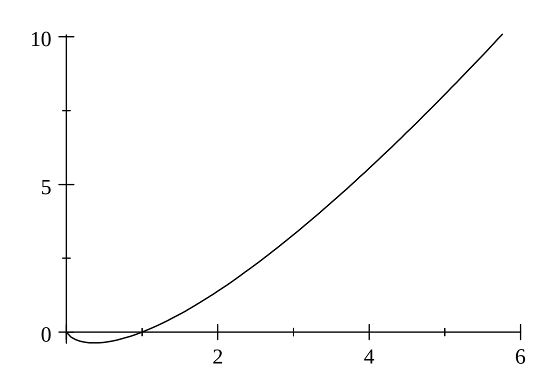
Solución: 1º) La curva tiene por asíntotas los valores de x que anulan el denominador, es decir $\ln x = \pm 2$, luego $x = e^2 = 7.389$, y $x = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2} = 0.135$. Tiene también la asíntota $y = 0$, para $x \to +\infty$. 2º) La curva corta al eje de abscisas en $(0,0)$ y en $\ln x = 1$, es decir $(e,0)$. Como x no puede tomar valores negativos, el punto $(0,0)$ es de discontinuidad, siendo su tangente el eje de abscisas. La pendiente de la tangente en el punto $(e,0)$, es $\dfrac{-1}{3e}$. 3º) En el dibujo siguiente se presenta la curva dada, con un detalle a continuación para $0 < x < 0.14$.





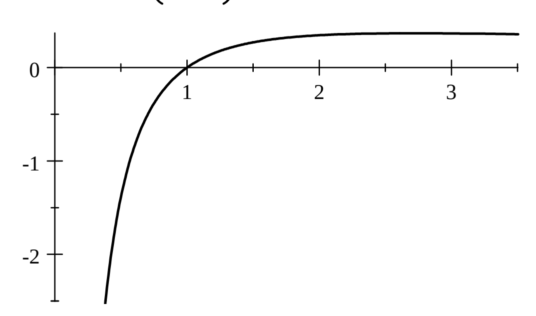
E 58- Dibujar la curva $y = x \ln x$.

Solución: 1º) La curva es real para $x \geq 0$. 2º) Para $x = 0$, $y = 0$, $y'(0) = \ln x + 1 = -\infty$. 3º) Tiene una rama parabólica según el eje OY. 4º) Corta al eje OX, además del origen, ya estudiado, en el punto $(1,0)$, siendo la pendiente de su tangente 1. 5º) Tiene un mínimo en $\left(\dfrac{1}{e}, \dfrac{-1}{e}\right)$. 6º) Su dibujo es el siguiente.



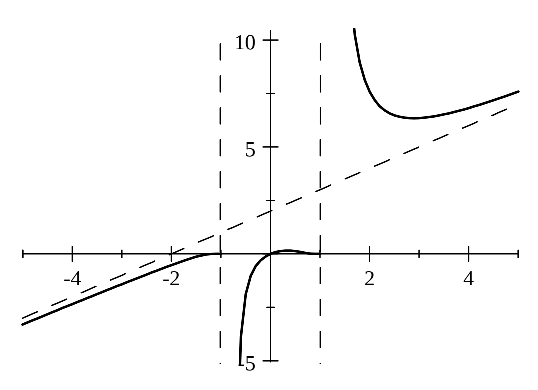
E 59- Dibujar la curva $y = \frac{\ln x}{x}$.

Solución: La curva es real para $x \geq 0$. Tiene las asíntotas: $x = 0$, para la que $y = -\infty$; $y = 0$, para la que $x = +\infty$. Corta al eje OX en $(1,0)$, siendo la pendiente de su tangente $y'(1) = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 1$. Tiene un máximo para $\ln x = 1$, es decir en el punto $\left(e, \frac{1}{e}\right)$. El dibujo de la curva es el siguiente:



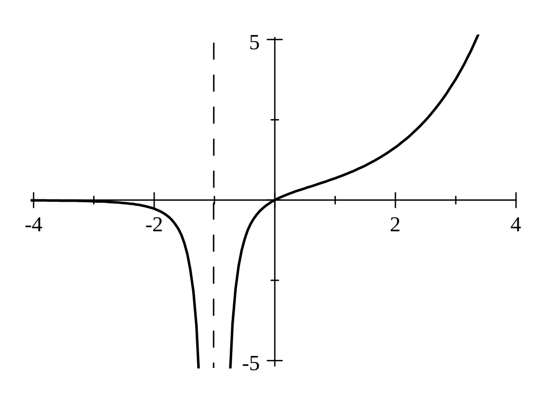
E 60- Dibujar la curva $y = xe^{\frac{2x}{x^2-1}}$.

Solución: 1º) La curva es siempre real. 2º) Las asíntotas paralelas al eje OY, son: $x = 1$, $x = -1$. Para $x = 1$, la posición de la curva viene dada por: $y = \lim_{x\to 1+\theta,\, \theta\to 0} e^{\frac{1}{\theta}} = +\infty$, $y = \lim_{x\to 1-\theta,\, \theta\to 0} e^{\frac{-1}{\theta}} = 0$. Luego, $(1,0)$ es un punto de discontinuidad, en el que la pendiente de su tangente viene dada por el siguiente límite: $y' = \lim_{x\to 1-\theta,\, \theta\to 0} xe^{\frac{2x}{x^2-1}}\left[\frac{1}{x} - \frac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}\right] = 0$. Para $x = -1$, la posición de la curva viene dada por $y = \lim_{x\to -1+\theta,\, \theta\to 0} e^{\frac{1}{\theta}} = -\infty$, $y = \lim_{x\to -1-\theta,\, \theta\to 0} -e^{\frac{-1}{\theta}} = 0$. Luego $(-1,0)$ es un punto de discontinuidad, siendo la pendiente de su tangente $y'(-1,0) = 0$. 3º) Para estudiar la asíntota general $y = ax + b$, se tiene lo siguiente: la pendiente viene dada por: $a = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{2x}{x^2-1}} = 1$; la ordenada en el origen, por: $b = \lim_{x\to\infty}\left(xe^{\frac{2x}{x^2-1}} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{2x}{x^2-1}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{2x}{x^2-1}}\left(\frac{-2x^2-2}{(x^2-1)^2}\right)}{\frac{-1}{x^2}} = 2$. Por tanto la asíntota general es: $y = x + 2$. Para estudiar la posición de la curva respecto a esta asíntota, se tiene: $y_c - y_a = \lim_{x\to\infty} xe^{\frac{2x}{x^2-1}} - x - 2 = \lim_{x\to\infty} x\left[1 + \frac{x^2-1}{2x} + \frac{(x^2-1)^2}{8x^2} + \ldots\right] - x - 2 = \frac{2}{x}$, luego para $x = +\infty$, $y_c > y_a$, para $x \to -\infty$, $y_c < y_a$. La curva no corta a esta asíntota. 4º) La pendiente de la tangente en el origen es: $y' = 1$, luego es la primera bisectriz. 5º) Para hallar máximos y mínimos, se tiene al anular y', la raíz $x = -1$, ya estudiada, y las raíces de $x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$, que son: $x = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5} \pm \sqrt{2\left(1+\sqrt{5}\right)}\right)$, es decir: $x_1 = 2.89$, $x_2 = 0.35$. Luego hay un mínimo para $(2.89, 6.36)$ y un máximo para $(0.35, 0.15)$. 6º) El dibujo de la curva es el siguiente:



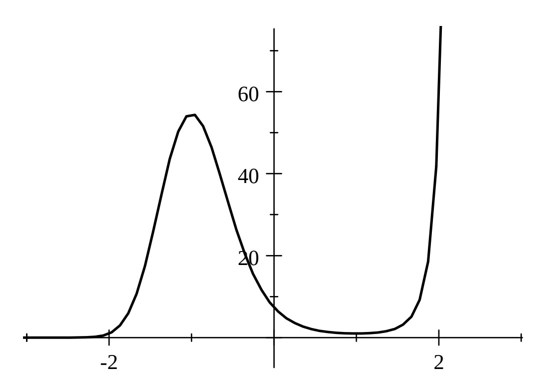
E 61- Dibujar la curva $y = \dfrac{xe^x}{(1+x)^2}$.

Solución: 1º) La curva tiene las asíntotas $x = -1$, $y = 0$. Para hallar la posición de la curva respecto a la asíntota $x = -1$, se hace $x = -1+\theta$, con $\theta \to 0$, teniéndose $y = \dfrac{-1}{e\theta^2}$, luego para $\theta \to \pm 0$, $y = -\infty$. Para hallar la posición respecto a la asíntota $y = 0$, $x = -\infty$, siendo $y_c < y_a$. La curva tiene una rama parabólica según el eje OY, para $x \to +\infty$. 2º) La curva pasa por el origen, siendo su tangente la primera bisectriz. 3º) El dibujo de la curva es el siguiente:



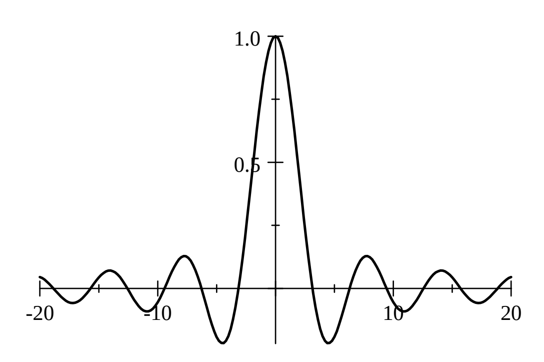
E 62- Dibujar la curva $y = e^{x^3-3x+2}$.

Solución: 1º) $y > 0$. 2º) La curva tiene la asíntota $y = 0$, para $x \to -\infty$, siendo $y_c - y_a > 0$. Tiene una rama parabólica para $x = +\infty$, según el eje OY. 3º) Corta al eje OY en $(0,e^2)$, siendo la pendiente de su tangente $-3e^2$. 4º) Para $y' = 0$, $x = \pm 1$. La curva tiene el mínimo $(1,1)$ y el máximo $(-1,e^4)$. 5º) El dibujo de la curva es el siguiente:



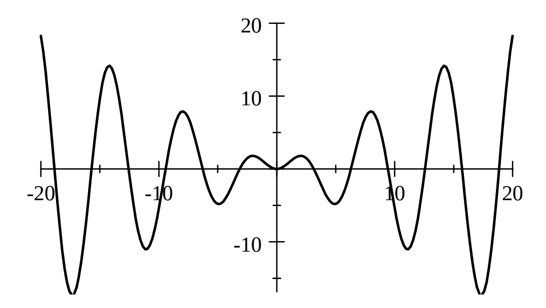
E 63- Dibujar la curva $y = \dfrac{\sin x}{x}$.

Solución: 1º) No tiene asíntotas, pues para $x = 0$, $y = \lim\limits_{x=0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x=0} \cos x = 1$. Para $x = \pm\infty$, $y \to \pm 0$, la curva oscila entre $y = 0 \pm \theta$, con $\theta \to 0$. 2º) Corta al eje XX' en los puntos de abscisa $x = k\pi$. La tangente en $(0,1)$ es horizontal. 3º) Siendo $y' = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$, las abscisas de los máximos y mínimos están dadas por las raíces de la ecuación: $x = \tan x$. Los máximos son: $(0,1)$, $(7.725, 0.128)$,... Los mínimos son: $(4.493, -0.217)$,... 4º) El dibujo de la curva es el siguiente:



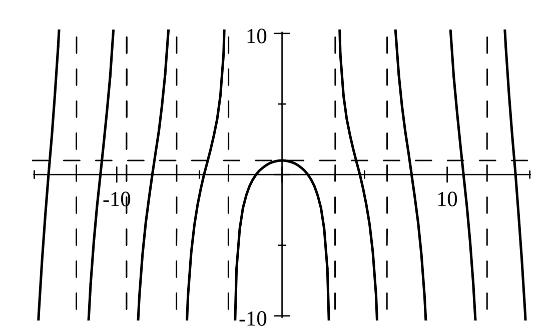
E 64- Dibujar la curva $y = x\sin x$.

Solución: 1º) la curva es simétrica respecto al eje YY'. 2º) No tiene asíntotas ni ramas parabólicas. 3º) Corta a los ejes en $(k\pi, 0)$, siendo la pendiente de sus tangentes $k\pi$. 3º) Siendo $y' = \sin + x\cos x$, las abscisas de sus máximos y mínimos están dadas por las raíces de la ecuación: $x = -\tan x$. Los máximos son: $(2.029, 0)$,... y los mínimos: $(0,0)$, $(4.913, -4.913)$,... 4º) El dibujo de la curva es el siguiente:



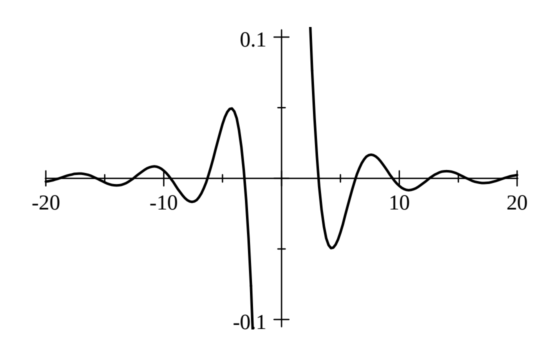
E 65- Dibujar la curva $y = \dfrac{x}{\tan x}$.

Solución: 1º) La curva es simétrica respecto al eje YY'. 2º) Las asíntotas son: $x = k\pi$. 3º) Corta al eje XX' en los puntos de abscisa $x = \dfrac{(2k+1)\pi}{2}$, siendo las pendientes de sus tangentes: $-\dfrac{\pi}{2} - k\pi$. Corta al eje YY' en $(0,1)$, siendo su tangente $y = 1$. 4º) Las abscisas de máximos y mínimos están dadas por la ecuación: $x = \dfrac{\sin 2x}{2}$, siendo $(0,1)$ el máximo. 5º) Los puntos de inflexión están dados por $y'' = \dfrac{2(x\cos x - \sin x)}{\sin^3 x} = 0$, es decir: $x = \tan x$. Por tanto, los puntos de inflexión están alineados sobre la recta $y = 1$. 6º) El dibujo de la curva es el siguiente:



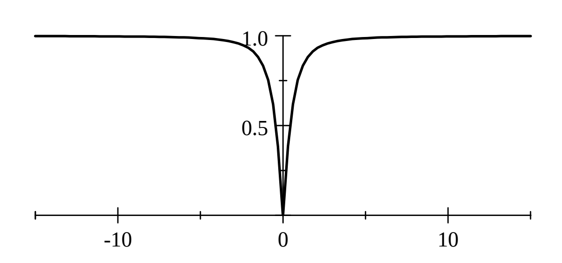
E 66- Dibujar la curva $y = \dfrac{\sin x}{x^2}$.

Solución: 1º) La curva es simétrica respecto al origen. 2º) Tiene la asíntota: $x = 0$; la posición de la curva está dada por $y = \dfrac{\sin(0+\theta)}{(0+\theta)^2}$, con $\theta \to \pm 0$, es decir $y = \dfrac{1}{0+\theta}$. Luego, para $\theta \to +0$, $y = +\infty$; para $\theta \to -\infty$, $y = -\infty$. 2º) Para $x = \pm\infty$, $y \to \pm 0$. La curva oscila entre $y = 0 \pm \theta$, con $\theta \to 0$. 3º) Las intersecciones con el eje XX', están dadas por $\sin x = 0$, es decir: $x = k\pi$, siendo las pendientes de sus tangentes: $\dfrac{\pm 1}{k^2\pi^2}$. 4º) Las abscisas de máximos y mínimos están dadas por las raíces de la ecuación: $x = 2\tan x$. 5º) El dibujo de la curva es el siguiente:

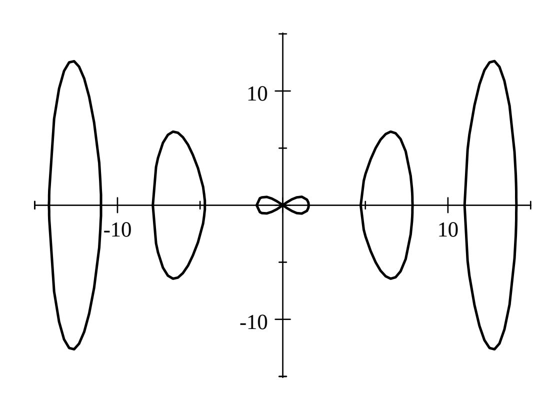


E 67- Dibujar la curva $y = x\arctan\frac{1}{x} \pm x\sqrt{\cos x}$.

Solución: 1º) La curva existe para $\cos x > 0$, es decir, para: $\frac{4k-1}{2}\pi < x < \frac{4k+1}{2}\pi$. Es simétrica respecto al eje YY'. 2º) No tiene asíntotas ni ramas parabólicas. 3º) Las abscisas de las intersecciones con el eje XX', están dadas por las raíces de: $\arctan\frac{1}{x} = \pm\sqrt{\cos x}$. En el origen, las tangentes son: $y = \left(\frac{\pi}{2} \pm 1\right)x$. 4º) La curva se puede poner en la forma: $y = y_1 \pm y_2$, siendo $y_1 = x\arctan\frac{1}{x}$, $y_2 = x\sqrt{\cos x}$. En los dos dibujos siguientes se presentan las curvas y_1, y_2.

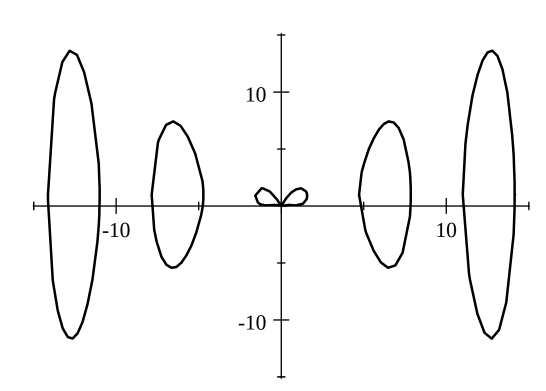


$y_1 = x\arctan\frac{1}{x}$



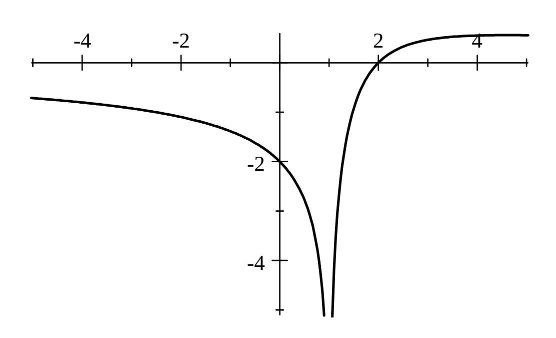
$y_2 = \pm x\sqrt{\cos x}$

Sumando ambas curvas, se tiene el dibujo correspondiente a $y = x\arctan\frac{1}{x} \pm x\sqrt{\cos x}$.



E 68- Dibujar la curva $y = \dfrac{\ln(1-x)^2}{x}$.

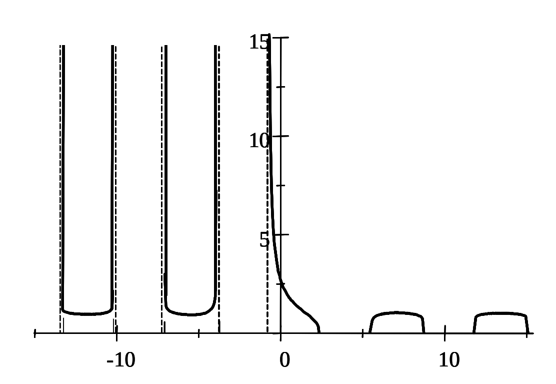
Solución: 1º) Asíntota $x = 1$. Para $x = 1+\theta$, con $\theta \to 0$, $y = -\infty$. Para $x = 1-\theta$, con $\theta \to 0$, $y = -\infty$. La curva no corta a esta asíntota. 2º) Asíntota $y = 0$. Se tiene que $y_c - y_a = \dfrac{\ln(1-x)^2}{x}$. Para $x = +\infty$, $y_c > y_a$. Para $x = -\infty$, $y_c < y_a$. 3º) La curva corta al eje XX' en $(2,0)$, siendo la pendiente de la tangente en este punto: $y' = \dfrac{-2x-(1-x)\ln(1-x)^2}{x^2(1-x)} = 1$. La curva corta al eje YY' en el punto cuya ordenada es: $y = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-2(1-x)}{1-x} = -2$, es decir en $(0,-2)$, siendo la pendiente de la tangente en este punto: $\lim\limits_{x=0} \dfrac{-2x-(1-x)\ln(1-x)^2}{x^2(1-x)} = \lim\limits_{x=0} \dfrac{\ln(1-x)^2}{2x-3x^2} = \lim\limits_{x=0} \dfrac{-1}{(1-x)(1-3x)} = -1$. 4º) Anulando y', se tiene: $\ln(x-1) = \dfrac{x}{x-1}$, de donde se obtiene el máximo $(4.59, 0.557)$. 5º) El dibujo de la curva es el siguiente:



E 69- Dibujar la curva $y = (\sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}}$.

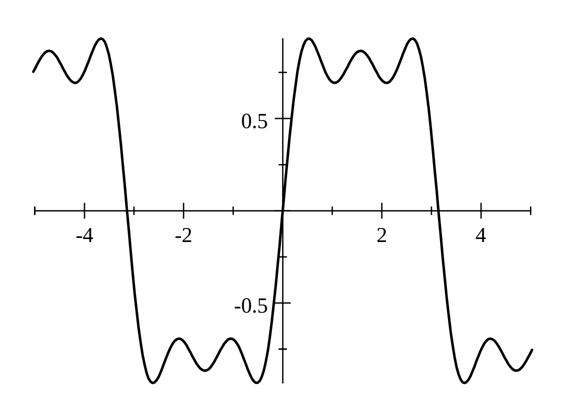
Solución: 1º) Dejando para el punto 4º el estudio de los puntos aislados de la curva, ha de cumplirse que: $\sin x + \cos x \geq 0$. Luego la curva existe en los siguientes intervalos: $\ldots \dfrac{-17\pi}{4} < x < \dfrac{-13\pi}{4}$; $\dfrac{-9\pi}{4} < x < \dfrac{-5\pi}{4}$; $\dfrac{-\pi}{4} < x < \dfrac{3\pi}{4}$; $\dfrac{7\pi}{4} < x < \dfrac{11\pi}{4}$; $\dfrac{15\pi}{4} < x < \dfrac{19\pi}{4}$; $\dfrac{23\pi}{4} < x < \dfrac{27\pi}{4}; \ldots$ 2º) Estudio de la curva para $x \geq 0$: a) Corta a YY' en el punto cuya ordenada es $\lim\limits_{x=0} (\sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}} = e$, es decir en $(0,e)$. Como $y' = \dfrac{y}{x}\left(\dfrac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} - \ln y\right)$, la pendiente de la tangente en $(0,e)$, es: $\lim\limits_{x=0} \dfrac{e}{x}\left(\dfrac{1-x}{x+1} - 1\right) = -2e$. b) Corta al eje XX' en los puntos en los que: $\sin x + \cos x = 0$, es decir: $\tan x = -1$, $x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi$, en los que las tangentes son paralelas al eje YY'. c) Las abscisas de los puntos medios de los intervalos de existencia calculados más arriba, son: $\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{9\pi}{4}, \dfrac{17\pi}{4}$,..., que corresponden a los puntos de la curva: $\left(\dfrac{\pi}{4}, 2^{\frac{2}{\pi}}\right)$, $\left(\dfrac{9\pi}{4}, 2^{\frac{2}{9\pi}}\right)$,...Las pendientes de sus respectivas tangentes, son: -0.8735, -0.0073, ... d) La curva pasa por los puntos $(2k\pi, 1)$, en los que las pendientes de sus tangentes, son: $y' = \dfrac{1}{2k\pi}$. 3º) Estudio de la curva para $x < 0$, es decir: $y = (\cos x' - \sin x')^{\frac{-1}{x'}}$, con $x' = -x$, para $x' > 0$: a)Tiene las asíntotas paralelas al eje YY', correspondientes a $\cos x' = \sin x'$, es decir: $x' = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, o bien: $x = \dfrac{-\pi}{4} - k\pi$. b) Los puntos cuyas abscisas corresponden a los puntos medios de los intervalos de existencia calculados más arriba, son: $\left(\dfrac{-7\pi}{4}, 2^{\frac{-2}{7\pi}}\right)$, $\left(\dfrac{-15\pi}{4}, 2^{\frac{-2}{15\pi}}\right)$,... tendiendo sus ordenadas a 1. 4º) Estudio de los puntos aislados: a) Para $\sin x + \cos x > 0$, siendo $x = 2n$, se tienen los puntos aislados de ordenada negativa cuyas coordenadas son: $\left(2n, -\sqrt[2n]{\sin 2n + \cos 2n}\right)$, por ejemplo: $(2, -0,702)$, $(6, -0.938)$,... , y también los puntos $\left(-2n, \dfrac{-1}{\sqrt[2n]{\sin 2n + \cos 2n}}\right)$, por ejemplo: $(-4, -1.018)$, $(-6, -1.0196)$,... , que corresponden al signo negativo de las raíces de índice par y radicando positivo.

b) Para $\sin x + \cos x < 0$, siendo $x = 2n+1$, se tienen los puntos aislados de ordenada negativa cuyas coordenadas son: $\left(2n+1, \dfrac{1}{\sqrt[2n+1]{\sin(2n+1)+\cos(2n+1)}}\right)$, por ejemplo: $(-3,-0.691)$, $(-1,-3.32)$, $(3,-0.947)$, $(5,-0.924)$,... , que corresponden a las raíces de índice impar de radicandos negativos. 5º) El dibujo de la curva es el siguiente, en el que no se incluyen los puntos aislados:



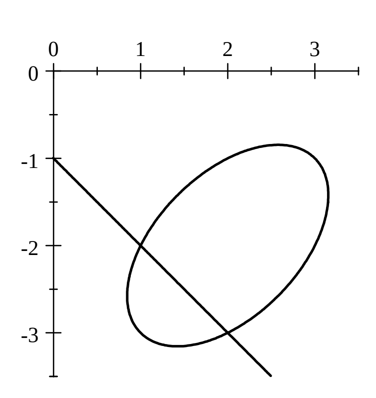
E 70- Dibujar la curva $y = \sin x + \dfrac{\sin 3x}{3} + \dfrac{\sin 5x}{5}$.

Solución: 1º) La curva es simétrica respecto al origen y respectoa $x = \dfrac{\pi}{2}$, por tanto basta estudiar la curva en el intervalo $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$. 2º) No tiene asíntotas ni ramas parabólicas. 3º) Las intersecciones con el eje XX' corresponden a $y = \sin x + \dfrac{\sin 3x}{3} + \dfrac{\sin 5x}{5} = \dfrac{\sin x}{15}(48\sin^4 x - 40\sin^2 x + 45) = 0$, es decir: $\sin x = 0$, $x = k\pi$. De acuerdo con las simetrías estudiadas: $x = 0$, siendo la pendiente de su tangente: $y'(x=0) = \cos x + \cos 3x + \cos 5x = 3$. La pendiente de la tangente en $(\pi, 0)$ es -3. 4º) Anulando y', se tiene: $\cos x + \cos 3x + \cos 5x = \cos 2x(1 + 2\cos 2x) = 0$. Las raíces en el intervalo $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, son: 0, $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{2}$. Los máximos son: $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{14}{15}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{13}{15}\right)$, y el mínimo es: $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\sqrt{3}}{5}\right)$. El punto $(0,0)$ es de inflexión. 5º) El dibujo de la curva es el siguiente:



E 71- Dada la curva $f(x,y) = x^3+y^3-5x^2-xy+7y^2+5x+17y+11 = 0$, hallar: 1º) Los puntos dobles de la curva. 2º) Las ecuaciones de las tangentes en estos puntos. 3º) La derivada segunda de y en estos puntos. 4º) La situación de la curva respecto a dichas tangentes.

Solución: 1º) Derivando sucesivamente, se tiene: $f'_x = 3x^2-10x-y+5$, $f'_y = 3y^2-x+14y+17$, $f''_{x^2} = 6x-10$, $f''_{xy} = -1$, $f''_{y^2} = 6y+14$, $f'''_{x^3} = 6$, $f'''_{x^2y} = 0$, $f'''_{xy^2} = 0$, $f'''_{y^3} = 6$. Resolviendo el sistema formado por $f(x,y) = 0$, $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, se tienen las soluciones $(1,-2)$, $(2,-3)$, que son los puntos dobles pedidos. 2º) Como las primera derivadas se anulan en dichos puntos, se pasa a las siguientes derivadas: $f''_{x^2}+2y'f''_{xy}+y'^2f''_{y^2}+y''f'_y = 0$. Particularizando para el punto $(1,-2)$, se tiene: $y'^2-y'-2 = 0$, cuyas raíces son: 2 y -1, siendo las tangentes: $2x-y-4 = 0$, $x+y+1 = 0$. Particularizando para el punto $(2,-3)$, se tiene: $2y'^2+y'-1 = 0$, cuyas raíces son: $\frac{1}{2}$ y -1, siendo las tangentes: $x-2y-8 = 0$, $x+y+1 = 0$. 3º) Volviendo a derivar, se tiene: $f'''_{x^3}+3f'''_{x^2y}y'+3f'''_{xy^2}y'^2+f'''_{y^3}y'^3+2y'y''f''_{y^2}+2f''_{xy}y''+$ $+\left(f''_{y^2}y'+f''_{xy}\right)y''+f'_yy''' = 0$. Particularizando para $(1,-2)$: $6+6y'^3+4y'y''-2y''+(-1+2y')y'' = 0$, obteniéndose para $y' = 2$, $y'' = -6$, y para $y' = -1$, $y'' = 0$. Particularizando para $(2,-3)$, se tiene $6+6y'^3-8y'y''-2y''+(-4y'-1)y'' = 0$, obteniéndose para $y' = \frac{1}{2}$, $y'' = \frac{3}{4}$, y para $y' = -1$, $y'' = 0$. 4º) Trasladando el origen de coordenadas al punto $(1,-2)$, se tiene: $x^3+y^3-2x^2+y^2-xy = 0$. Las tangentes en el origen son $-2x^2+y^2-xy = 0$, es decir $2x-y = 0$, $x+y = 0$. Cortando la curva por $y = (2+\theta)x$, y operando, se tiene $3x+\theta = 0$, es decir, $x = \frac{-\theta}{3}$, por lo que la curva está por debajo de la tangente. Cortando la curva por $y = x+\theta$, se tiene $\theta(-3x^2+3x) = 0$, por lo que la situación de la curva respecto a esta tangente, no varía al variar θ. Trasladando el origen al punto $(2,-3)$, las tangentes en el origen son $x-2y = 0$, $x+y = 0$. Estudiando la tangente $x-2y = 0$, la curva queda por encima de la tangente. En relación con la tangente $x+y = 0$, sucede lo mismo que en el caso anterior, no variando la situación de la curva al variar θ. Trasladando el origen de coordenadas al origen inicial, la ecuación de esta tangente es: $x+y+1 = 0$. Su comportamiento, estudiado más arriba, induce a comprobar el hecho de si esta tangente forma parte de la curva dada, obteniéndose que, efectivamente, es así, pues: $x^3+y^3-5x^2-xy+7y^2+5x+17y+11 = (x^2-xy+y^2-6x+6y+11)(x+y+1)$, es decir que se trata de una elipse y una recta, como se ve en el siguiente dibujo, siendo los puntos dobles obtenidos, los de intersección de elipse y recta.



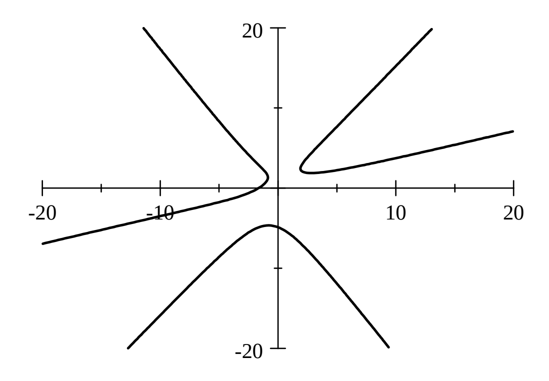
E 72- Hallar la suma de las tangentes y subtangentes en el punto (x,y) de la curva $e^{\frac{y}{a}}-x^2+a^2 = 0$.

Solución: La fórmula que da la subtangente es: $S_T = \frac{y}{y'}$, y la que da la tangente, es: $T = \sqrt{S_T^2+y^2}$. Luego, $T+S_T = \sqrt{\frac{y^2}{y'^2}+y^2}+\frac{y}{y'} = \frac{y}{y'}\left(1+\sqrt{1+y'^2}\right)$. De la ecuación dada, se tiene: $y = a\ln(x^2-a^2)$, $y' = \frac{2ax}{x^2-a^2}$. Luego, operando se tiene: $T+S_T = \frac{y(x^2-a^2)}{2ax}\left(1+\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}\right) = \frac{xy}{a}$.

E 73- Dada la curva $x^3-3x^2y+y^3+x^2+2y^2-3xy+8x-11y+15 = 0$, hallar: 1º) Los puntos dobles de la curva. 2º) Las derivadas primeras en estos puntos. 3º) Las ecuaciones de las tangentes en dichos puntos. 4º) Las derivadas segundas en dichos puntos y la posición de la curva respecto a estas tangentes.

Solución: Se forma el sistema $f(x,y) = 0$, $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, es decir: $x^3-3x^2y+y^3+x^2+2y^2-3xy+$

$+8x-11y+15=0$, $3x^2-6xy+2x-3y+8=0$, $-3x^2+3y^2+4y-3x-11=0$. Este sistema no tiene solución, por lo que no hay puntos dobles. El dibujo de la curva es el siguiente, comprobándose lo anteriormente expuesto.



E 74- Las curvas $x^2+2y^2-3=0$, $2x^2+3y^2-2xy-3=0$, son tangentes en dos puntos distintos. Hallar la ecuación de la recta que los une.

Solución: Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, se tienen los puntos de tangencia $(1,1)$, $(-1,-1)$. La ecuación pedida es $x=y$.

E 75- Se da la curva $(x^2+y^2)^2-2x^2y=0$. Hallar: 1º) Máximos y mínimos. 2º) Las tangentes en el origen de coordenadas. 3º) La posición de la curva respecto a estas tangentes.

Solución: 1º) Derivando: $f'_x=4x(x^2+y^2)-4xy=0$, de donde $x=0$, $x^2+y^2=2y$. Sustituyendo estos valores en la ecuación dada, se tienen los puntos (0.0), $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Como $f'_y=4y(x^2+y^2)-2x^2$, particularizando para $(0,0)$, $f'_y=0$, luego es un punto singular. Volviendo a derivar: $y''=\dfrac{-6x^2-2y^2+2y}{2y^3+2x^2y-x^2}$, particularizando para $\left(\frac{\pm1}{2},\frac{1}{2}\right)$, se tiene $y''=-4<0$, luego ambos puntos son máximos. 2º) Los términos de menor grado son $-2x^2y=0$, luego las tangentes en el origen (punto singular), son $x=0$, $y=0$. 3º) Para estudiar la posición de la curva respecto a la tangente $x=0$ (figura A), se hace $x=\theta y$, con $\theta\to0$, luego, operando: $y=\dfrac{2\theta^2}{1}$, es decir para $\pm\theta$, $y>0$. Para estudiar la posición respecto a la tangente $y=0$ (figura B), se hace $y=\theta x$, con $\theta\to0$, luego $x=\dfrac{2\theta}{1}$, con lo que para $\theta>0$, $x>0$, y para $\theta<0$, $x<0$.

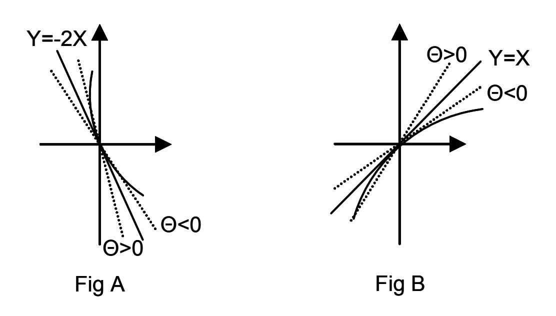
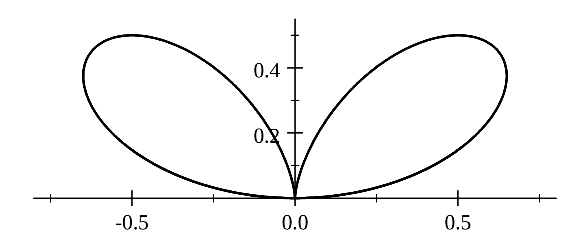


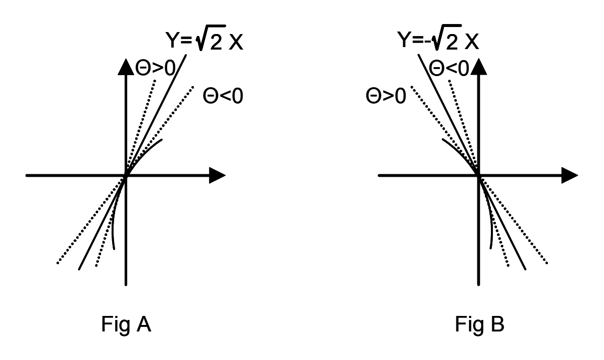
Fig A Fig B

Se incluye seguidamente, el dibujo de la curva:

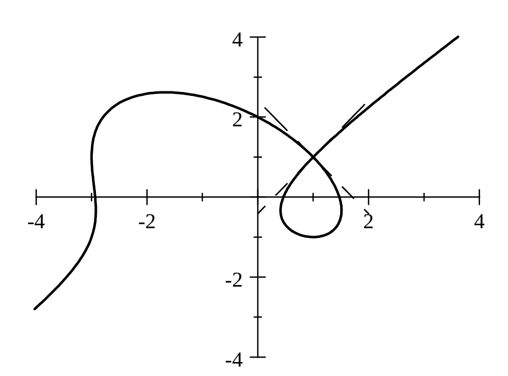


E 76- Dada la curva $x^3 - y^3 + x^2 + y^2 - 5x + y + 2 = 0$, hallar: 1º) Los puntos dobles. 2º) Las tangentes en estos puntos. 3º) La posición de la curva respecto a estas tangentes.

Solución: 1º) Resolviendo el sistema $f(x,y) = 0$, $f'_x = 3x^2 + 2x - 5 = 0$, $f'_y = -3y^2 + 2y + 1 = 0$, se tiene el punto $(1,1)$. Solo hay un punto doble, pues el número máximo de puntos dobles viene dado por $\binom{n-1}{2}$, siendo n el grado de la ecuación, luego $\binom{3-1}{2} = 1$. 2º) Trasladando el origen de coordenadas a $(1,1)$, se tiene: $x^3 - y^3 + 4x^2 - 2y^2 = 0$. Luego las tangentes en el origen vienen dadas por: $4x^2 - 2y^2 = 0$, es decir: $y = \pm\sqrt{2}\,x$. En las coordenadas iniciales, las tangentes son: $y - 1 = \pm\sqrt{2}\,(x-1)$. 3º) Para estudiar la posición de la curva respecto a la tangente $y = \sqrt{2}\,x$ (figura A), se hace $y = \left(\sqrt{2} + \theta\right)x$, con $\theta \to 0$, obteniéndose $x = \dfrac{2\sqrt{2}\,\theta}{1 - 2\sqrt{2}} \simeq -1.5\theta$, luego para $\theta > 0$, $x < 0$, y para $\theta < 0$, $x > 0$. Procediendo similarmente para la tangente $y = -\sqrt{2}\,x$ (figura B), se tiene para $\theta > 0$, $x < 0$, y para $\theta < 0$, $x > 0$.

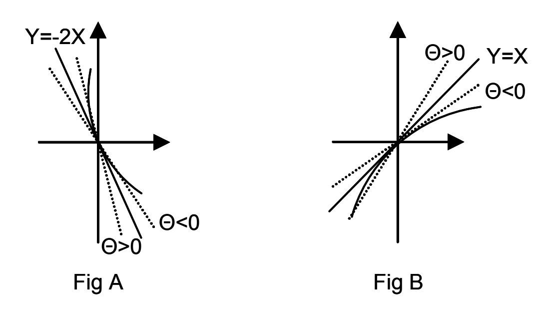


El dibujo de la curva es el siguiente:

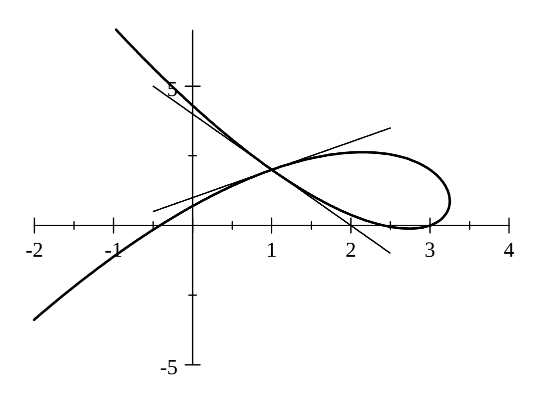


E 77- Se da la curva $x^3 - 5x^2 + xy + y^2 + 5x - 5y + 3 = 0$. Hallar: 1º) Sus puntos singulares. 2º) Las derivadas primera y segunda en dichos puntos. 3º) Posición de la curva respecto a las tangentes en dichos puntos.

Solución: 1º) La curva no puede tener más de un punto doble, pues siendo su grado 3, el número máximo de puntos dobles es $\binom{3-1}{2} = 1$. Resolviendo el sistema: $f(x,y) = 0$, $f'_x = 3x^2 - 10x + y + 5 = 0$, $f'_y = x + 2y - 5 = 0$, se obtiene el punto singular $(1,2)$. 2º) Derivando sucesivamente la ecuación de la curva e igualando a cero, se tienen las siguientes ecuaciones: $3x^2 - 10x + y + xy' + 2yy' + 5 - 5y' = 0$, $6x - 10 + y' + y' + xy'' + 2y'^2 + 2yy'' - 5y'' = 0$, $6 + 2y'' + y'' + xy''' + 4y'y'' + 2y'y'' + 2yy''' - 5y''' = 0$. Particularizando la segunda derivada: $6 - 10 + 2y' + y'' + 2y'^2 + 4y'' - 5y'' = 0$, de donde $y'^2 + y' - 2 = 0$, obteniéndose las primeras derivadas 1 y -2. Particularizando la tercera derivada, para $y' = 1$, $9y'' = 6$, $y'' = \frac{-2}{3}$, y particularizando para $y' = -2$, $9y'' = 6$, $y'' = \frac{2}{3}$. 3º) Trasladando el origen de coordenadas al punto $(1,2)$, se tiene la ecuación: $x^3 - 2x^2 + y^2 + xy = 0$. Por tanto, las tangentes en el origen son: $-2x^2 + y^2 + xy = 0$, es decir: $(2x + y)(y - x) = 0$, que en las coordenadas originales, son: $2x + y - 4 = 0$, $x - y + 1 = 0$. Para estudiar la posición de la curva respecto a la tangente $2x + y = 0$, en los nuevos ejes, (figura A), se hace $y = -(2 + \theta)x$, con $\theta \to 0$, teniéndose $x = -3\theta$, es decir, para $\theta > 0$, $x < 0$, y para $\theta < 0$, $x > 0$. En relación a la tangente $y - x = 0$ (figura B), se hace $y = (1 + \theta)x$, teniéndose $x = -3\theta$, es decir, para $\theta > 0$, $x < 0$, y para $\theta < 0$, $x > 0$.

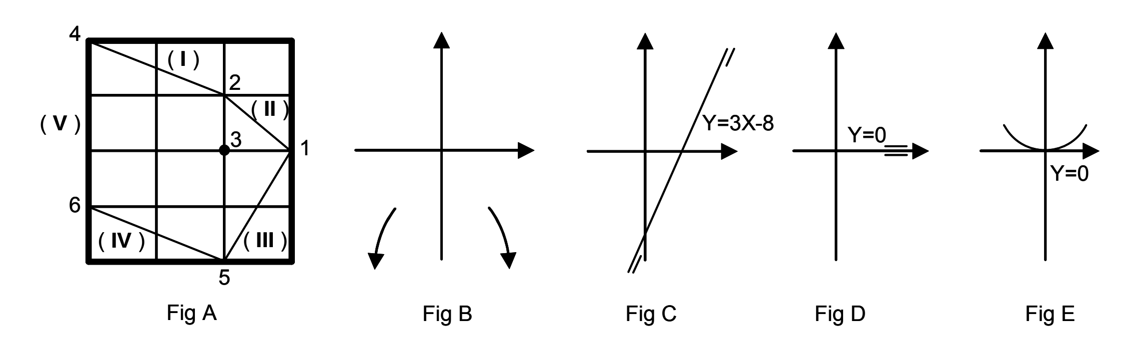


El dibujo de la curva se incluye a continuación.

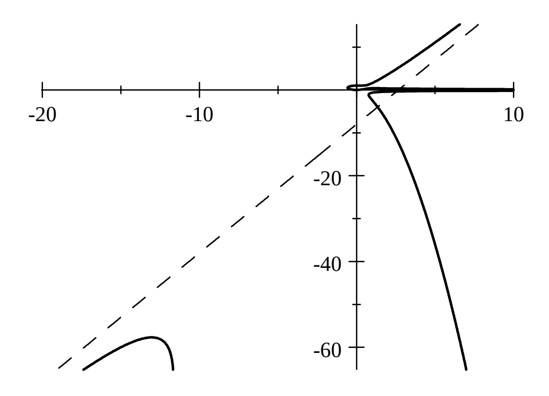


E 78- Dada la curva $3x^3y^2 - x^2y^3 + x^2y^2 - y^4 - x^2 + y = 0$, hallar: 1º) Asíntotas y ramas parabólicas. 2º) La posición de la curva respecto a ellas. 3º) Las tangentes en el origen. 4º) La posición de la curva respecto a estas tangentes.

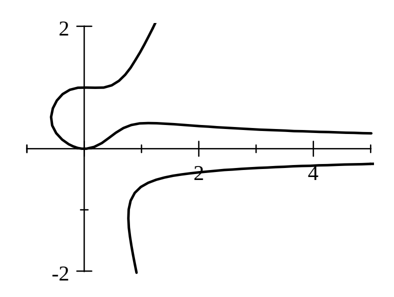
Solución: 1º) En el diagrama de Newton-Cramer (figura A), se han situado los seis monomios de la ecuación, numerados en el orden del enunciado. La determinatriz (I) se refiere a una rama parabólica según el eje OY, definida por los monomios 4 y 2, es decir: $-y^4 - x^2y^3 = 0$, simplificando: $y = -x^2$. La determinatriz (II) se refiere a una asíntota general, definida por: $-x^2y^3 + 3x^3y^2 = 0$, es decir por: $y = 3x$. Añadiendo los términos de la primera paralela a (II), monomios 3 y 4, se tiene: $3x^3y^2 - x^2y^3 + x^2y^2 - y^4 = 0$, de donde: $y - 3x = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2} = \dfrac{x^2 - 9x^2}{x^2} = -8$, por tanto la asíntota es: $y - 3x + 8 = 0$. Para estudiar la posición de la curva respecto a ella, se añade la siguiente paralela, es decir el monomio 5, teniéndose: $3x^3y^2 - x^2y^3 + x^2y^2 - y^4 - x^2 = 0$, de donde, operando, se obtiene: $y - 3x = \dfrac{-x^2 + x^2y^2 - y^4}{x^2y^2} = \dfrac{-x^2 + 9x^4 - 81x^4}{9x^4} = -8 - \dfrac{1}{9x^2}$, luego $y_c - y_a = \dfrac{-1}{9x^2}$, es decir que para $x \lesseqgtr 0$, $y_c < y_a$. La determinatriz (III) se refiere a la asíntota $y = 0$, teniéndose: $3x^3y^2 - x^2 = 0$, es decir: $y = \dfrac{1}{\pm\sqrt{3x}}$, por lo que para $x > 0$, $y = \pm\infty$. 2º) Según lo anterior se ha representado en la figura B la posición de la curva en el caso de la rama parabólica, en la figura C en el caso de la asíntota $y = 3x - 8$, y en la figura D en el caso de la asíntota $y = 0$. 3º) La determinatriz (IV) se refiere a la tangente en el origen $y = 0$. 4º) La posición de la curva respecto a dicha tangente (figura E), viene dada por los monomios 5 y 6, es decir $y = x^2$, luego $y_c > y_t$, para $x \gtrless 0$.



El dibujo de la curva es el siguiente:



Seguidamente se presenta un detalle del entorno del origen de coordenadas:



E 79- Se da la curva $2xy^3 - y^3 + x^2 - x^4 = 0$. Hallar: 1º) Las tangentes en el origen y la posición de la curva respecto a ellas. 2º) Los máximos y mínimos. 3º) Las asíntotas y la posición de la curva respecto a ellas. 4º) Los puntos singulares. 5º) Dibujar la curva.

Solución: 1º) La determinatriz (I) del diagrama de Newton-Cramer (figura A), se refiere a la tangente en el origen $x = 0$. La posición de la curva respecto a ella (figura B), está definida por: $-y^3 + x^2 = 0$, es decir: $x = \pm\sqrt{y^3}$, por lo que $y > 0$, $x \gtreqless 0$. 2º) $f'_x = 2y^3 + 2x - 4x^3 = 0$, luego: $y^3 = 2x^3 - x$, que sustituido en la ecuación dada, se tiene: $x(3x^3 - 2x^2 - x + 1) = 0$, cuyas raíces son 0 y -0.646, obteniéndose los puntos $(0,0)$ y $(-0.646, 0.474)$. El punto $(0,0)$ anula también la derivada f'_y, luego es un punto singular. Para el punto $(-0.646, 0.474)$, $y'' < 0$, luego es un máximo. 3º) La determinatriz (II) se refiere a una asíntota paralela al eje YY', definida por: $2xy^3 - y^3 = 0$, es decir $x = \frac{1}{2}$. Añadiendo los términos 3 y 4 de la primera paralela, se tiene: $y^3 = \frac{x^4 - x^2}{2x - 1}$; siendo $x = \frac{1}{2} + \theta$, $y^3 = \frac{-3}{32\theta}$. Luego para $\theta > 0$, $y = -\infty$, y para $\theta < 0$, $y = +\infty$ (figura C). La determinatriz (III) se refiere a una asíntota general, definida por: $2xy^3 - x^4 = 0$; añadiendo los términos de la primera paralela, se tiene:
$y = \left(\frac{x^4 - x^2}{2x - 1}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{x}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{6\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{4\sqrt[3]{2}\,x} + \ldots$, luego la asíntota es: $y = \frac{x}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{6\sqrt[3]{2}}$ (es decir: $y = 0.794x + 0.132$, aproximadamente), y la posición de la curva está definida por $y_c - y_a = -\frac{1}{4\sqrt[3]{2}\,x}$, por lo que, para $x = +\infty$, $y_c < y_a$, y para $x = -\infty$, $y_c > y_a$ (figura D). 4º) El punto singular ya determinado, es $(0,0)$, cuyas tangentes se han calculado más arriba (figura B).

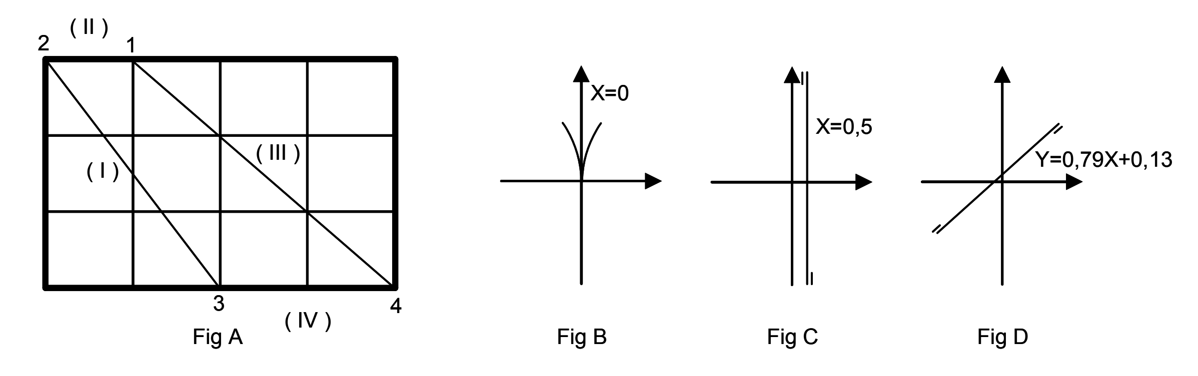
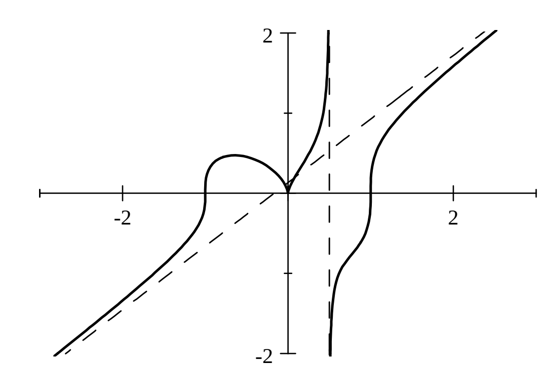


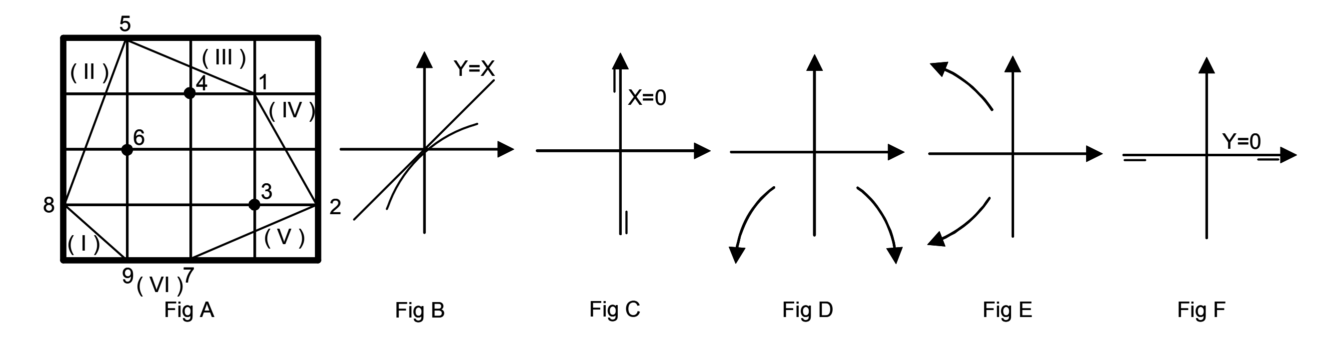
Fig A Fig B Fig C Fig D

El dibujo de la curva es el siguiente:

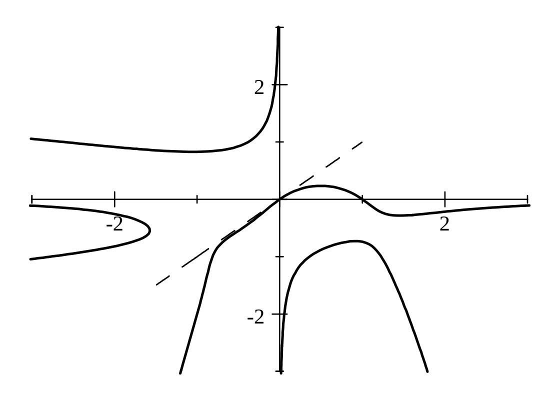


E 80- Dada la curva $3x^3y^3 + x^4y - x^3y - 2x^2y^3 + 2xy^4 + xy^2 + x^2 + y - x = 0$, hallar las asíntotas, las ramas parabólicas, las tangentes en el origen y la posición de la curva respecto a todas ellas.

Solución: La determinatriz (I) del diagrama de Newton-Cramer (figura A), se refiere a la tangente en el origen determinada por: $y - x = 0$. Para hallar la posición de la curva, se añaden los términos de la primera paralela, luego: $y - x + x^2 = 0$, de donde $y_c - y_t = -x^2$ (figura B). La determinatriz (II) se refiere a la asíntota $x = 0$. La posición de la curva viene dada por: $2xy^4 + y = y(2xy^3 + 1) = 0$, es decir: $x = \frac{-1}{2y^3}$, luego $x_c - x_a = \frac{-1}{2y^3}$ (figura C). La determinatriz (III) se refiere a la rama parabólica según el eje YY', definida por: $3x^3y^3 + 2xy^4 = 0$, es decir, simplificando: $3x^2 + 2y = 0$ (figura D). La determinatriz (IV) se refiere a la rama parabólica según el eje XX', definida por: $3x^3y^3 + x^4y = 0$, simplificando: $3y^2 + x = 0$ (figura E). La determinatriz (V) se refiere a la asíntota $y = 0$. La posición de la curva viene dada por: $x^4y + x^2 = 0$, simplificando: $x^2y + 1 = 0$, $y = \frac{-1}{x^2}$, luego $y_c - y_a = \frac{-1}{x^2}$ (figura F).



El dibujo de la curva es el siguiente:



E 81- Demostrar que si $f(x,y) = 0$ es una función de grado m, y se descompone en una función $\varphi(x,y) = 0$ de grado $(m-1)$ y en una función lineal $y - mx - n = 0$, esta función lineal se puede obtener hallando la asíntota de $f(x,y) = 0$, como si fuera una curva cualquiera.

Solución: Sea: $\varphi(x,y) = \varphi_1(x,y) + \varphi_2(x,y) + \ldots \varphi_i(x,y) + \ldots$, donde φ_1, φ_2,...φ_i,... son polinomios homogéneos de grado $(m-1)$, $(m-2)$,...$(m-i)$,... etc. Luego se tiene: $f(x,y) = \varphi(x,y)(y - mx - n) =$

$= (y - mx)\varphi_1 + [(y - mx)\varphi_2 - n\varphi_1] + \ldots [(y - mx)\varphi_i - n\varphi_i] + \ldots = 0$, en donde cada sumando corresponde a funciones homogéneas de grado m, $m - 1$,..., es decir: $f_m = (y - mx)\varphi_1$, $f_{m-1} = (y - mx)\varphi_2 - n\varphi_1$, etc. La dirección d de la asíntota está dada por $f_m(1,d) = (d - m)\varphi_1 = 0$, luego $d = m$. La ordenada en el origen b está dada por la expresión $b = \dfrac{-f_{m-1}(1,m)}{f'_m} = \dfrac{n\varphi_1}{\varphi_1} = n$. Por tanto, se cumple lo expuesto en el enunciado.

E 82- Dada la curva $x^3y^2 - x^2y^3 + 2x^2y^2 - x^3 - 3xy + y^2 - y + x = 0$, hallar las asíntotas, las tangentes en el origen y la posición de la curva respecto a todas ellas.

Solución: La determinatriz (I) del diagrama de Newton-Cramer (figura A), corresponde a la asíntota: $x = 0$, cuya posición respecto a la curva viene dada por: $y^2 - x^2y^3 = 0$, es decir $y = x^2$ (figura B). La determinatriz (II) corresponde a la asíntota general definida por: $x^3y^2 - x^2y^3 = 0$; añadiendo la primera paralela, se tiene: $x^3y^2 - x^2y^3 + 2x^2y^2 = 0$, de donde: $x^2y^2(x - y + 2) = 0$, siendo la asíntota: $y = x + 2$. Añadiendo la siguiente paralela, se tiene: $x^3y^2 - x^2y^3 + 2x^2y^2 - x^3 = 0$, luego: $y = x + 2 - \dfrac{x^3}{x^2y^2} = x + 2 - \dfrac{x}{(x+2)^2}$, de donde $y_c - y_a = \dfrac{-x}{(x+2)^2}$ (figura C). La determinatriz (III) corresponde a la asíntota paralela al eje XX', que viene definida por: $x^3y^2 - x^3 = 0$, simplificando: $y = \pm 1$. Añadiendo la primera paralela, se tiene: $x^3(y^2 - 1) - x^2y^3 + 2x^2y^2 = 0$, operando $y_c - y_a = \dfrac{3}{2x}$ para la asíntota $y = -1$ (figura D), $y_c - y_a = \dfrac{-1}{2x}$, para la asíntota $y = 1$ (figura E). La determinatriz (V) corresponde a la tangente en el origen: $-y + x = 0$. Añadiendo la primera paralela, se tiene: $-y + x - 3xy + y^2 = 0$, luego $y_c - y_t = -3xy + y^2 = -2x^2$ En la figura F, se ha cortado la curva por $y = (1 + \theta)x$.

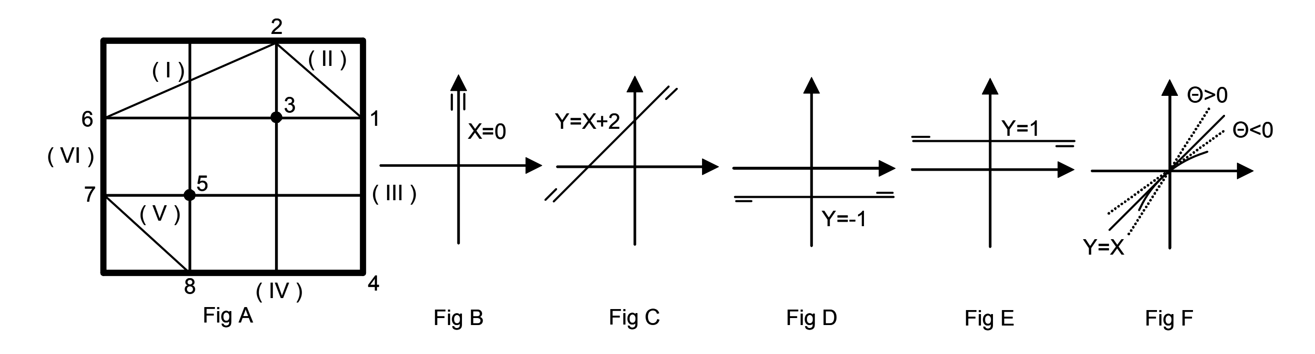
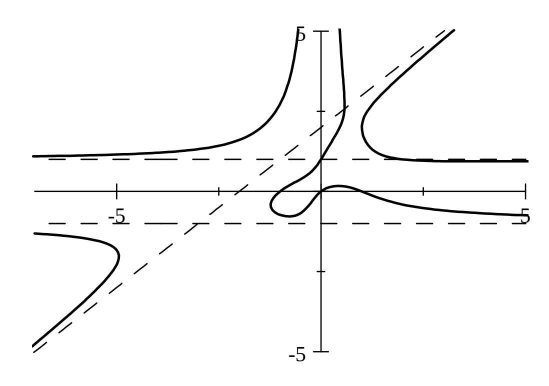


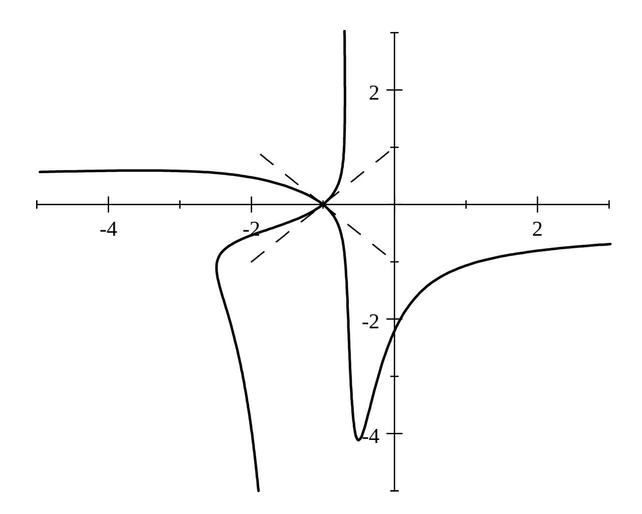
Fig A Fig B Fig C Fig D Fig E Fig F

El dibujo de la curva es el siguiente:



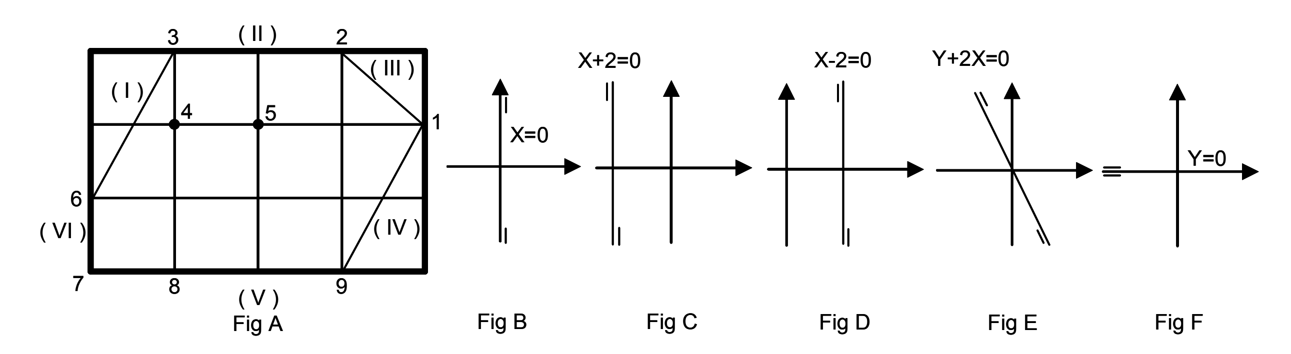
E 83- Dada la curva $x^3y^3 + 3x^2y^3 + 3xy^3 + y^3 + 3xy^2 + 2y^2 + x^2 + 2x + 1 = 0$, hallar los puntos singulares y las tangentes en ellos.

Solución: Resolviendo el sistema: $f(x,y) = 0$, $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, se tiene como solución el punto $(-1,0)$. Trasladando el origen de coordenadas a este punto, se tiene la ecuación: $x^3y^3 + 3xy^2 + x^2 - y^2 = 0$, luego las tangentes en el origen son: $x^2 - y^2 = 0$, es decir: $y = \pm x$. Deshecha la traslación, las tangentes en $(-1,0)$, son: $y = \pm(x + 1)$. El dibujo de la curva es el siguiente:

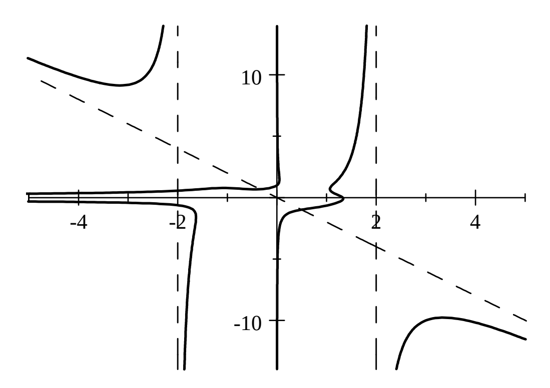


E 84- Dada la curva $2x^4y^2 + x^3y^3 - 4xy^3 + 2xy^2 - 2x^2y^2 + y - 1 - x + x^3 = 0$, hallar las asíntotas y la posición de la curva respecto a ellas.

Solución: La determinatriz (I) del diagrama de Newton-Cramer (figura A), corresponde a la asíntota $x = 0$; la posición de la curva viene dada por: $-4xy^3 + y = 0$, es decir: $x = \dfrac{1}{4y^2}$, de donde $x_c - x_a = \dfrac{1}{4y^2}$ (figura B). La determinatriz (II) corresponde a asíntotas paralelas al eje YY', definidas por: $-4xy^3 + x^3y^3 = 0$, es decir: $x = \pm 2$. Añadiendo la primera paralela y operando, se tiene para $x = -2$, $x_c - x_a = \dfrac{-5}{2y}$ (figura C), y para $x = 2$, $x_c - x_a = \dfrac{-7}{2y}$ (figura D). La determinatriz (III) corresponde a la asíntota general definida por: $2x^4y^2 + x^3y^3 = 0$, es decir, operando: $y + 2x = 0$. Añadiendo la primera paralela, se tiene tras simplificar, $y_c - y_a = \dfrac{-6}{x}$ (figura E). La determinatriz (IV) corresponde a la asíntota $y = 0$, cuya posición viene dada por $y^2 = \dfrac{-1}{2x}$ (figura F).



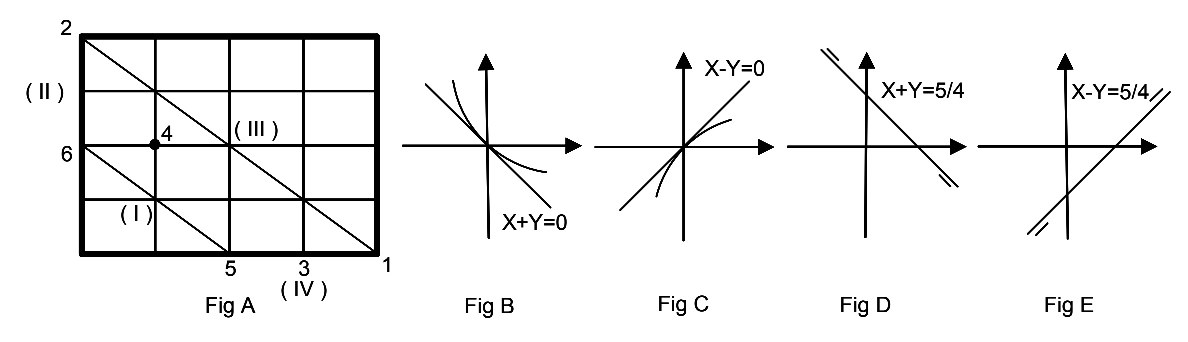
El dibujo de la curva es el siguiente:



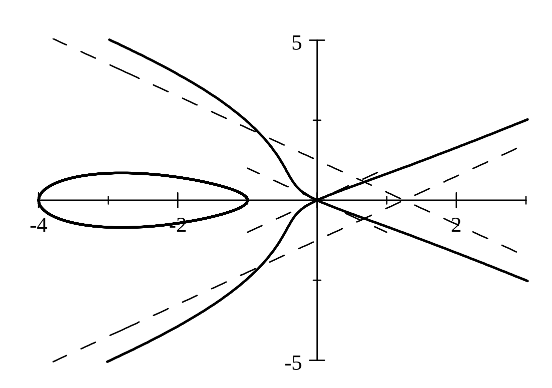
E 85- Dibujar la curva $x^4 - y^4 + 5x^3 - 10xy^2 + 4x^2 - 4y^2 = 0$

Solución: La curva es simétrica respecto al eje XX'. La determinatriz (I) del diagrama de Newton-Cramer (figura A), se refiere a las tangentes en el origen dadas por: $4x^2 - 4y^2 = 0$, es decir: $x \pm y = 0$. Añadiendo la primera paralela se tiene: $5x^3 - 10xy^2 + 4x^2 - 4y^2 = 0$. Operando, se tiene para la

tangente $x+y=0$, $y_c-y_t=\frac{5x^2}{8}$ (figura B), y para la tangente $x-y=0$, $y_c-y_t=\frac{-5x^2}{8}$ (figura C). La determinatriz (II) da el punto de corte con el eje YY', es decir $(0,0)$. La determinatriz (III) corresponde a la asíntota general dada por: $x^4-y^4=(x^2+y^2)(x^2-y^2)=0$. El factor (x^2+y^2) indica que hay una parte cerrada de la curva. Añadiendo la primera paralela, se tiene: $x^4-y^4+5x^3-10xy^2=0$, obteniéndose la asíntota: $x+y=\frac{10xy^2-5x^3}{(x^2+y^2)(x-y)}=\frac{10x^3-5x^3}{2x^2\cdot 2x}=\frac{5}{4}$, y la asíntota: $x-y=\frac{5}{4}$. Para hallar la posición de la curva respecto a las asíntotas, se añade la segunda paralela, y operando, se tiene para $x+y=\frac{5}{4}$, que $y_c-y_a=\frac{-25}{4x}$ (figura D), y para $x-y=\frac{5}{4}$, $y_c-y_a=\frac{25}{4x}$ (figura E). La determinatriz (IV) da los puntos de intersección con el eje XX', que son $(0,0)$, $(-1,0)$, $(-4,0)$.

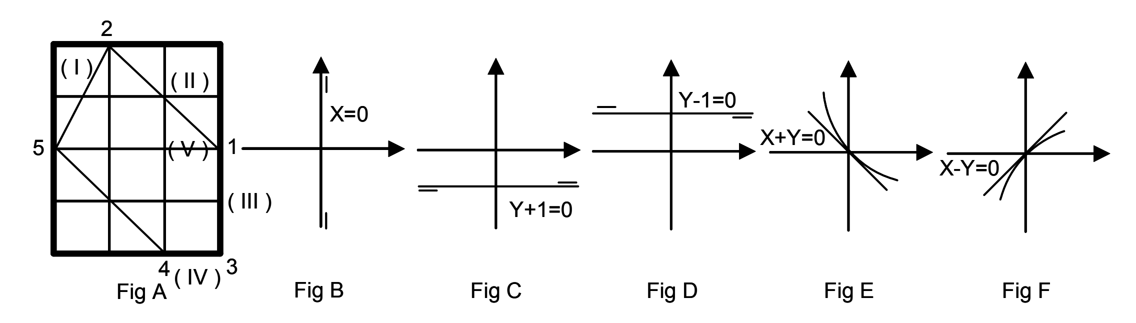


El dibujo de la curva es el siguiente:

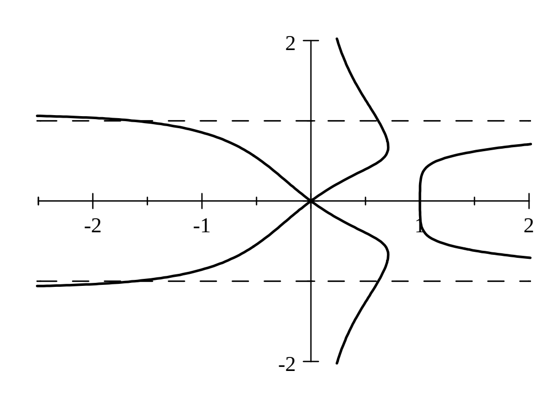


E 86- Dibujar la curva $xy^2(x^2+y^2)-x^3+x^2-y^2=0$.

Solución: La curva es simétrica respecto al eje XX'. La determinatriz (I) del diagrama de Newton-Cramer (figura A), corresponde a la asíntota $x=0$, estando su posición definida por: $xy^4-y^2=0$, de donde $x_c-x_a=\frac{1}{y^2}$ (figura B). La determinatriz (II) corresponde a: $xy^2(x^2+y^2)=0$. La curva no tiene asíntota general ni rama parabólica general. La determinatriz (III) se refiere a asíntotas paralelas al eje XX', correspondientes a: $y^2-1=0$. Añadiendo la primera paralela, se tiene para $y+1=0$, $y_c-y_a=\frac{1}{2x}$ (figura C), y para $y-1=0$, $y_c-y_a=\frac{-1}{2x}$ (figura D). La determinatriz (IV) da las intersecciones con el eje YY', que son los puntos $(0,0)$ y $(1,0)$. La determinatriz (V) corresponde a las tangentes en el origen: $y=\pm x$. Añadiendo la primera paralela, se tiene para $x+y=0$, $y_c-y_t=\frac{x^2}{2}$ (figura E), y para $x-y=0$, $y_c-y_t=\frac{-x^2}{2}$ (figura F).



El dibujo de la curva es el siguiente:



E 87- Hallar los ejes y centros de simetría de la curva $y(x^2-1)-x=0$.

Solución: Al cambiar x por $-x$, y por $-y$, la curva no varía, luego es simétrica respecto a $(0,0)$.

E 88- Hallar los ejes y centros de simetría de la curva $3x^2y-x^3+3x-y=0$.

Solución: Al cambiar x por $-x$, y por $-y$, la curva no varía, luego es simétrica respecto a $(0,0)$.

E 89- Hallar los ejes y centros de simetría de la curva $x^2+y^2-4y+1=0$.

Solución: Se trata de una circunferencia de centro $(0,2)$, luego este punto es centro de simetría, siendo eje de simetría cualquier recta que pase por él.

E 90- Hallar los ejes y centros de simetría de la curva $y^4-x^4+ay^2+bx^2=0$.

Solución: La curva tiene por ejes de simetría, los ejes coordenados, y por centro de simetría, el origen de coordenadas.

E 91- Obtener la tangente en el origen, de la curva $y\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)-x=0$.

Solución: $\lim_{x\to 0}\frac{y}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$. Para $x\to\overline{0}$, $\lim=0$. Para $x\to\underline{0}$, $\lim=1$. Las tangentes son: $y=0$, $y=x$.

E 92- Obtener las tangentes en los puntos $(1,3)$ y $(5,3)$ de la curva $y-3=\frac{1}{4}|x^2-6x+5|$.

Solución: Son puntos angulosos, en los que las derivadas son: $y'=\pm\frac{1}{4}(2x-6)$. Luego: $y'(1,3)=\pm 1$, $y'(5,3)=\pm 1$. Las tangentes son, respectivamente: $y-3=\pm(x-1)$, $y-3=\pm(x-5)$.

E 93- Obtener las tangentes en los puntos de abscisas 0, π, 2π, ..., de la curva $5y-x-5|\sin x|=0$.

Solución: Son puntos angulosos. Las tangentes son: $y-\frac{k\pi}{5}=\left(\frac{1}{5}\pm 1\right)(x-k\pi)$.

E 94- Obtener la tangente en el punto $\left(3,\sqrt{3}\right)$ de la curva $x^4-4x^3+9y^2=0$.

Solución: Derivando: $4x^3-12x^2+18yy'=0$, $y'=\frac{12x^2-4x^3}{18y}$, $y'\left(3,\sqrt{3}\right)=0$. La tangente es: $y=\sqrt{3}$.

E 95- Dibujar la curva $(x^2-y^2)(x+2y)+x(x+y-1)=0$.

Solución: Desarrollada la ecuación, se tiene: $x^3-2y^3+2x^2y-xy^2+x^2+xy-x=0$. La determinatriz (I) del diagrama de Newton-Cramer (figura A), se refiere a asíntotas generales, que vienen dadas por: $x^3-2y^3+2x^2y-xy^2=(x+y)(x-y)(x+2y)=0$. Añadiendo la primera paralela, y operando, se tiene: $x+y=\frac{-1}{2x}$, luego la asíntota es: $x+y=0$, siendo $y_c-y_a=\frac{-1}{2x}$ (figura B). Procediendo análogamente con $(x-y)$, se tiene la asíntota: $x-y+\frac{1}{3}=0$, $y_c-y_a=\frac{-1}{6x}$ (figura C). Procediendo análogamente con $(x+2y)$, se tiene la asíntota: $\frac{x}{2}+y+\frac{1}{3}=0$, $y_c-y_a=\frac{2}{3x}$ (figura D). La determinatriz (II) da los puntos de intersección con el eje XX': $(0,0)$, $(0.62,0)$, $(-1.62,0)$. La determinatriz (III) corresponde a la

tangente en el origen $x = 0$. Añadiendo la primera paralela para obtener la posición de la curva respecto a ella, se tiene $x = -2y^3$ (figura E).

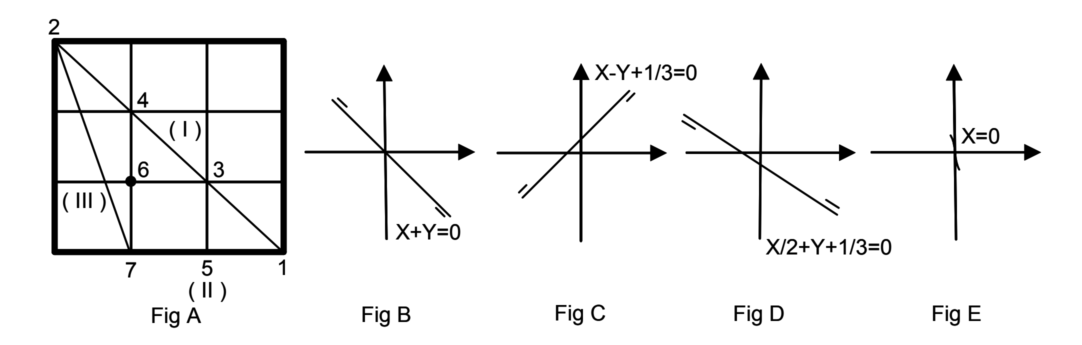
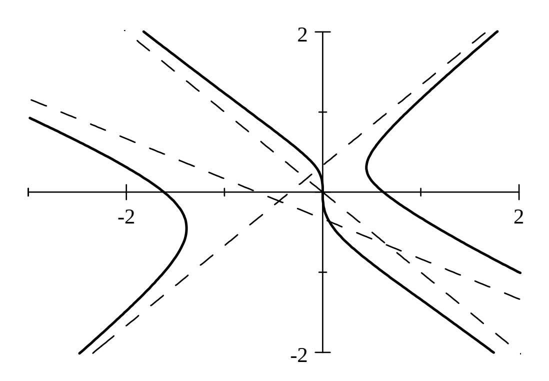


Fig A Fig B Fig C Fig D Fig E

El dibujo de la curva es el siguiente:



E 96- Dibujar la curva $3x^2y + 4xy^2 + 5x^2 - 4y^2 = 0$.

Solución: La determinatriz (I) del diagrama de Newton-Cramer (figura A) corresponde a la asíntota paralela al eje YY', definida por: $4xy^2 - 4y^2 = 0$, es decir, simplificando: $x = 1$. Añadiendo la primera paralela para estudiar la posición de la curva respecto a ella, se tiene $x_c - x_a = \frac{-3}{4y}$ (figura B). La determinatriz (II) corresponde a una asíntota general, obteniéndose: $y = \frac{-3x}{4}$. Añadiendo la primera paralela y operando, se tiene la ecuación de la asíntota: $y = \frac{-3x}{4} + \frac{11}{12}$. Añadiendo la segunda paralela y operando, se tiene la posición de la curva $y_c - y_a = \frac{319}{108x}$ (figura C). La determinatriz (III) corresponde a la asíntota paralela al eje XX', definida por: $3x^2y + 5x^2 = 0$, es decir: $y + \frac{5}{3} = 0$. Añadiendo la primera paralela, se tiene la posición de la curva $y_c - y_a = \frac{-100}{27x}$ (figura D). La determinatriz (IV) se refiere a las tangentes en el origen, que es punto doble, teniéndose: $y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$. Añadiendo la primera paralela, se tiene la posición de la curva respecto a: $y - \frac{\sqrt{5}}{2}x = 0$, haciendo $y = \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \theta\right)x$, se obtiene: $x = \frac{8\sqrt{5}\,\theta}{10 + 3\sqrt{5}}$ (figura E). Análogamente, para la tangente $y + \frac{\sqrt{5}}{2}x = 0$, se obtiene: $x = \frac{-8\sqrt{5}\,\theta}{10 - 3\sqrt{5}}$ (figura F).

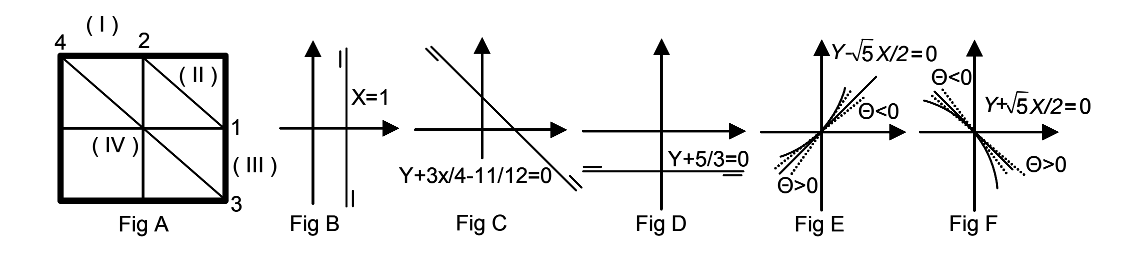
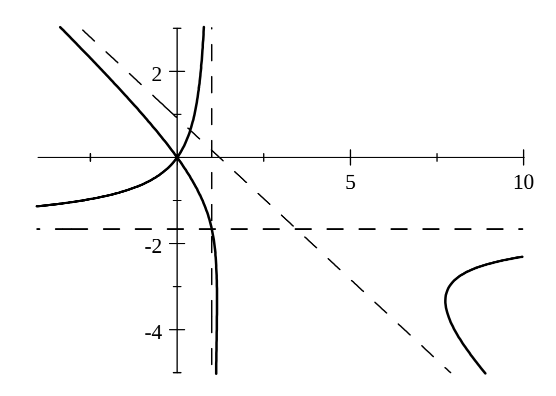


Fig A Fig B Fig C Fig D Fig E Fig F

El dibujo de la curva es el siguiente:



E 97- Dibujar la curva $xy^2 = ax^2 + by^2$, y discutirla según los valores de a y b.

Solución: La curva es simétrica respecto al eje XX'. La determinatriz (I) del diagrama de Newton-Cramer (figura A), corresponde a la asíntota paralela al eje YY', definida por $x = b$. Sumando el tercer monomio, se determina la posición de la curva respecto a ella, según $x_c - x_a = \frac{ab^2}{y^2}$. La determinatriz (II) corresponde a la rama parabólica según el eje XX', $y^2 = ax$. La determinatriz (III) corresponde a las tangentes en el origen: $y = \pm\sqrt{\frac{-a}{b}}\,x$. Cortando por $y = \left(\pm\sqrt{\frac{-a}{b}} + \theta\right)x$, se tiene la posición de la curva respecto a dichas tangentes.

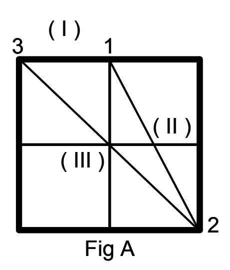


Fig A

Discutiendo los elementos hallados, según los valores de a y b, se tienen los siguientes casos:

a) $a = 0$, $b \neq 0$: La curva se reduce a las rectas: $y = 0$, $x = b$.

b) $a \neq 0$, $b = 0$: La curva se reduce a la recta: $x = 0$, y a la parábola: $y^2 = ax$, en la que si $a > 0$, $x > 0$, si $a < 0$, $x < 0$.

c) $a = b = 0$: La curva se reduce a los dos ejes coordenados.

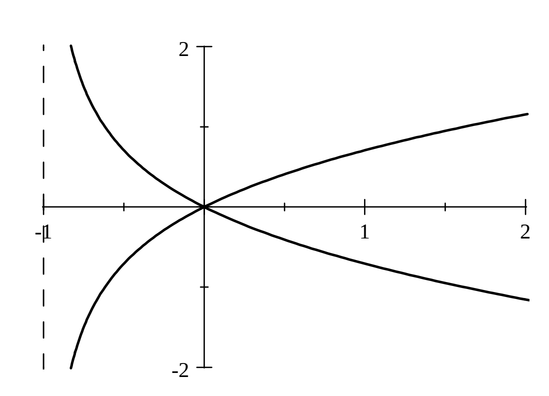
d) $a = \pm\infty$, $b \neq \infty$: La curva se reduce al eje YY'.

e) $a \neq \infty$, $b = \pm\infty$: La curva se reduce al eje XX'.

f) $a = b = \pm\infty$: La curva se reduce al punto $(0,0)$.

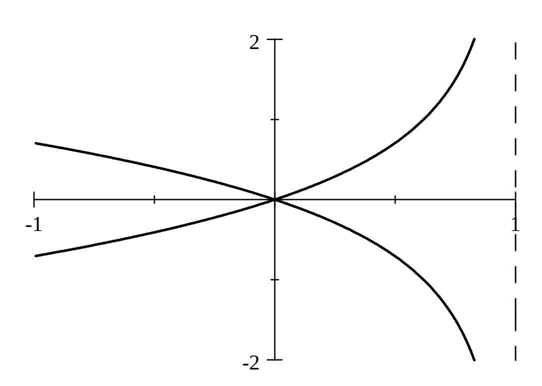
g) $a = \pm\infty$, $b = \mp\infty$: La curva se reduce al conjunto de las dos bisectrices: $(x+y)(x-y) = 0$.

h) $a > 0$, $b < 0$: Asíntota: $x = -|b|$; rama parabólica: $y^2 = ax$, siendo $x \geq 0$; tangentes en el origen: $y = \pm\sqrt{\frac{a}{-b}}\,x$.

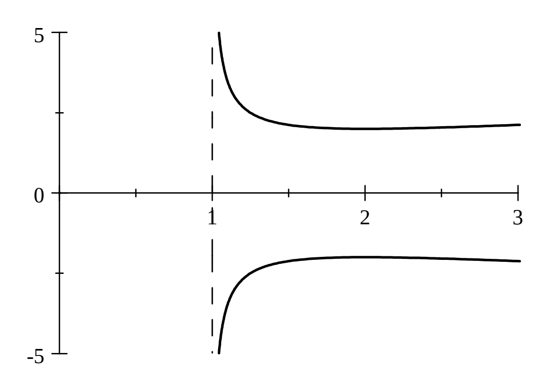


i) $a < 0$, $b > 0$: Asíntota: $x = b$; rama parabólica: $y^2 = ax$, siendo $x \leq 0$; tangentes en el origen:

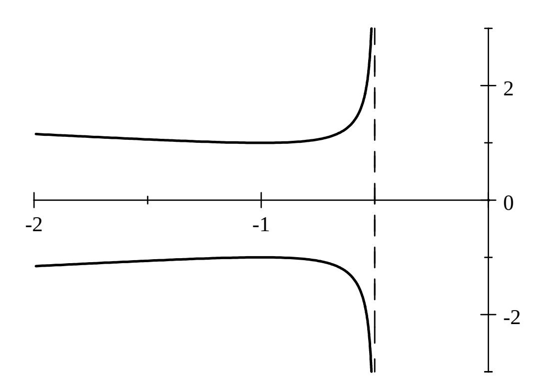
$$y = \pm\sqrt{\frac{-a}{b}}\,x . xy^2 + x^2 - y^2 = 0$$



j) $a > 0$, $b > 0$: Asíntota: $x = b$; rama parabólica: $y^2 = ax$, siendo $x > 0$; no hay tangentes reales en el origen, que es un punto aislado.

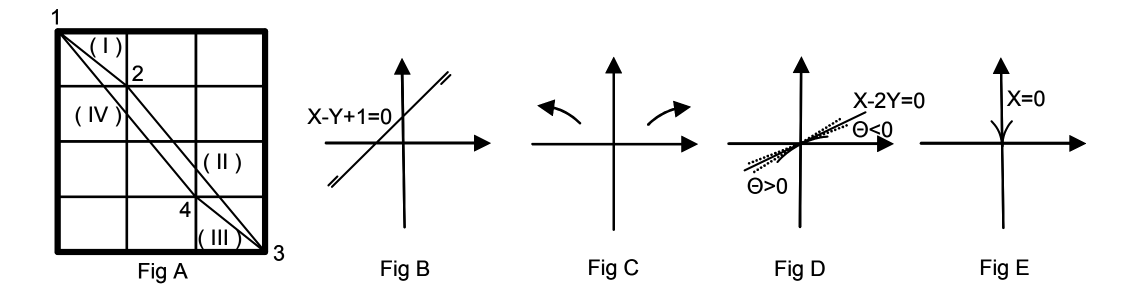


k) $a < 0$, $b < 0$: Asíntota: $x = -|b|$; rama parabólica: $y^2 = ax$, siendo $x < 0$; no hay tangentes en el origen, que es un punto aislado.

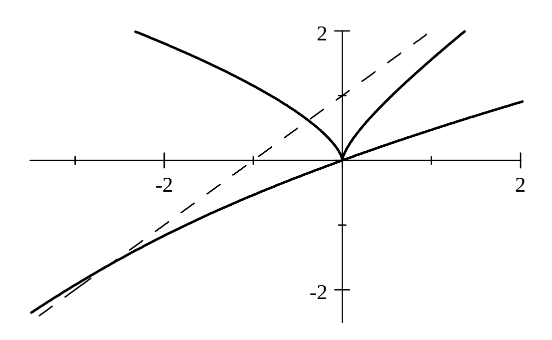


E 98- Dibujar la curva $y^4 - xy^3 + x^3 - 2x^2y = 0$.

Solución: La determinatriz (I) del diagrama de Newton-Cramer (figura A), corresponde a la asíntota general definida por ella, $(y-x)y^3$, y por la primera paralela, es decir: $y - x = \dfrac{2x^2y - x^3}{y^3}$. Haciendo la sustitución $y = x$, se tiene la ecuación de la asíntota: $y - x = \dfrac{2x^3 - x^3}{x^3} = 1$, es decir: $y = x + 1$. Haciendo la sustitución $y = x + 1$, se tiene: $y = x + \dfrac{2x^2(x+1)}{(x+1)^3} = x + 1 - \dfrac{1}{x} + \ldots$, luego $y_c - y_a = \dfrac{-1}{x}$ (figura B). La determinatriz (II) se refiere a la rama parabólica según el eje XX': $y^3 + x^2 = 0$ (figura C). La determinatriz (III) se refiere a la tangente en el origen: $x - 2y = 0$. Añadiendo la primera paralela y haciendo $y = \left(\dfrac{1}{2} + \theta\right)x$, con $\theta \to 0$, se tiene $x = -32\theta$ (figura D). La determinatriz (IV) se refiere a la tangente en el origen: $x = 0$. Haciendo $x = \theta$, con $\theta \to 0$, se tiene $y = \sqrt[3]{2\theta^2}$ (figura E).

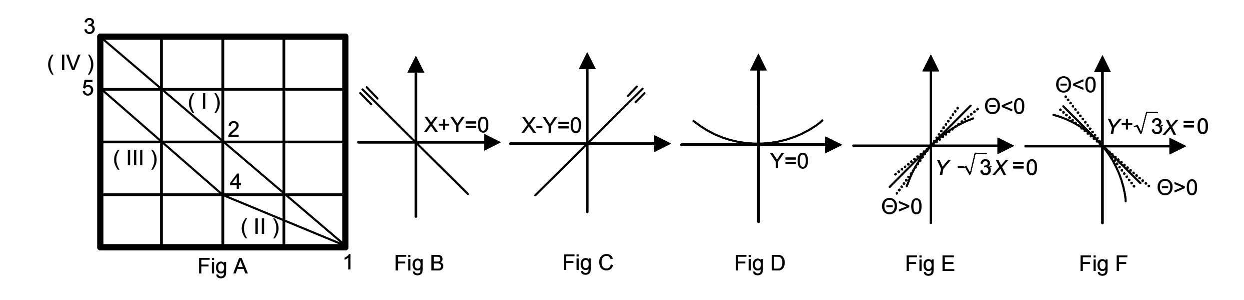


El dibujo de la curva es el siguiente:

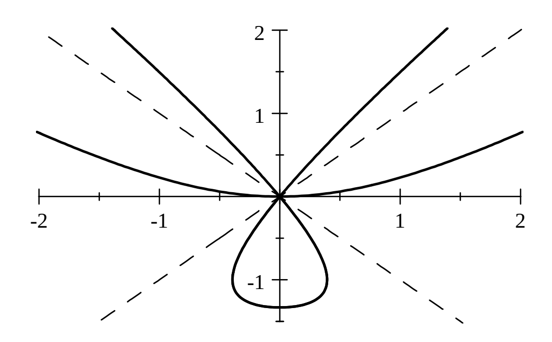


E 99- Dibujar la curva $3x^4 - 6x^2y^2 + 3y^4 - 12ax^2y + 4ay^3 = 0$.

Solución: La curva es simétrica respecto al eje YY'. Para $a = 0$, la curva se reduce al conjunto de las dos bisectrices: $x^2 - y^2 = 0$. Para $a = \infty$, la curva se reduce a las tres rectas: $y(y^2 - 3x^2) = 0$. Para un determinado valor de $|a|$, las curvas con $+a$ y $-a$, son simétricas respecto al eje XX'. Por tanto, en lo siguiente, solo se estudia la curva con $a > 0$. La directriz (I) del diagrama de Newton-Cramer (figura A), corresponde a las asíntotas generales: $(x+y)(x-y) = 0$. Añadiendo la primera paralela (los restantes monomios), se tiene: $x + y = \sqrt{\frac{-2ax}{3}}$ (figura B), $x - y = \sqrt{\frac{2ax}{3}}$ (figura C). La determinatriz (II) se refiere a la tangente en el origen: $y = 0$, teniéndose, para la posición de la curva, $y = \frac{x^2}{4a}$ (figura D). La determinatriz (III) corresponde a las tangentes en el origen: $y = \pm\sqrt{3}\,x$. Para obtener la posición de la curva respecto a la tangente $y = \sqrt{3}\,x$, se hace $y = \left(\sqrt{3} + \theta\right)x$, obteniéndose $x = -4a\theta$ (figura E). Análogamente, para la tangente $y = -\sqrt{3}\,x$, se obtiene la posición simétrica respecto a YY' (figura F).



El dibujo de la curva es el siguiente:

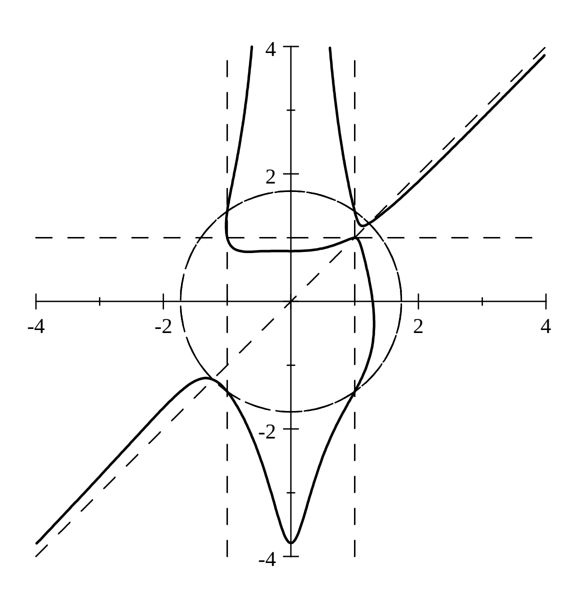


E 100- Se considera la curva $x^3 = 3ay^2$. Desde un punto $P(\alpha,\beta)$ se le pueden trazar tres tangentes. Hallar el lugar geométrico de P para que el centro del círculo que pasa por los tres puntos de contacto, se encuentre sobre la citada cúbica.

Solución: Las ecuaciones paramétricas de la cúbica, son: $x = 3at^2$, $y = 3at^3$. La ecuación que proporciona los valores de t en los puntos de contacto de las tangentes trazadas desde $P(\alpha,\beta)$, es: $\beta - 3at^3 = \frac{9at^2}{6at}(\alpha - 3at^2)$, es decir, simplificando: $3at^3 - 3\alpha t + 2\beta = 0$ (**I**). Sea la ecuación de la circunferencia: $x^2 + y^2 - 2Ax - 2By + C = 0$. Su intersección con la cúbica viene dada por: $9a^2t^4 + 9a^2t^6 - 6aAt^2 - 6aBt^3 + C = 0$ (**II**). Tres de las raíces de esta ecuación han de ser las de (**I**). Por tanto, obligando a que (**II**) sea divisible por (**I**), se tienen las condiciones: $A = \frac{3\alpha(a+\alpha)}{2a}$, $B = \frac{-\beta(a+2\alpha)}{\alpha}$, $C = \frac{4\beta^2(a+\alpha)}{\alpha}$. Como el centro del círculo es (A,B), obligando a que esté en la cúbica: $\left(\frac{3\alpha(a+\alpha)}{2a}\right)^3 = 3a\left(\frac{-\beta(a+2\alpha)}{\alpha}\right)^2$, de donde: $y^2 = \frac{9x^5(a+x)^3}{8a^4(a+2x)^2}$.

E 101- Dibujar la curva $(x^2-1)(x^3-y^3) = (y-1)(x^2+y^2-3)$.

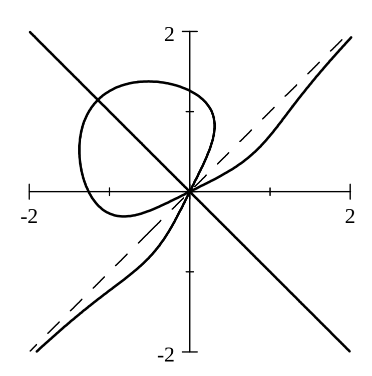
Solución: Para dibujarla se utiliza el método de las regiones, definidas por: $x+1 = 0$, $x-1 = 0$, $x-y = 0$, $x^2+xy+y^2 = 0$, $y-1 = 0$, $x^2+y^2 = 3$. La curva tiene las asíntotas: $x = y$, $x = 0$ (con $x_c - x_a = \frac{1}{\sqrt{y}}$). Las intersecciones con XX', vienen dadas por: $x^5 - x^3 + x^2 - 3 = 0$, y con YY', por: $y^2 + 3y - 3 = 0$. El dibujo de la curva es el siguiente:



E 102- Dibujar la curva $(y-2x)^2(y+x) + (y-2x)(y+x)^2 + x^6 - y^6 = 0$.

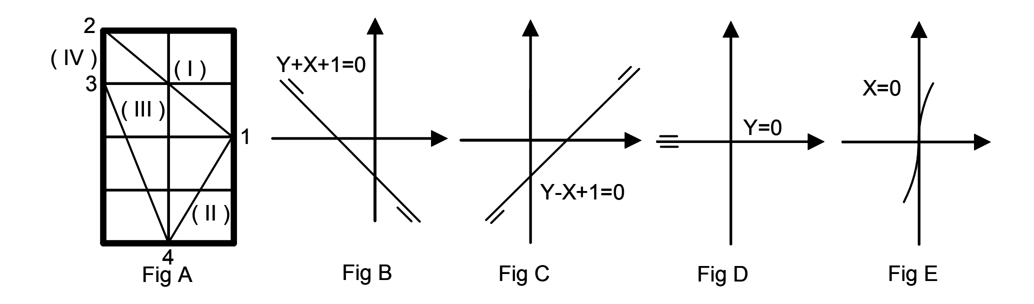
Solución: La curva es simétrica respecto a la segunda bisectriz, a la que corta en $(0,0)$ y $\left(-\sqrt[3]{\frac{3}{2}}, \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right)$. La recta $y+x = 0$ forma parte de la curva, teniéndose que la ecuación dada es igual a: $(y+x)[(y-2x)(2y-x) + (x^3-y^3)(x^2-xy+y^2)] = (y+x)f(x,y) = 0$. Por tanto, se trata de estudiar la curva $f(x,y) = (y-2x)(2y-x) - (y-x)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2) = 0$. De donde se obtiene que: $y = x + \frac{(y-2x)(2y-x)}{(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)}$. Esta curva tiene como asíntota a: $y = x$, estando dada la posición de la curva por $y_c - y_a = \frac{(y-2x)(2y-x)}{(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)}$; para $y = x$, $y_c - y_a = \frac{-1}{3x^2}$, luego $y_a > y_c$. La curva corta a esta asíntota en $(0,0)$. Los términos (x^2+xy+y^2), (x^2-xy+y^2) correspondientes a rectas imaginarias, indican que la curva tiene un bucle cerrado. Las tangentes en el origen, son: $y-2x = 0$, $2y-x = 0$. Para la tangente $y-2x = 0$, $y_c - y_t = \frac{(y-x)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)}{2y-x}$, que para $y = 2x$, $y_c - y_t = 7x^4$, por tanto $y_c > y_t$. Procediendo análogamernte con la tangente $2y-x = 0$, se tiene que: $y_c - y_t = \frac{(y-x)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)}{2(y-2x)}$, que para $y = \frac{x}{2}$, $y_c - y_t = \frac{7x^4}{32}$, por tanto $y_c > y_t$. El

dibujo de la curva es el siguiente:

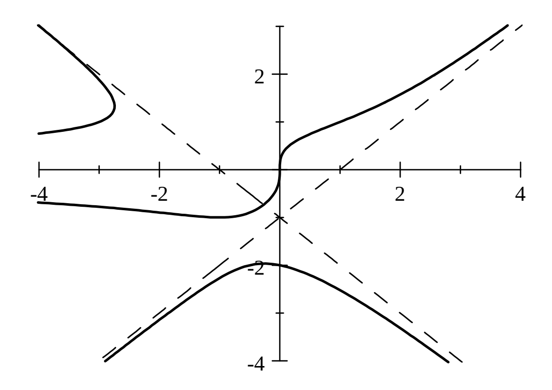


E 103- Dibujar la curva $y^2(x^2-y^2)-2y^3+2x=0$.

Solución: La determinatriz (I) del diagrama de Newton-Cramer (figura A) corresponde a las asíntotas generales definidas por: $y^2(x^2-y^2)$, añadiendo la primera paralela (monomio 3) se tiene: $x+y=\frac{2y}{x-y}=\frac{-2x}{2x}=-1$, siendo la asíntota: $y+x+1=0$. Para hallar la posición de la curva respecto a ella, se añade la siguiente paralela (monomio 4), y operando, se tiene $y_c-y_a=\frac{-1}{x^2}$ (figura B). Esta asíntota corta a la curva en los puntos $(-3.73, 2.73)$ y $(-0.27, -0.73)$. Con relación a la asíntota $y-x+1=0$, se tiene $y_c-y_a=\frac{-1}{x^2}$ (figura C). La determinatriz (II) se refiere a la asíntota: $y=0$, estando dada la posición de la curva, por $y^2=\frac{-2}{x}$ (figura D). La determinatriz (III) se refiere a la tangente en el origen: $x=0$, viniendo dada la posición de la curva, por $x=y^3$ (figura E). La determinatriz (IV) se refiere a las intersecciones con el eje YY', que vienen dadas por: $y^3(y+2)=0$.

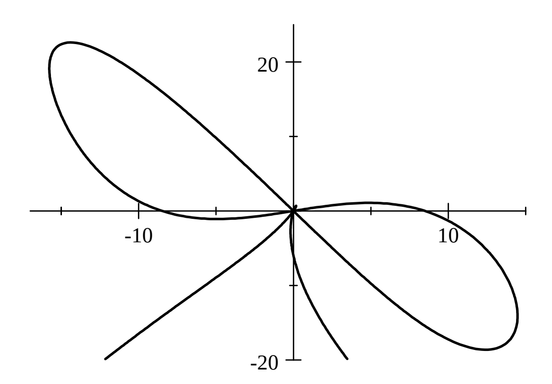


El dibujo de la curva es el siguiente:

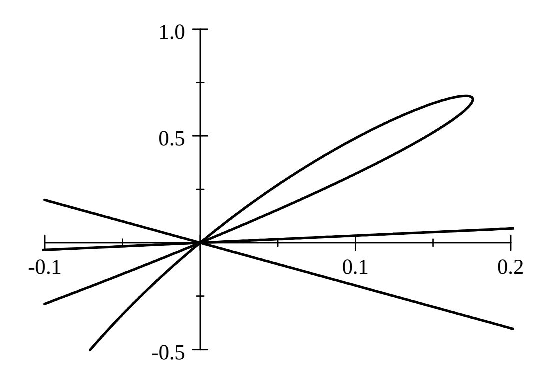


E 104- Dibujar la curva $x^6+y^4(y+2x)+(3y-x)(y+2x)(2y-6x)(y-6x)=0$.

Solución: Los términos de mayor grado indican una rama parabólica, definida por: $x^6+y^5=0$, es decir, según el eje OY'. Las tangentes en el origen corresponden a los términos de menor grado, es decir: $3y-x=0$, $y+2x=0$, $y-3x=0$, $y-6x=0$. La curva, además de pasar por el origen, corta al eje XX' en $\left(\pm 6\sqrt{2}, 0\right)$, y al eje YY' en $(0, -6)$. El dibujo de la curva es el siguiente:

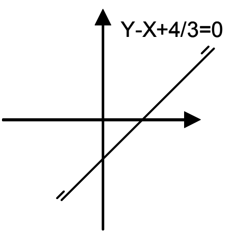


En el siguiente dibujo se representa un detalle del entorno del origen de coordenadas, en el que aparece un lazo en el primer cuadrante, que en el dibujo anterior prácticamente no se aprecia:

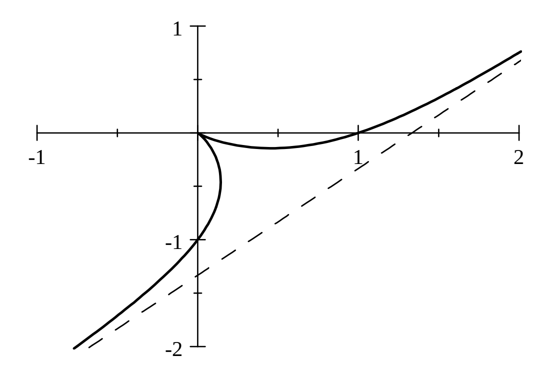


E 105- Estudiar la asíntota general de la curva $y^3 - x^3 + (x+y)^2 = 0$.

Solución: De los términos de mayor grado, se deduce: $y - x = \dfrac{-(x+y)^2}{x^2+xy+y^2} = \dfrac{-4x^2}{3x^2} = \dfrac{-4}{3}$. Luego la ecuación de la asíntota general es: $y - x + \dfrac{4}{3} = 0$. Sustituyendo $y = x - \dfrac{4}{3}$ en la ecuación dada, se tiene: $y - x = \dfrac{-4x^2 + \frac{16x}{3} - \frac{16}{9}}{3x^2 - 4x + \frac{16}{9}} = \dfrac{-4}{3} + \dfrac{16}{81x^2} + \ldots$, de donde la posición de la curva respecto a la asíntota, viene dada por $y_c - y_a = \dfrac{16}{81x^2}$, es decir, siempre $y_c > y_a$.

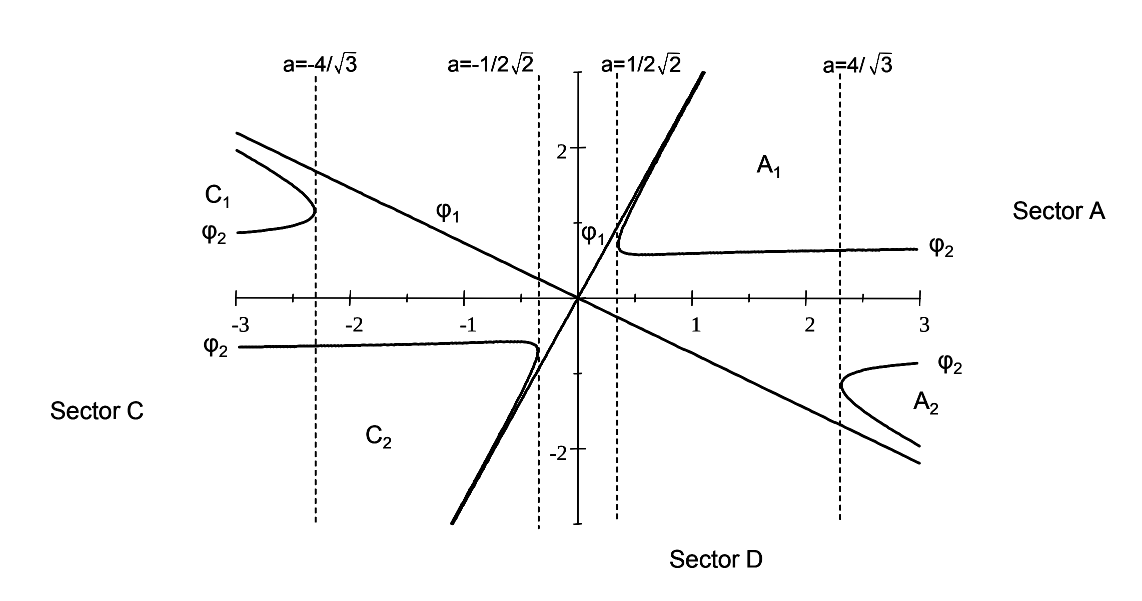


El dibujo de la curva es el siguiente:

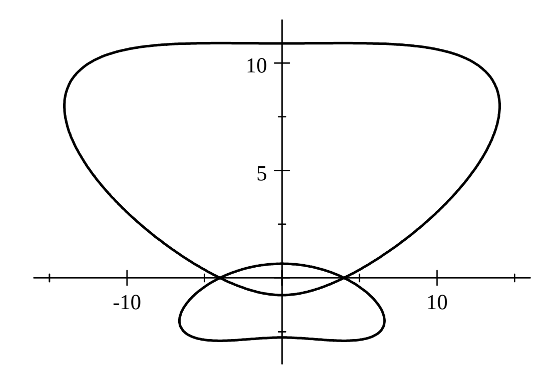


E 106- Dibujar la curva $16(y^4 - 2ay^3 - 2a^2y^2) + (x^2 - 4a)^2 = 0$.

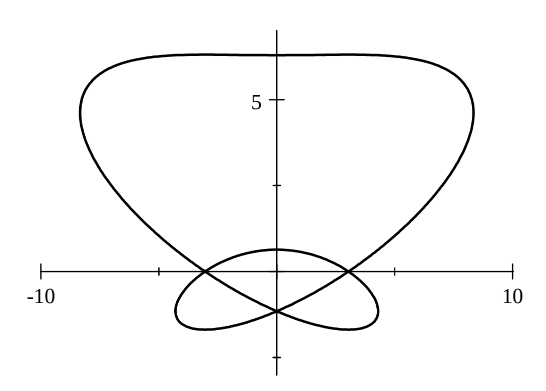
Solución: 1º) La curva es simétrica respecto al eje YY'. 2º) Para $a = 0$, la curva se reduce al origen de coordenadas. 3º) Para $a = \infty$, la curva se reduce a dos rectas: $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. 4º) Los términos de mayor grado son: $16y^4 + x^4$, lo que indica que la curva es cerrada. 5º) Para determinar las regiones del plano en las que existe curva, como $x = \pm\sqrt{4a \pm 4y\sqrt{2a^2 + 2ay - y^2}}$, han de cumplirse las siguientes dos condiciones: $\varphi_1 = 2a^2 + 2ay - y^2 \geq 0$, $\varphi_2 = 4a \pm 4y\sqrt{2a^2 + 2ay - y^2} \geq 0$. En el esquema siguiente se han representado φ_1 y φ_2, situándose la variable a en el eje de abscisas. Las dos rectas que configuran φ_1, se cortan en el origen, definiendo cuatro sectores: A, B, C, D. En los sectores A y C existe curva, no habiéndola en los sectores B y D. En el sector A hay dos ramas de φ_2, que delimitan en su interior los subsectores A_1 y A_2. En el sector C hay otras dos ramas de φ_2, que delimitan en su interior los subsectores C_1 y C_2. Para $a > 0$, para cada valor de a hay cuatro valores de x dentro del sector A, salvo en los subsectores A_1 y A_2, donde solo hay dos valores de x. Para $a < 0$, en el sector C, para cada valor de a solo hay dos valores de x dentro de los subsectores C_1 y C_2, no existiendo curva en el resto del sector C. Las rectas: $x = \frac{-4}{\sqrt{3}}$, $x = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$, $x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $x = \frac{4}{\sqrt{3}}$, definen los puntos extremos de las ramas de φ_2. Según lo expuesto, no hay curva para $\frac{-1}{2\sqrt{2}} < a < 0$. Para $a = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$, la curva se reduce al punto doble $\left(0, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$.



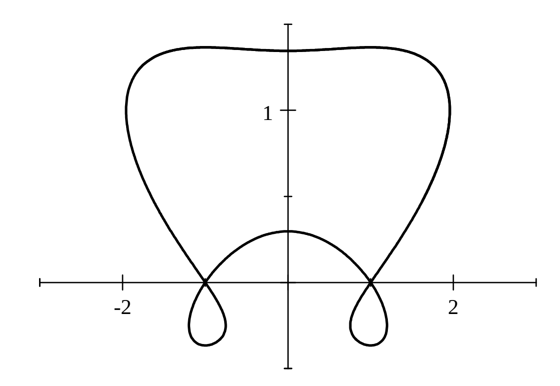
6º) La curva corta al eje XX' en $(\pm 2\sqrt{a}, 0)$, luego si $a > 0$ lo corta en dos puntos, si $a < 0$ no lo corta. Corta al eje YY', en los puntos cuyas ordenadas son las raíces de: $y^4 - 2ay^3 - 2a^2y^2 + a^2 = 0$, es decir de $\varphi_2 = 0$. Por tanto, para $a < \frac{-4}{\sqrt{3}}$, la curva corta al eje YY' en cuatro puntos. Para $\frac{-4}{\sqrt{3}} < a < \frac{-1}{2\sqrt{2}}$, lo corta en dos puntos. Para $\frac{-1}{2\sqrt{2}} < a < \frac{1}{2\sqrt{2}}$, no lo corta. Para $\frac{1}{2\sqrt{2}} < a < \frac{4}{\sqrt{3}}$, lo corta en dos puntos. Y para $a > \frac{4}{\sqrt{3}}$, lo corta en cuatro puntos. 7º) Para hallar los máximos y mínimos de la curva, se obtiene la derivada $y' = \frac{-4x(x^2 - 4a)}{32y(2y^2 - 3ay - 2a^2)}$. Igualándola a cero, se tienen los valores de $x = 0$, y $x = \pm 2\sqrt{a}$. Estos dos últimos valores coinciden con las abscisas de los puntos de corte con el eje XX'. Como para $y' = 0$, se tiene que $y'' = \frac{-3x^2 + 4}{8y(2y^2 - 3ay - 2a^2)}$, ninguno de los tres valores anteriores, obtenidos para x, anula a y'', por lo que representan abscisas de máximos o mínimos. 8º) A continuación se dibuja la curva para los siguientes valores de a: 4, $\frac{4}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\frac{1}{5}$, -1, -3.



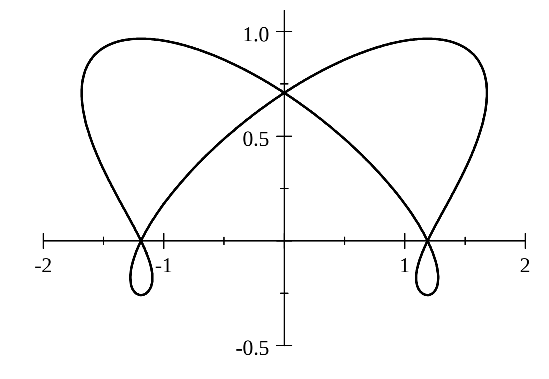
$a = 4$



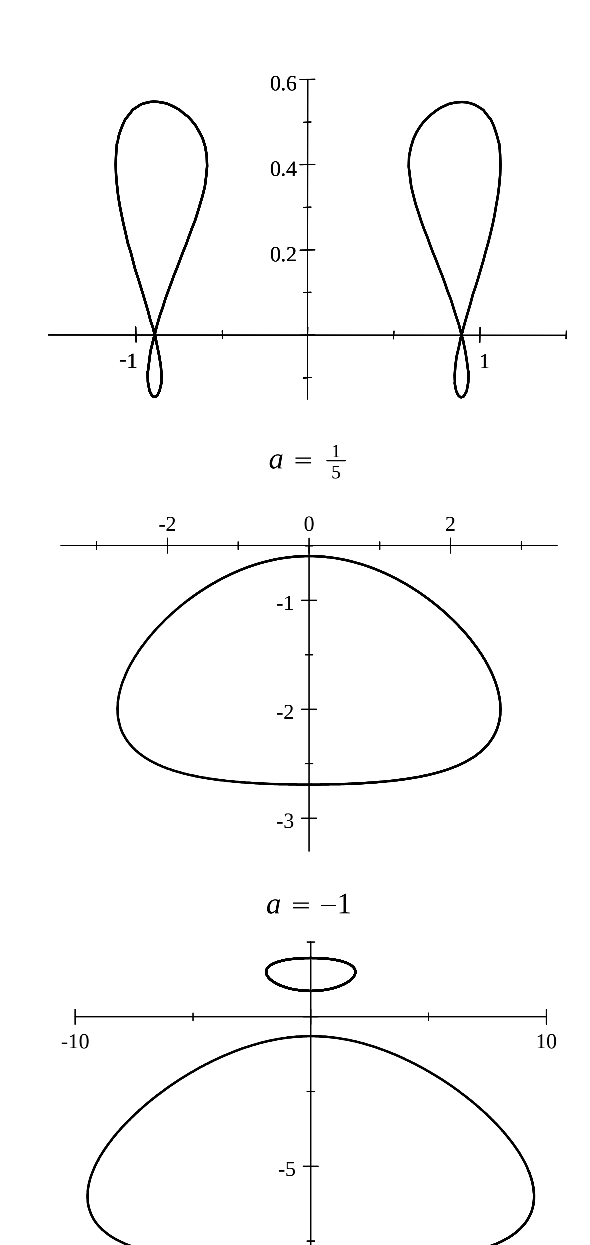
$a = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$



$a = 1/2$



$a = \frac{\sqrt{2}}{4}$



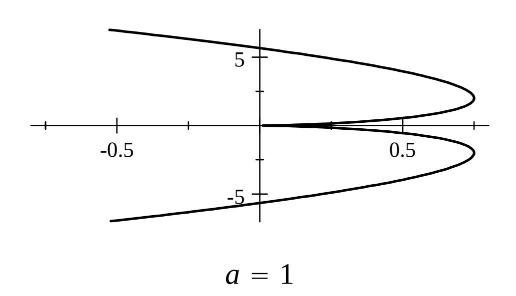
$a = \frac{1}{5}$

$a = -1$

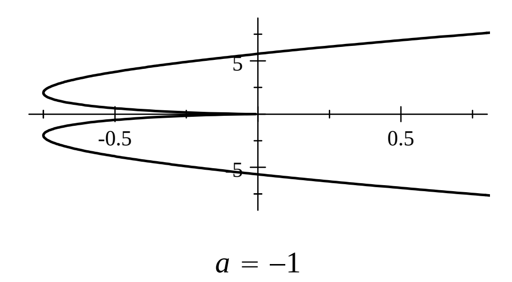
$a = -3$

E 107- Dibujar la curva $\dfrac{y^4}{16} + 2a(x-a)y^2 + \dfrac{64ax^3}{27} = 0.$

Solución: La curva es simétrica respecto al eje XX'. Para $a = 0$, y para $a = \infty$, la curva queda reducida al eje XX'. La curva tiene una rama parabólica según el eje XX', de acuerdo con: $\dfrac{y^4}{16} + \dfrac{64ax^3}{27} = 0$. En el origen tiene un punto de retroceso cuya tangente es $y = 0$. Corta al eje XX' en $(0,0)$, y al eje YY', además, en $\left(0, \pm 4\sqrt{2}\,a\right)$. Para $a > 0$, la curva es real para $x \leq \dfrac{3a}{4}$, siendo la recta $x = \dfrac{3a}{4}$, tangente en $\left(\dfrac{3a}{4}, \pm 2a\right)$. Para $a < 0$, la curva es real para $x \geq \dfrac{-3a}{4}$, siendo la recta $x = \dfrac{-3a}{4}$, tangente en $\left(\dfrac{-3a}{4}, \pm 2a\right)$. A continuación se dibuja la curva para $a = \pm 1$.



$a = 1$



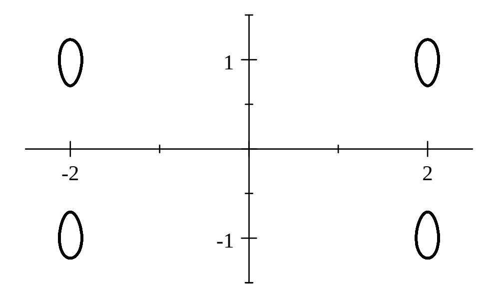
$a = -1$

E 108- Estudiar el haz $(x^2-4)^2+(y^2-1)^2 = a^4$, cuando a varía de 0 a ∞.

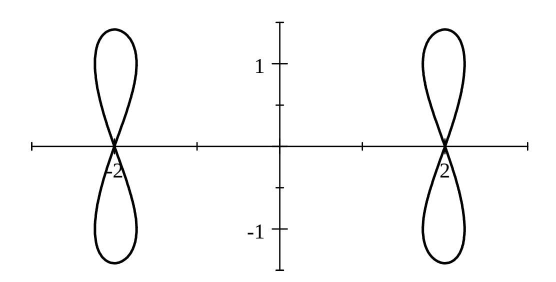
Solución: Haciendo $x^2 = X$, $y^2 = Y$, se tiene la circunferencia: $(X-4)^2+(Y-1)^2 = a^4$. Todo punto de esta circunferencia, situado en el primer cuadrante, da lugar a cuatro puntos de la curva dada, correspondientes a las raíces cuadradas de su abscisa y su ordenada: si el punto de la circunferencia es (λ^2,μ^2), los de la curva son $(+\lambda,+\mu)$, $(-\lambda,+\mu)$, $(-\lambda,-\mu)$, $(\lambda,-\mu)$. La curva es simétrica respecto a los dos ejes y al origen. Las intersecciones con los ejes corresponden a los puntos $\left(\pm\sqrt{4\pm\sqrt{a^4-1}}\,,0\right)$ y $\left(0,\pm\sqrt{1\pm\sqrt{a^4-16}}\right)$.

Para $a^2 = 0$, la curva se reduce a cuatro puntos, uno en cada cuadrante: $(2,1)$, $(-2,1)$, $(-2,-1)$, $(2,-1)$.

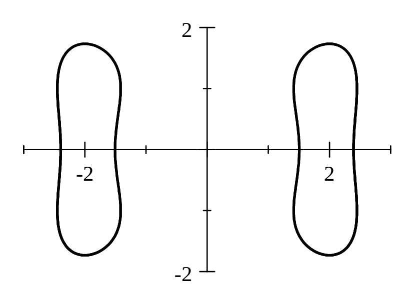
Para $0 < a^2 < 1$, la curva está formada por cuatro óvalos, uno en cada cuadrante, que no cortan a los ejes. La curva se ha dibujado para $a^2 = 0.5$.



Para $a^2 = 1$, los óvalos del 1º y 4º cuadrante, y los del 2º y 3º, tienen, cada pareja, un punto común sobre el eje XX', cuyas coordenadas son $(\pm 2,0)$.

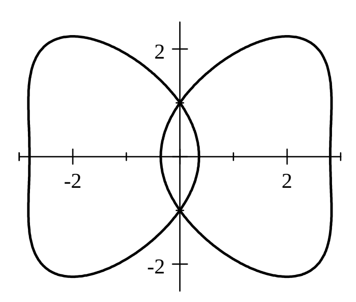


Para $1 < a^2 < 4$, la curva consta de dos óvalos, uno en los cuadrantes 1º y 4º, y otro en los otros dos cuadrantes. La curva se ha dibujado para $a^2 = 2$.

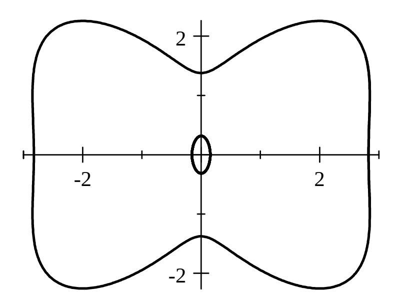


Para $a^2 = 4$, los dos óvalos del caso anterior, tienen dos puntos comunes situados sobre el eje YY',

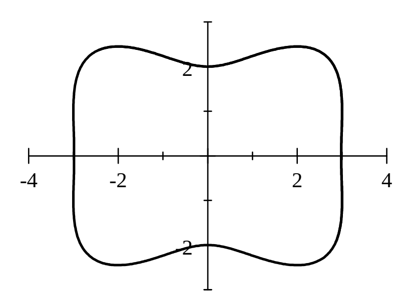
simétricos respecto al origen, cuyas coordenadas son $(0,\pm 1)$; las coordenadas de los puntos en que los dos óvalos cortan al eje XX', son $\left(\pm\sqrt{4\pm\sqrt{15}}\,,0\right)$.



Para $4 < a^2 < \sqrt{17}$, los dos óvalos anteriores, se funden formando un rectángulo ondulado; además la curva consta de un óvalo central originado por el arco de la circunferencia, indicada al principio, situado en el primer cuadrante entre el origen y el centro de la circunferencia. La curva se ha dibujado para $a^2 = 4.1$.



Para $a^2 = \sqrt{17}$, la curva consta del rectángulo ondulado más el origen, punto aislado, al que ha quedado reducido el óvalo central.
Para $a^2 > \sqrt{17}$, la curva está formada por el rectángulo ondulado. Se ha dibujado la curva para $a^2 = 5$.



E 109- Hallar la curva que, designando por A y B los puntos de intersección de la tangente en un punto M, con los ejes coordenados, la recta MC que une el punto M con el cuarto vértice del paralelogramo construido sobre OA y OB, pasa por un punto fijo $P(2\alpha,2\beta)$.

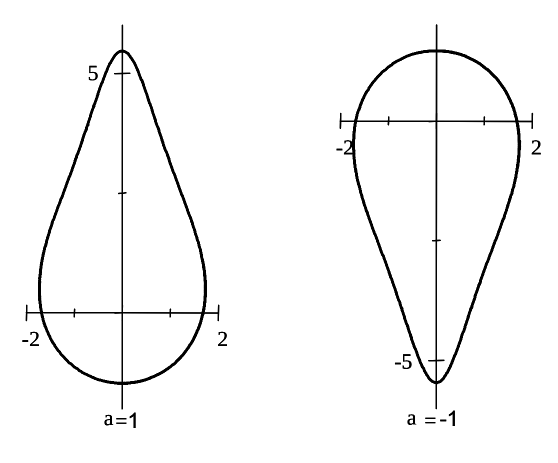
Solución: Sea la tangente: $Y-y = m(X-x)$. Luego $A\left(x-\frac{y}{m},0\right)$, $B(0,y-mx)$, $C\left(x-\frac{y}{m},y-mx\right)$, $MC \equiv \frac{X-x}{\frac{-y}{m}} = \frac{Y-y}{-mx}$. Por pasar por P, se tiene: $\frac{m(2\alpha-x)}{-y} = \frac{2\beta-y}{-mx}$. Como $m = \frac{dy}{dx}$, se tiene que: $\frac{dx}{\sqrt{x(2\alpha-x)}} = \frac{dy}{\sqrt{y(2\beta-y)}}$. Integrando: $\arcsin\left(\frac{x-\alpha}{\alpha}\right)-\arcsin\left(\frac{y-\beta}{\beta}\right) = C$. De donde se deduce que: $\frac{x-\alpha}{\alpha}\sqrt{1-\left(\frac{y-\beta}{\beta}\right)^2}-\frac{y-\beta}{\beta}\sqrt{1-\left(\frac{x-\alpha}{\alpha}\right)^2} = \sin C = K$. Haciendo $X = \frac{x-\alpha}{\alpha}$, $Y = \frac{y-\beta}{\beta}$, se tiene: $X\sqrt{1-Y^2}-Y\sqrt{1-X^2} = K$. Operando, se tiene la ecuación de la curva pedida: $[X^2(1-Y^2)-Y^2(1-X^2)]^2-2K^2X^2(1-Y^2)-2K^2Y^2(1-X^2)+K^4 = 0$.

E 110- Obtener la curva que describen los puntos (α,β), sabiendo que las raíces de la ecuación $z^4+\alpha z^3+\beta z^2+(\alpha+1)z+\beta+2=0$, cumplen la condición $(z_1z_2z_3z_4)=-1$.

Solución: Aplicando Cardano, se tienen las siguientes ecuaciones: $z_1+z_2+z_3+z_4=-\alpha$, $z_1z_2+z_1z_3+z_1z_4+z_2z_3+z_2z_4+z_3z_4=\beta$, $z_1z_2z_3+z_1z_2z_4+z_1z_3z_4+z_2z_3z_4=-\alpha-1$, $z_1z_2z_3z_4=\beta+2$. Desarrollando la condición dada, se tiene que: $2(z_1z_2+z_3z_4)=(z_1+z_2)(z_3+z_4)$. Sustituyendo y operando, se obtiene: $(\alpha\beta-6\alpha-6)^2=(\beta^2-36\beta-72)\left(\alpha^2-\frac{8\beta}{3}\right)$. Por tanto, la ecuación de la curva pedida, es: $2\beta^3+18\alpha^2\beta+81\alpha^2-72\beta^2-9\alpha\beta+54\alpha-144\beta+27=0$.

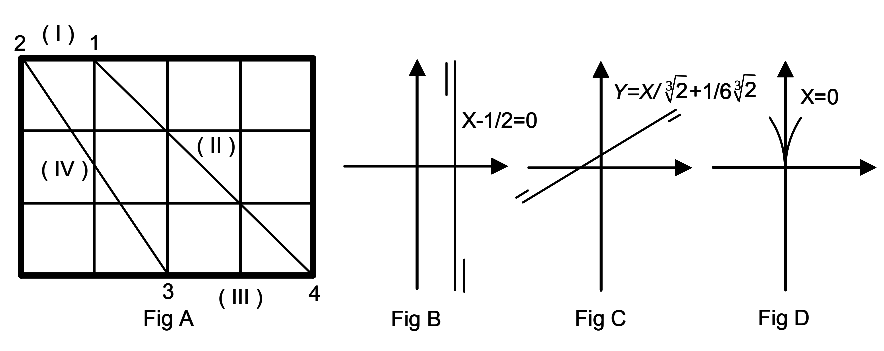
E 111- Dibujar la curva $(a^2+x^2)y^2-4a^3y+x^4=8a^4$.

Solución: La curva es simétrica respecto al eje YY'. Carece de asíntotas, es cerrada. Corta a los ejes en $\left(\pm2\sqrt{2}\,a,0\right)$, $\left[0,2\left(1\pm\sqrt{3}\right)a\right]$, siendo los puntos de corte con YY', máximo y mínimo de la curva. Para $a=0$, la curva degenera en el eje YY' y el origen. Para $a=\infty$, la curva degenera en la recta impropia. El dibujo de la curva para $a=\pm1$, es el siguiente:

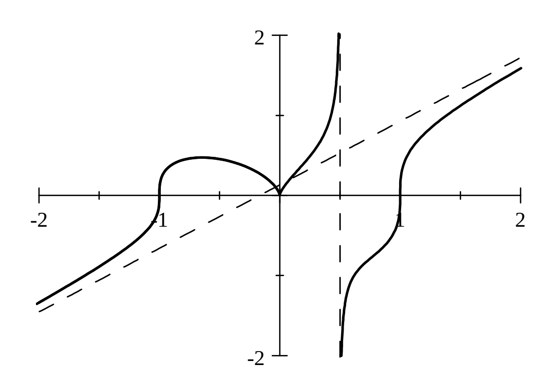


E 112- Dada la curva $2xy^3-y^3+x^2-x^4=0$, hallar: 1º) Tangente en el origen y posición de la curva respecto a ella. 2º) Asíntotas y posición de la curva. 3º) Puntos dobles. 4º) Dibujo de la curva.

Solución: 1º) La determinatriz (IV) del diagrama de Newton-Cramer (figura A) corresponde a la tangente en el origen: $x=0$. La posición de la curva viene dada por: $x^2=y^3$ (figura D). 2º) La determinatriz (I) corresponde a la asíntota paralela al eje YY': $x=\frac{1}{2}$. Añadiendo la paralela y operando, se tiene $x_c-x_a=\frac{-1}{32y^3}$ (figura B). La determinatriz (II) corresponde a la asíntota general. Añadiendo la primera paralela (monomio 2), se tiene, operando: $y^3=\frac{x^4-x^2}{2x-1}=\frac{x^3}{2}+\frac{x^2}{4}-\frac{3x}{8}+\ldots$ Obteniendo la raíz cúbica: $y=\frac{x}{\sqrt[3]{2}}\left[1+\left(\frac{1}{2x}-\frac{3}{4x^2}\right)\right]^{\frac{1}{3}}=\frac{x}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{6\sqrt[3]{2}}-\frac{5}{18\sqrt[3]{2}\,x}+\ldots$, de donde la asíntota es: $y=\frac{x}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{6\sqrt[3]{2}}$, y la posición de la curva viene dada por $y_c-y_a=\frac{-5}{18\sqrt[3]{2}\,x}$ (figura C). 3º) El sistema $f(x,y)=2xy^3-y^3+x^2-x^4=0$, $f'_x=2y^3+2x-4x^3=0$, $f'_y=6xy^2-3y^2=0$, no tiene solución, luego no hay puntos dobles. 4º) La determinatriz (III) da los puntos de corte con el eje XX': $x^2(x^2-1)=0$. El punto $(0,0)$ ya ha sido estudiado. La pendiente de las tangentes en $(1,0)$ y $(-1,0)$, es en ambos casos, ∞.

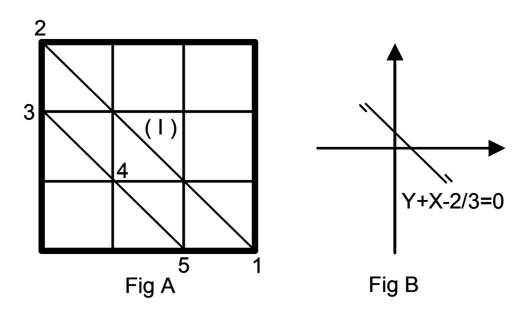


El dibujo de la curva es el siguiente:

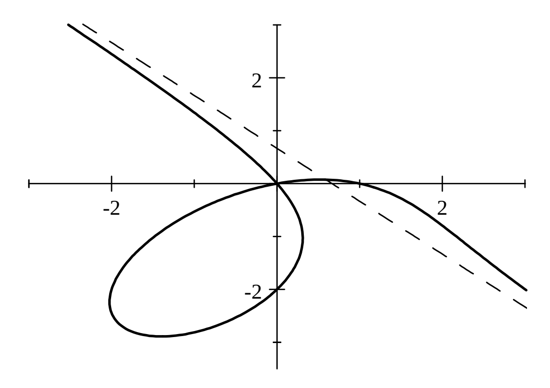


E 113- Estudiar las asíntotas de la curva $x^3+y^3+2y^2+3xy-x^2=0$.

Solución: La determinatriz (I) del diagrama de Newton-Cramer (figura A), corresponde a la asíntota general, única que tiene la curva. Añadiendo la primera paralela, se tiene: $x^3+y^3=-2y^2-3xy+x^2$, de donde: $y+x=\dfrac{-2y^2-3xy+x^2}{x^2-xy+y^2}$; haciendo la sustitución $y=-x$, se tiene: $y+x=\dfrac{-2x^2-3x^2+x^2}{x^2-x^2+x^2}=\dfrac{2}{3}$, luego la asíntota es: $y+x-\dfrac{2}{3}=0$; haciendo $y=-x+\dfrac{2}{3}$, se tiene $y_c-y_a=\dfrac{2}{3x}$ (figura B).

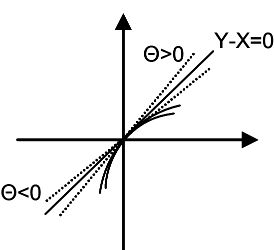


El dibujo de la curva es el siguiente:

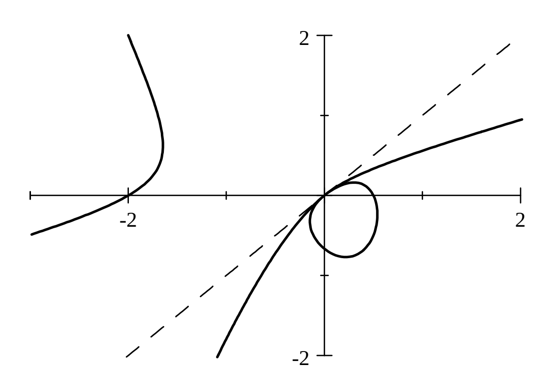


E 114- Estudiar el punto singular de la curva $(y-x)^2+\dfrac{3}{2}(y-x)(x^2+y^2)+(3y-x)x^3=0$.

Solución: Resolviendo el sistema: $f(x,y)=0$, $f'_x=0$, $f'_y=0$, se tiene la solución $(0,0)$. Derivando dos veces y particularizando para $(0,0)$, se tiene: $(y'-1)^2=0$, luego la tangente es doble y su pendiente es 1, siendo su ecuación: $y-x=0$. Cortando la curva por $y=(1+\theta)x$, con $\theta\to 0$, se tiene $x=\dfrac{-3\theta}{2}$, es decir, para $\theta>0$, $x<0$, y para $\theta<0$, $x>0$.

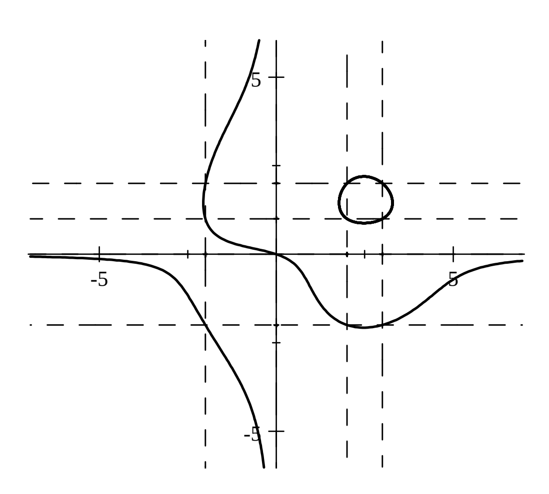


El dibujo de la curva es el siguiente:



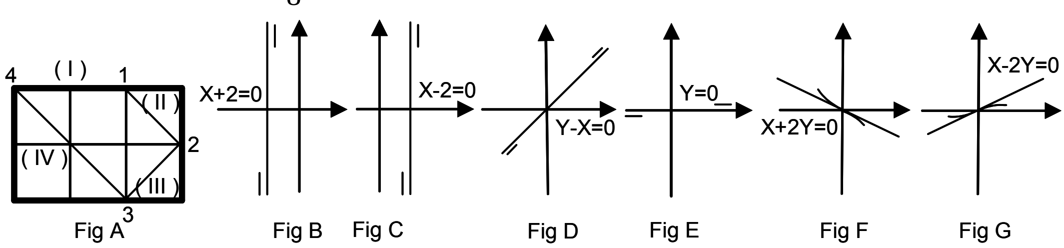
E 115- Dibujar la curva $(3-x)y(x^2-4)+(1-y)x(y^2-4) = 0$, por el método de las regiones.

Solución: Las regiones están definidas por: $x = 3$, $y = 0$, $x = \pm 2$, $y = 1$, $x = 0$, $y = \pm 2$. La curva pasa por los puntos: $(0,0)$, $(2,1)$, $(2,2)$, $(2,-2)$, $(3,2)$, $(3,1)$, $(3,-2)$, $(-2,2)$, $(-2,1)$, $(-2,-2)$. Los términos de mayor grado son: $-x^3y-xy^3 = -xy(x^2+y^2)$, luego la curva tiene las asíntotas: $x = 0$, $y = 0$, y tiene una parte cerrada. El dibujo de la curva es el siguiente:

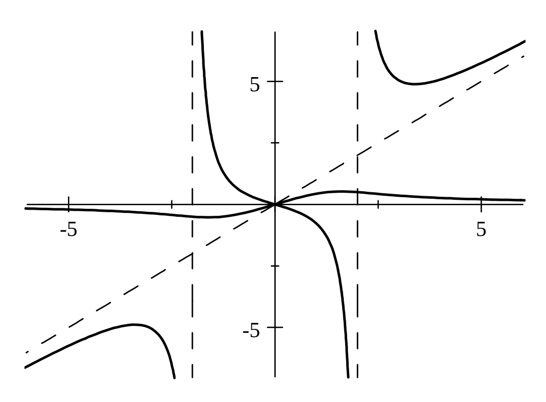


E 116- Dibujar la curva $x^2y^2-x^3y+x^2-4y^2 = 0$.

Solución: La curva es simétrica respecto al origen. La determinatriz (I) del diagrama de Newton-Cramer (figura A), se refiere a asíntotas paralelas al eje YY': $x^2y^2-4y^2 = 0$, de donde $x = \pm 2$. Para $x+2 = 0$, se tiene, añadiendo la primera paralela (monomio 2) y operando: $x+2 = \frac{x^3}{y(x-2)}$, haciendo $x = -2$, $x_c - x_a = \frac{2}{y}$ (figura B), y para $x-2 = 0$, se tiene, análogamente, $x_c - x_a = \frac{2}{y}$ (figura C). La determinatriz (II) corresponde a la asíntota general; añadiendo la primera paralela (monomios 3 y 4), se tiene: $y-x = \frac{4y^2-x^2}{x^2y} = \frac{3x^2}{x^3} = \frac{3}{x}$, luego la asíntota es: $y-x = 0$, y la posición de la curva viene dada por $y_c - y_a = \frac{3}{x}$ (figura D). La determinatriz (III) se refiere a la asíntota: $y = 0$, viniendo dada la posición de la curva por $y = \frac{1}{x}$ (figura E). La determinatriz (IV) corresponde a las tangentes en el origen: $x^2-4y^2 = 0$. Para la tangente $x+2y = 0$, la posición viene dada por $y_c - y_t = \frac{-3x^3}{16}$ (figura F), y para la tangente $x-2y = 0$, $y_c - y_t = \frac{-x^3}{8}$ (figura G).

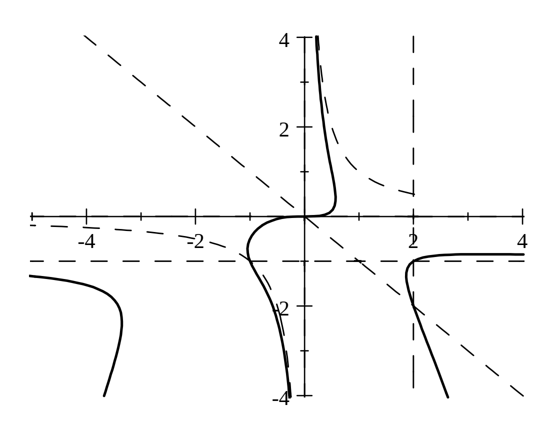


El dibujo de la curva es el siguiente:



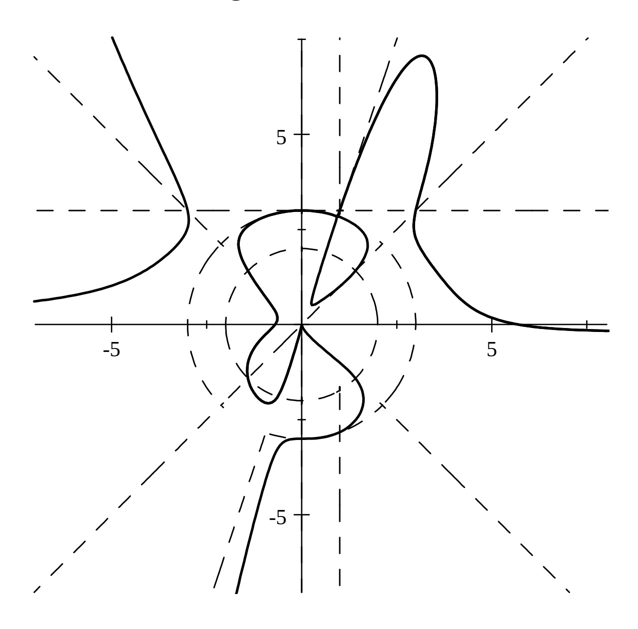
E 117- Dibujar la curva $(x-2)(xy-1)y = x^2(x+y)(y+1)$, por el método de las regiones.

Solución: Las regiones están definidas por: $x = 2$, $xy = 1$, $y = 0$, $x^2 = 0$, $x+y = 0$, $y = -1$. La curva tiene las asíntotas: $y = -1$, $x = 0$, y la rama parabólica: $2y + x^2 = 0$. La curva pasa por los puntos: $(2,-2)$, $(0,0)$, $(-2,-1)$, $(-1,-1)$. La tangente en el origen es: $y = 0$. El dibujo de la curva es el siguiente:



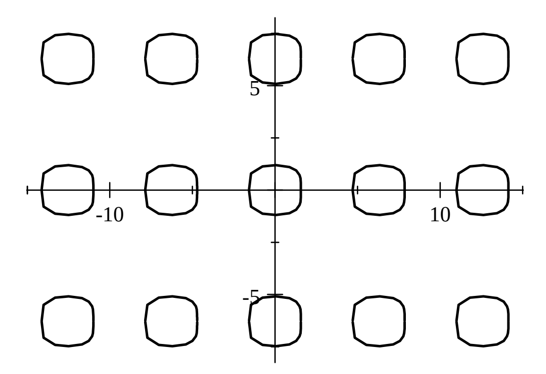
E 118- Dibujar la curva $x^2(x^2+y^2-4)(y-3)(x-1) = (y-3x)(x^2-y^2)(x^2+y^2-9)$, por el método de las regiones.

Solución: Las regiones están definidas por: $x^2 = 0$, $x^2+y^2 = 4$, $y = 3$, $x = 1$, $y = 3x$, $x+y = 0$, $x-y = 0$, $x^2+y^2 = 9$. La curva tiene una rama parabólica: $x^3+y^2 = 0$, la asíntota: $y = 0$, y tiene una parte cerrada, pues los términos de mayor grado son: $x^3y(x^2+y^2)$. La curva pasa por los puntos: $(0,3)$, $(0,-3)$, $(1,3)$, $(3,3)$, $(-3,3)$, $(1,1)$, $(1,-1)$, $\left(1,\pm2\sqrt{2}\right)$, $\left(\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{2}\right)$, $\left(\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2}\right)$. La tangente en el origen es: $x = 0$. El dibujo de la curva es el siguiente:



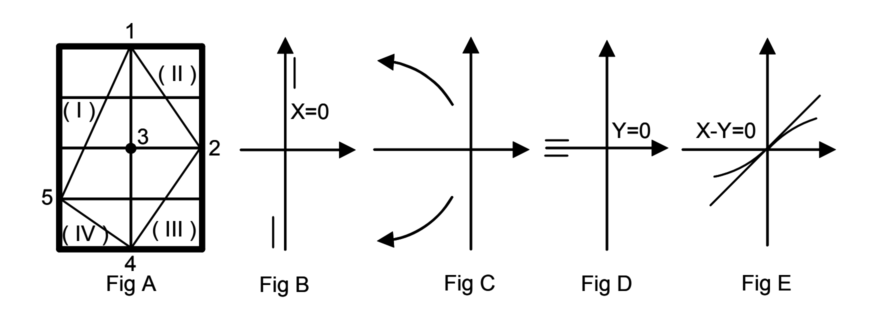
E 119- Dibujar la curva $\sqrt{\cos x} + \ln(\cos y) = 0$.

Solución: Dada una pareja de valores (x,y) que satisfacen la ecuación dada, también la satisfacen los puntos $(x \pm 2k\pi, y \pm 2k\pi)$. La curva está formada por infinitos rosetones, todos iguales. La pendiente de las tangentes es: $y' = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}} - \tan y$. Para $x = \pm\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi$, $y' = \infty$; para $x = 0 \pm 2k\pi$, $y' = 0$. El dibujo de la curva es el siguiente:

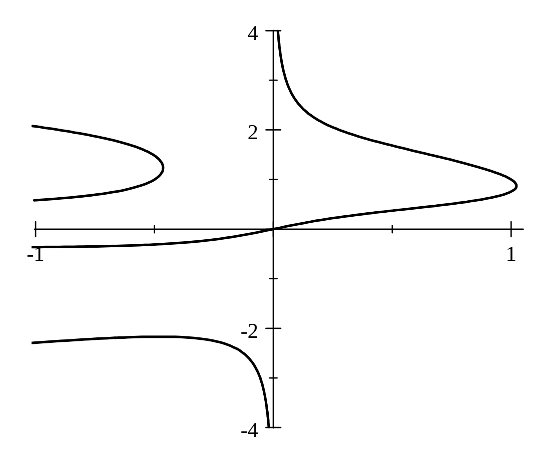


E 120- Dibujar la curva $xy^4 + 2x^2y^2 - 3xy^2 + x - y = 0$.

Solución: La determinatriz (I) del diagrama de Newton-Cramer (figura A), corresponde a la asíntota: $x = 0$, estando dada la posición de la curva por $x = \frac{1}{y^3}$ (figura B). La determinatriz (II) se refiere a la rama parabólica: $y^2 + 2x = 0$ (figura C). La determinatriz (III) corresponde a la asíntota: $y = 0$, viniendo dada la posición de la curva por $y^2 = \frac{-1}{2x}$ (figura D). La determinatriz (IV) corresponde a la tangente en el origen: $x - y = 0$; añadiendo la primera paralela (monomio 3) y operando, se tiene $y_c - y_t = -3x^2$ (figura E).



El dibujo de la curva es el siguiente:



E 121- Dibujar la curva $2xy^3 - y^3 + x^2 - x^4 = 0$.

Solución: La determinatriz (I) del diagrama de Newton-Cramer (figura A), se refiere a la asíntota

paralela al eje YY': $x = \frac{1}{2}$; añadiendo la primera paralela (el resto de la ecuación, en este caso) y operando, se tiene $x_c - x_a = \frac{-3}{32y^3}$ (figura B). La determinatriz (II) corresponde a la asíntota general definida por: $2xy^3 - x^4 = 0$; añadiendo la primera paralela (monomio 2), se tiene: $y = \left(\frac{x^4}{2x-1}\right)^{\frac{1}{3}} =$ $= \frac{x}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{6\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{18\sqrt[3]{2}\,x} + \ldots$, de donde la asíntota es: $y = \frac{x}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{6\sqrt[3]{2}}$, siendo $y_c - y_a = \frac{-1}{18\sqrt[3]{2}\,x}$ (figura C). La determinatriz (III) da los puntos de corte con el eje XX': $(0,0)$, $(\pm 1,0)$. La determinatriz (IV) corresponde a la tangente en el origen: $x = 0$, estando dada la posición de la curva por $x = \pm\sqrt{y^3}$ (figura D).

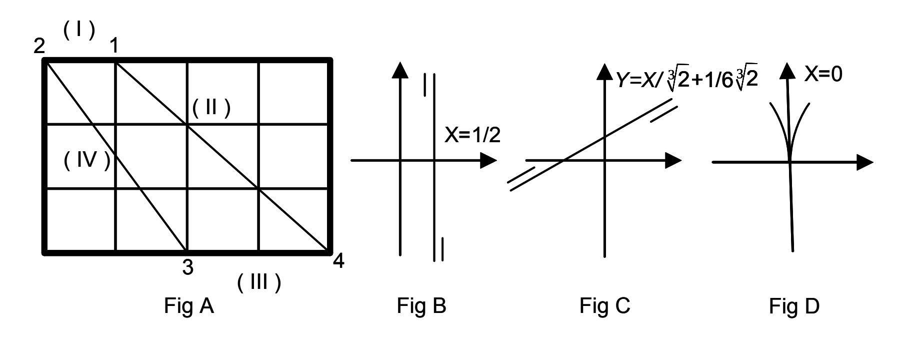
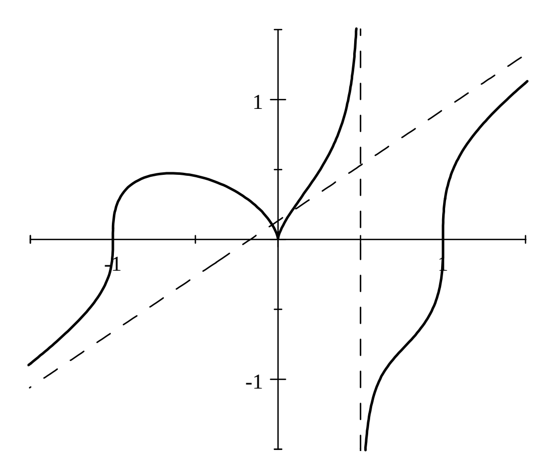


Fig A Fig B Fig C Fig D

El dibujo de la curva es el siguiente:



E 122- Dibujar la curva $x^4y^2 + 3x^3y^3 - 3x^2y^2 + 4x^2y^4 + xy^3 + y^4 - xy + x^2 = 0$.

Solución: La determinatriz (I) del diagrama de Newton-Cramer (figura A) corresponde a la asíntota paralela al eje YY': $4x^2 + 1 = 0$, luego es imaginaria. La determinatriz (II) corresponde a la asíntota general: $x^2y^2(4y^2 + 3xy + x^2)$, que es imaginaria, siendo la curva cerrada. La determinatriz (III) corresponde a la asíntota: $y = 0$, viniendo dada por $y^2 = \frac{-1}{x^2}$, luego es imaginaria. La determinatriz (IV) se refiere a la tangente en el origen: $y = x$, estando dada la posición de la curva, tras añadir la primera paralela, por $y_c - y_t = -x^3$ (figura B). La determinatriz (V) se refiere a la tangente en el origen: $x = 0$, estando dada la posición de la curva por $x = y^3$ (figura C).

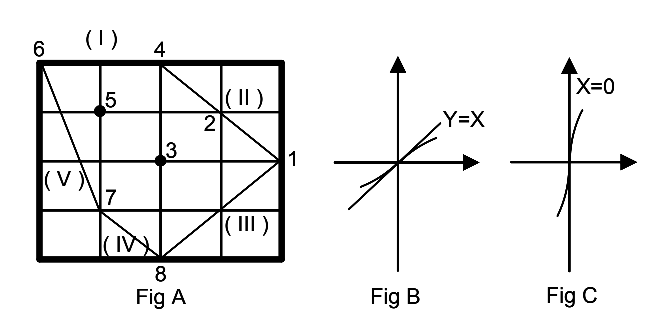
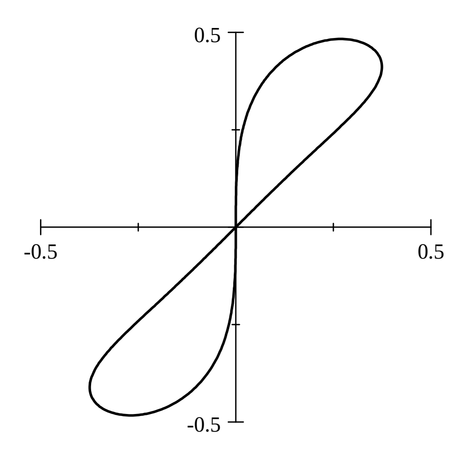


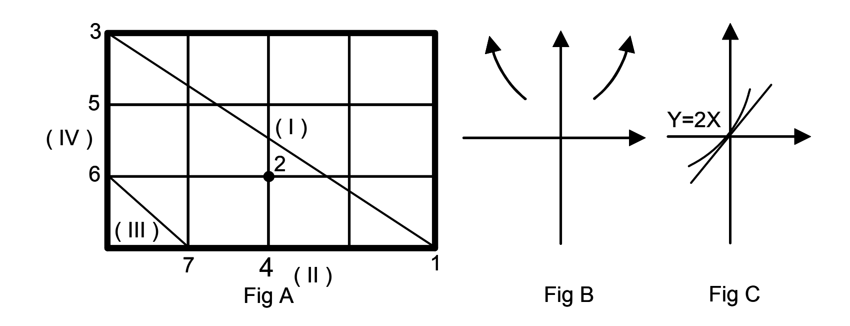
Fig A Fig B Fig C

El dibujo de la curva es el siguiente:

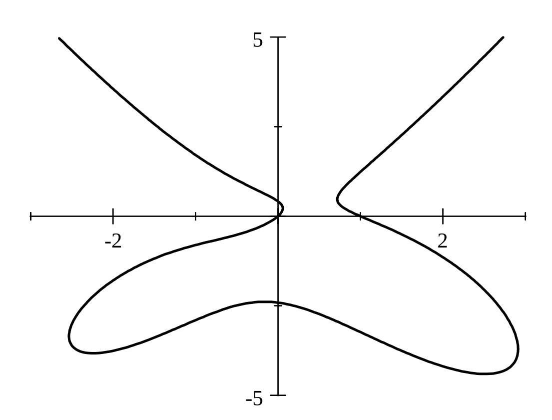


E 123- Dibujar la curva $x^4 + 3x^2y - y^3 + x^2 - 2y^2 + y - 2x = 0$.

Solución: La determinatriz (I) del diagrama de Newton-Cramer (figura A), se refiere a la rama parabólica: $x^4 - y^3 = 0$ (figura B). La determinatriz (II) da los puntos de corte con el eje XX': $(0,0)$, $(1,0)$. La determinatriz (III) se refiere a la tangente en el origen: $y = 2x$; añadiendo la primera paralela, se obtiene $y_c - y_t = 7x^2$ (figura C). La determinatriz (IV) da la intersección con el eje YY': $(0,0)$, $\left(0, -1 \pm \sqrt{2}\right)$.

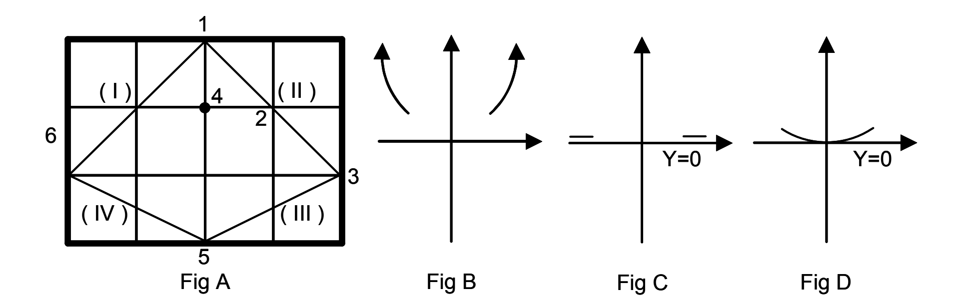


El dibujo de la curva es el siguiente:

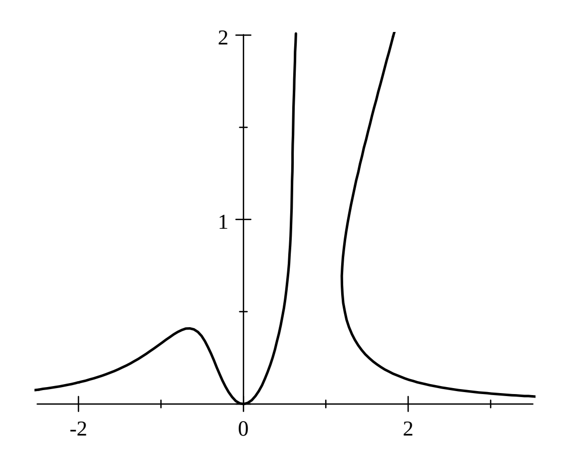


E 124- Dibujar la curva $(y - 2x)^2x^2y - x^2y^2 - 2x^2 + y = 0$.

Solución: La determinatriz (I) del diagrama de Newton-Cramer (figura A), se refiere a la asíntota: $x = 0$; la posición de la curva viene dada por $x^2 = \frac{-1}{y^2}$, luego la asíntota es imaginaria. La determinatriz (II) se refiere a la rama parabólica: $y - 2x \pm \sqrt{y} = 0$ (figura B). La determinatriz (III) corresponde a la asíntota: $y = 0$; la posición de la curva está dada por $y_c - y_a = \frac{1}{2x^2}$ (figura C). La determinatriz (IV) corresponde a la tangente en el origen: $y = 0$; la posición de la curva viene dada por $y_c - y^t = 2x^2$ (figura D).

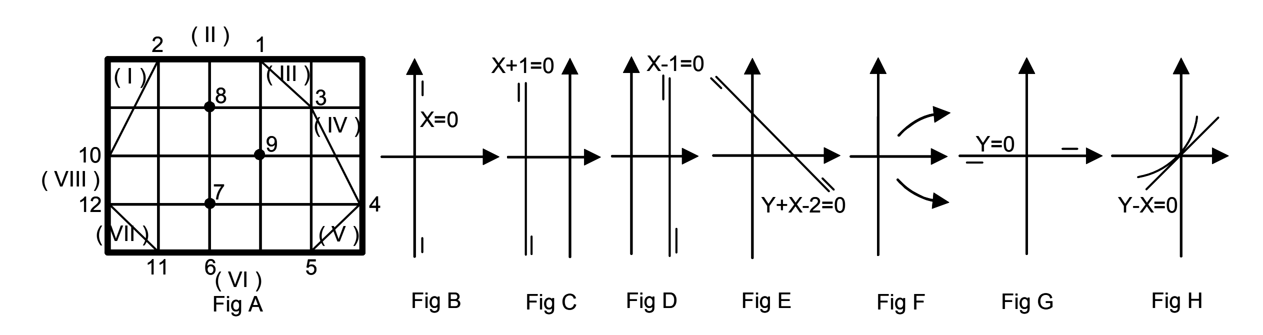


El dibujo de la curva es el siguiente:

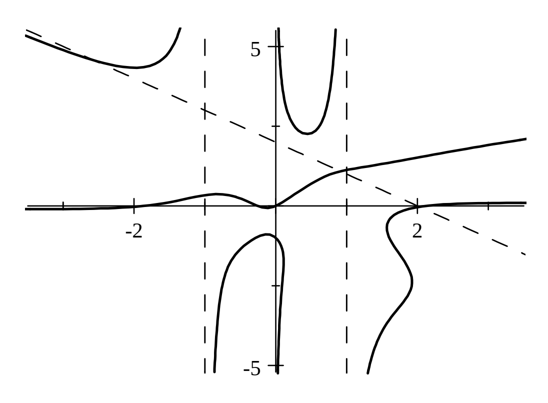


E 125- Dibujar la curva $x^3y^4 - xy^4 + x^4y^3 - 2x^5y + x^4 - 4x^2 + 2x^2y + x^2y^3 - x^3y^2 + y^2 - x + y = 0$.

Solución: La determinatriz (I) del diagrama de Newton-Cramer (figura A), corresponde a la asíntota: $x = 0$; la posición de la curva viene dada por $x = \dfrac{1}{y^2}$ (figura B). La determinatriz (II) se refiere a las asíntotas paralelas al eje YY': $x^2 - 1 = 0$; añadiendo la primera paralela, se tiene para la asíntota: $x + 1 = 0$, $x_c - x_a = \dfrac{-1}{y}$ (figura C), y para la asíntota: $x - 1 = 0$, $x_c - x_a = \dfrac{-1}{y}$ (figura D). La determinatriz (III) se refiere a la asíntota general que se obtiene añadiendo la primera paralela (monomio 4); $x^3y^3(x+y) - 2x^5y = 0$, $y + x = \dfrac{2x^2}{y^2} = 2$; añadiendo la segunda paralela (monomios 2, 8, 9), se tiene que: $y = -x + \dfrac{-2x^6 + 3x^5}{-x^6} = -x + 2 - \dfrac{3}{x}$, luego la asíntota es: $y = -x + 2$, y la posición de la curva está dada por $y_c - y_a = \dfrac{-3}{x}$ (figura E). La determinatriz (IV) corresponde a la rama parabólica: $y^2 - 2x = 0$ (figura F). La determinatriz (V) se refiere a la asíntota: $y = 0$; la posición de la curva está dada por $y_c - y_a = \dfrac{1}{2x}$ (figura G). La determinatriz (VI) se refiere a la intersección con el eje XX': $x(x^3 - 4x - 1) = 0$, cuyas raíces son las abscisas: -1.861, $-0,254$, 0, 2.115. La determinatriz (VII) corresponde a la tangente en el origen: $y - x = 0$; añadiendo la primera paralela, se obtiene la posición de la curva $y_c - y_t = 3x^2$ (figura H). La determinatriz (VIII) se refiere a la intersección con el eje YY': $(0,0)$, $(0,-1)$.



El dibujo de la curva es el siguiente:



E 126- Dibujar la curva $x^4y^3 - x^2y + y - x = 0$.

Solución: La determinatriz (I) del diagrama de Newton-Cramer (figura A), corresponde a la asíntota: $x = 0$; como $y^2 = \frac{-1}{x^4}$, la asíntota es imaginaria. La determinatriz (II) se refiere a la asíntota: $y = 0$, teniéndose $y_c - y_a = \frac{-1}{x}$ (figura B). La determinatriz (III) se refiere a la tangente en el origen: $y = x$; añadiendo la primera paralela (monomio 2), se tiene $y_c - y_t = x^3$ (figura C).

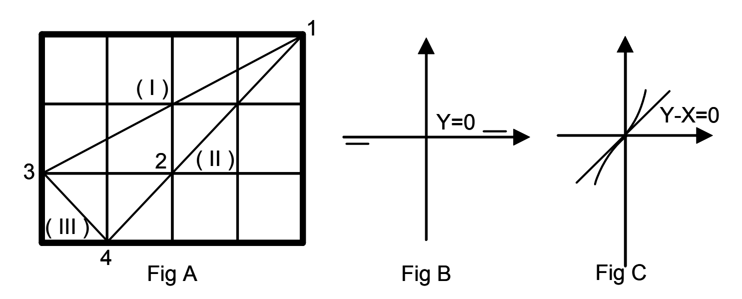
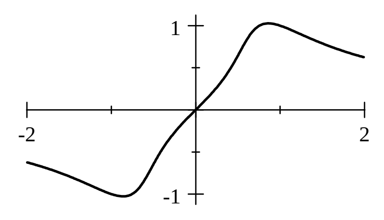


Fig A Fig B Fig C

El dibujo de la curva es el siguiente:



E 127- Dibujar la curva $(y-x)^2 + x^3y^2 - x^4 - y^4 = 0$.

Solución: La determinatriz (I) del diagrama de Newton-Cramer (figura A) corresponde a la rama parabólica según el eje YY': $y^2 = x^3$ (figura B). La determinatriz (II) se refiere a la rama parabólica según el eje OX: $x = y^2$ (figura C). La determinatriz (III) corresponde a la intersección con XX': $(0,0)$, $(\pm1,0)$. La determinatriz (IV) se refiere a la tangente en el origen: $y - x = 0$; añadiendo la primera paralela, se tiene $y_c - y_t = \pm\sqrt{2}\,x^2$ (figura D). La determinatriz (V) corresponde a la intersección con YY': $(0,0)$, $(0,\pm1)$.

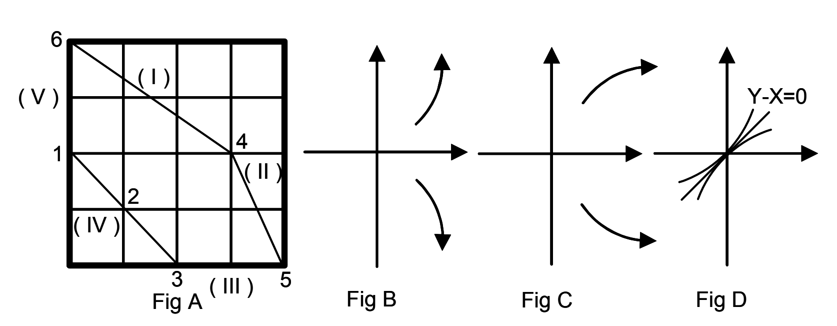
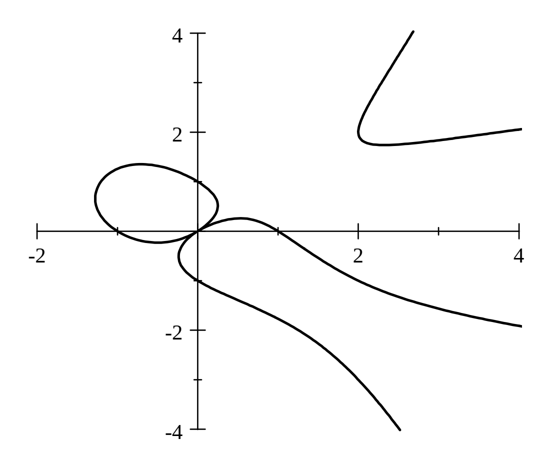


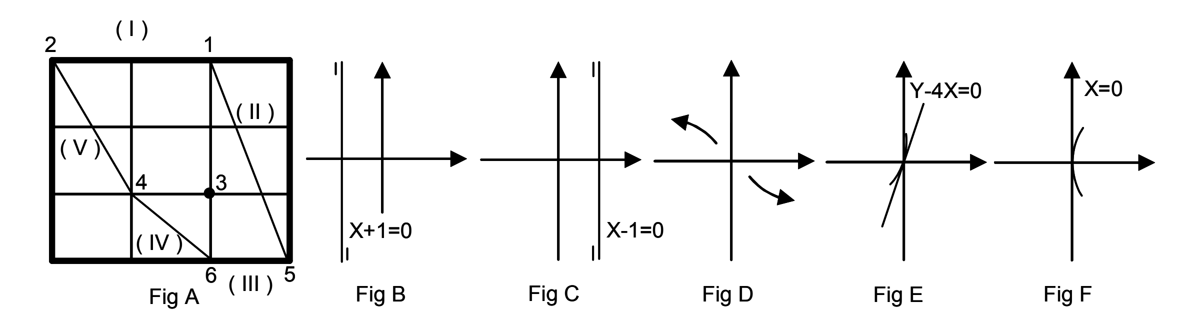
Fig A Fig B Fig C Fig D

El dibujo de la curva es el siguiente:

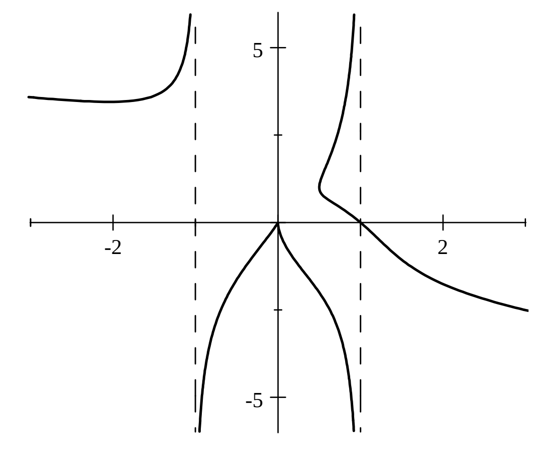


E 128- Dibujar la curva $y^3x^2 - y^3 + 3x^2y + 3xy + 12x^3 - 12x^2 = 0$.

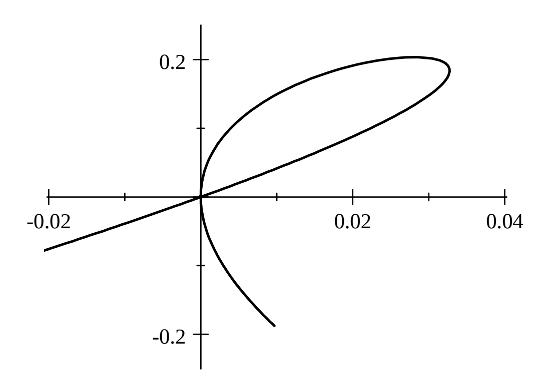
Solución: La determinatriz (I) del diagrama de Newton-Cramer (figura A), corresponde a las asíntotas paralelas al eje YY': $x = \pm 1$; añadiendo la primera paralela, la posición de la curva respecto a $x+1 = 0$, viene dada por $x_c - x_a = \dfrac{-12}{y^3}$ (figura B), y respecto a $x-1 = 0$, por $x_c - x_a = \dfrac{-3}{y^2}$ (figura C). La determinatriz (II) corresponde a la rama parabólica según el eje XX': $y^3 - 12x = 0$ (figura D). La determinatriz (III) se refiere a la intersección con XX': $(0,0)$, $(1,0)$. La determinatriz (IV) corresponde a la tangente en el origen: $y = 4x$; añadiendo la primera paralela, se tiene $y_c - y_t = \dfrac{40x^2}{3}$ (figura E). La determinatriz (V) corresponde a la tangente en el origen: $x = 0$, estando dada la posición de la curva, por $x_c - x_t = \dfrac{y^2}{3}$ (figura F).



El dibujo de la curva es el siguiente:

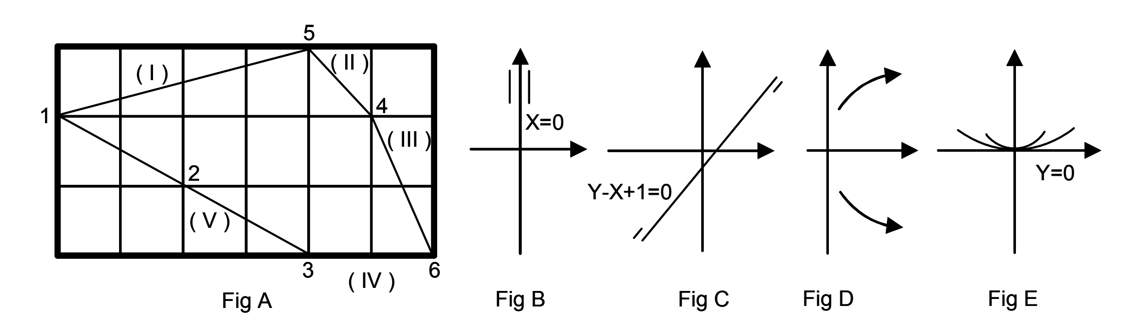


A continuación se presenta un detalle del entorno del origen de coordenadas, en el que se ve un lazo de la curva que en el anterior dibujo no se aprecia, confirmándose las posiciones de las figuras E y F.

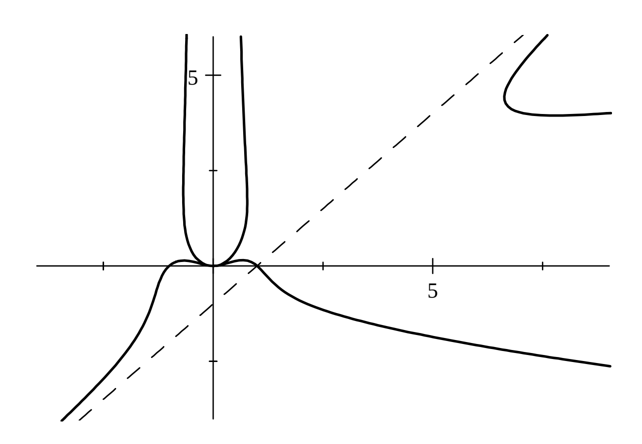


E 129- Dibujar la curva $(y-x^2)^2+x^5y^2-x^4y^3-x^6=0$.

Solución: La determinatriz (I) del diagrama de Newton-Cramer, corresponde a la asíntota: $x=0$, estando definida la posición de la curva, por $x_c-x_a=\dfrac{1}{\pm\sqrt[4]{y}}$ (figura B). La determinatriz (II) se refiere a la asíntota general definida por ella más la primera paralela: $-y+x=1$, siendo la posición de la curva la indicada en la figura C. La determinatriz (III) se refiere a la rama parabólica según XX': $y^2-x=0$ (figura D). La determinatriz (IV) corresponde a las intersecciones con XX': $(0,0)$, $(\pm 1,0)$. La determinatriz (V) corresponde a la doble tangente en el origen: $y=0$, siendo la posición de la curva la indicada en la figura E.

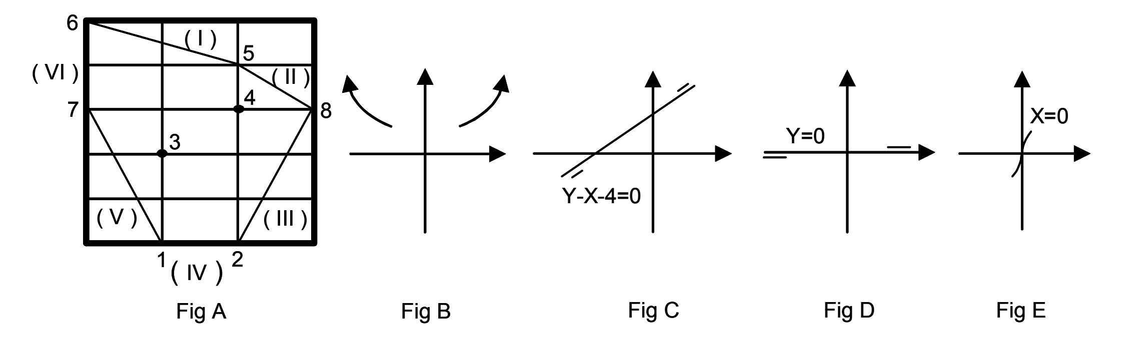


El dibujo de la curva es el siguiente:

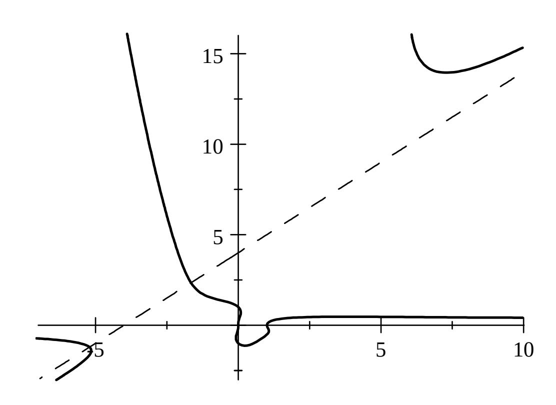


E 130- Dibujar la curva $x-x^2+2xy^2+3x^2y^3-x^2y^4+y^5-y^3+x^3y^3=0$.

Solución: La determinatriz (I) del diagrama de Newton-Cramer (figura A), se refiere a la rama parabólica según YY': $y-x^2=0$ (figura B). La determinatriz (II) corresponde a la asíntota general: $y=x+4$ que se determina añadiendo la primera paralela, siendo la posición de la curva la indicada en la figura C. La determinatriz (III) se refiere a la asíntota: $y=0$; la posición de la curva está dada por $y_c-y_a=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ (figura D). La determinatriz (IV) corresponde a la intersección con XX': $(0,0)$, $(1,0)$. La determinatriz (V) corresponde a la tangente en el origen: $x=0$; la posición de la curva está dada por $x_c-x_t=y^3$ (figura E). La determinatriz (VI) corresponde a la intersección con YY': $(0,0)$, $(0,\pm 1)$.

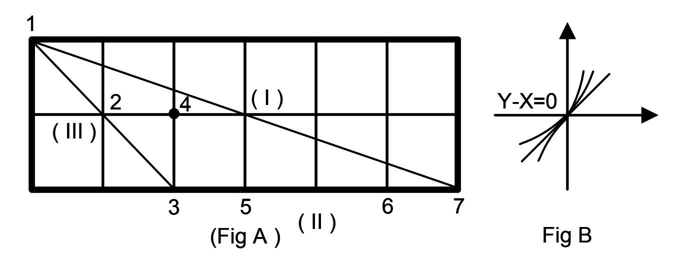


El dibujo de la curva es el siguiente:

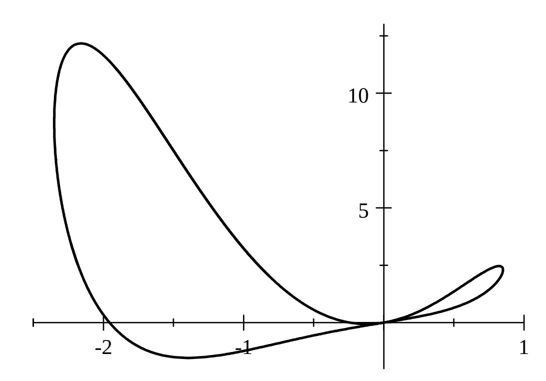


E 131- Dibujar la curva $(y-x)^2 - 4x^2(y-x) + 3x^5 + 2x^6 = 0$.

Solución: La determinatriz (I) del diagrama de Newton-Cramer (figura A), se refiere a la rama parabólica según el eje YY': $y^2 + 2x^6 = 0$, que es imaginaria. La curva es cerrada. La determinatriz (II) corresponde a la intersección con el eje XX': $x^2(2x^4 + 3x^3 + 4x + 1) = 0$, que además de $(0,0)$, tiene las raíces: -0.24, -1.95. La determinatriz (III) se refiere a la tangente doble en el origen: $y - x = 0$; añadiendo la primera y segunda paralela (monomios 4, 5, 6), se tiene: $(y-x)^2 - 4x^2(y-x) + 3x^5 = 0$, de donde: $y - x = 2x^2 \pm 2x^2\left(1 - \frac{3x}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$, por tanto $y_c - y_t = 2x^2 \pm 2x^2\left(1 - \frac{3x}{8}\right)$ (figura B).

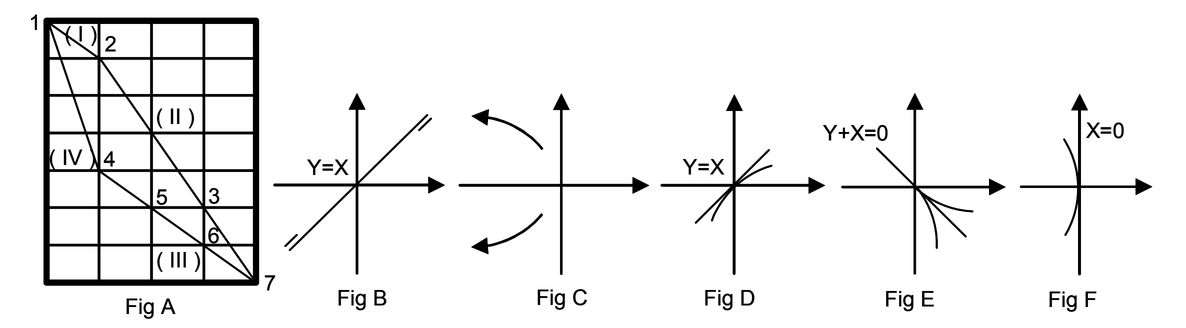


El dibujo de la curva es el siguiente:

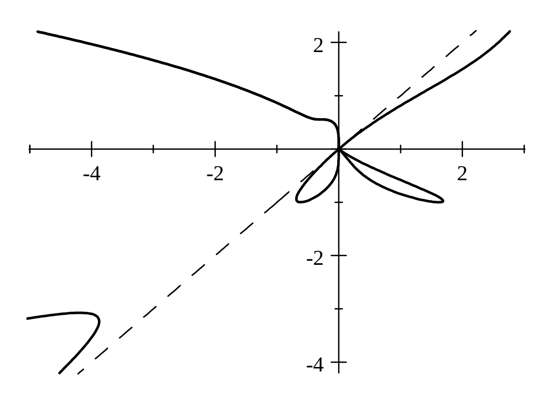


E 132- Dibujar la curva $y^7 - xy^6 + x^3y^2 + xy^3 + x^2y^2 - x^3y - x^4 = 0$.

Solución: La determinatriz (I) del diagrama de Newton-Cramer (figura A), corresponde a la asíntota general: $y - x = 0$; añadiendo la primera paralela, se obtiene $y_c - y_a = \frac{-1}{x}$ (figura B). La determinatriz (II) se refiere a la rama parabólica según el eje XX' (figura C). La determinatriz (III) corresponde a las tangentes en el origen: $y \pm x = 0$; añadiendo la primera paralela (monomio 3), se tiene, para $y - x = 0$, $y_c - y_t = \frac{-x^2}{4}$ (figura D), y para $y + x = 0$, $y_c - y_t = \pm\sqrt{\frac{x^3}{4}}$ (figura E). La determinatriz (IV) se refiere a la tangente en el origen: $x = 0$; la posición de la curva está definida por: $y^4 - x = 0$ (figura F).

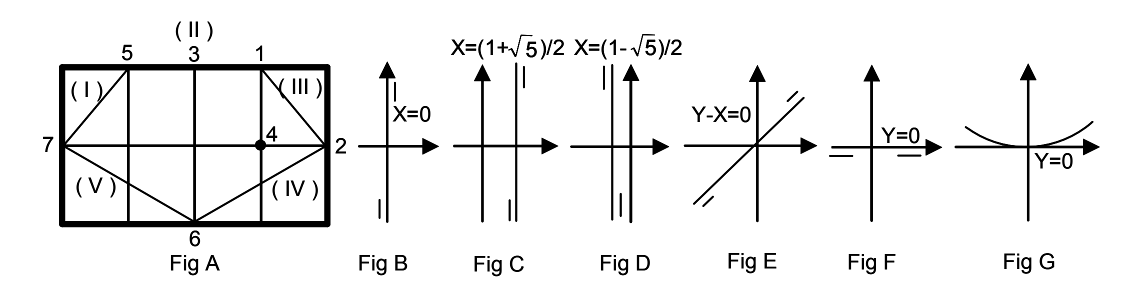


El dibujo de la curva es el siguiente:

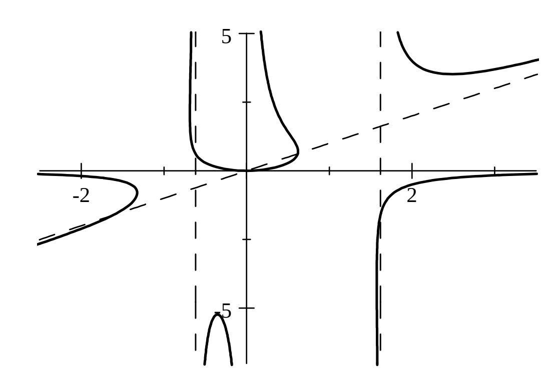


E 133- Dibujar la curva $(y - x)x^3y - (y - x)x^2y - xy^2 - x^2 + y = 0$.

Solución: La determinatriz (I) del diagrama de Newton-Cramer (figura A) corresponde a la asíntota: $x = 0$; la posición de la curva viene definida por $x = \frac{1}{y}$ (figura B). La determinatriz (II) se refiere a las asíntotas paralelas al eje YY': $x^2 - x - 1 = 0$, es decir: $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; añadiendo la primera paralela, se tiene la posición de la curva, que para $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ está dada por $x_c - x_a \simeq \frac{0.4}{y}$ (figura C), y para $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$, por $x_c - x_a \simeq \frac{-0.4}{y}$ (figura D). La determinatriz (III) corresponde a la asíntota general: $y - x = 0$; añadiendo las dos primeras paralelas, se tiene la posición de la curva $y_c - y_a = \frac{1}{x - 1}$ (figura E). La determinatriz (IV) corresponde a la asíntota: $y = 0$; la posición de la curva está dada por $x = \pm\sqrt{\frac{-1}{y}}$ (figura F). La determinatriz (V) corresponde a la tangente en el origen: $y = 0$, estando la posición de la curva definida por $y = x^2$ (figura G).

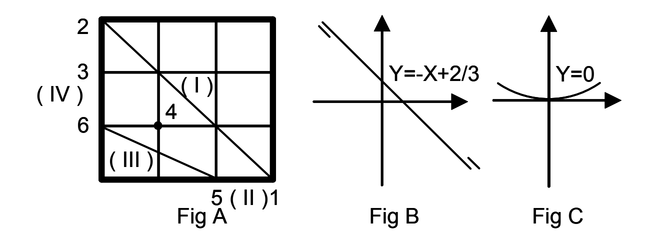


El dibujo de la curva es el siguiente:

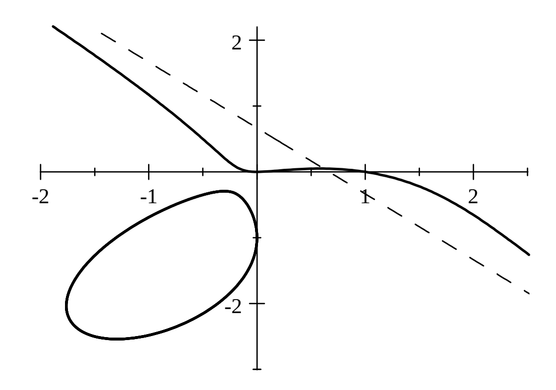


E 134- Dibujar la curva $x^3 + y^3 + 2y^2 + 3xy - x^2 + y = 0$.

Solución: La determinatriz (I) del diagrama de Newton-Cramer (figura A) corresponde a la asíntota general definida por: $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 0$; el segundo factor, al corresponder a una curva imaginaria, indica que una parte de la curva es cerrada; añadiendo la primera paralela, se obtiene la asíntota: $y = -x + \frac{2}{3}$; añadiendo la siguiente paralela (monomio 6), se obtiene la posición de la curva con relación a la asíntota, $y_c - y_a = \frac{1}{3x}$ (figura B). La determinatriz (II) se refiere a la intersección con el eje XX': $(0,0)$, $(1,0)$. La determinatriz (III) corresponde a la tangente en el origen: $y = 0$; la posición de la curva viene dada por $y = x^2$ (figura C). La determinatriz (IV) se refiere a la intersección con el eje YY': $(0,0)$ y el punto doble $(0,-1)$ en el que la curva es tangente al eje YY',



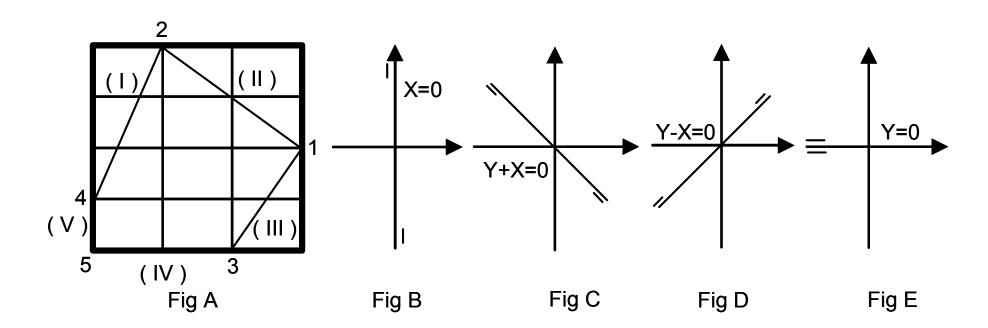
El dibujo de la curva es el siguiente:



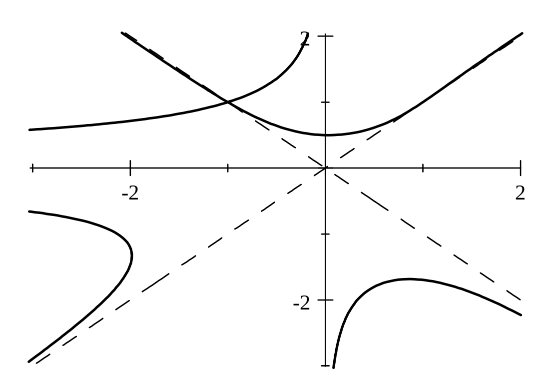
E 135- Dibujar la curva $x^3y^2 - xy^4 + x^2 - 2y + 1 = 0$.

Solución: La determinatriz (I) del diagrama de Newton-Cramer (figura A), se refiere a la asíntota: $x = 0$, estando dada la posición de la curva por $y = \sqrt[3]{\frac{-2}{x}}$ (figura B). La determinatriz (II) corresponde a las asíntotas generales: $x^2 - y^2 = 0$; añadiendo la primera paralela, se tiene la posición de la curva respecto a: $y + x = 0$, que viene dada por $y_c - y_a = \frac{-1}{2x^2}$ (figura C), y para: $y - x = 0$, por $y_c - y_a = \frac{1}{2x^2}$ (figura D). La determinatriz (III) se refiere a la asíntota: $y = 0$, estando dada la posición de la curva por $y = \pm\sqrt{\frac{-1}{x^2}}$ (figura E). La curva no corta al eje XX'. Corta al eje YY' en $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. El punto $(-1,1)$ es doble, donde la

asíntota $x+y=0$ corta a la curva, siendo las pendientes de sus tangentes $\frac{-1\pm\sqrt{11}}{5}$. La curva es tangente a la asíntota $x-y=0$ en el punto $(1,1)$.

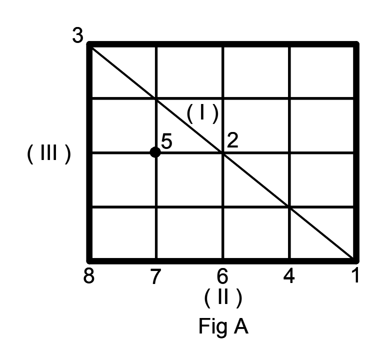


El dibujo de la curva es el siguiente:

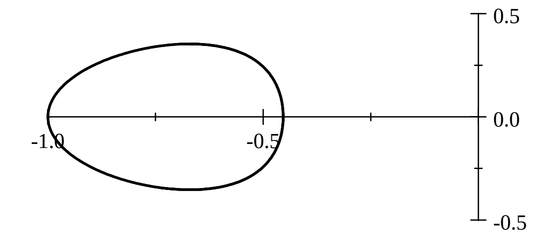


E 136- Dibujar la curva $(x^2+y^2)^2+x(x^2-y^2)+2x^2+3x+1=0$.

Solución: La curva es simétrica respecto al eje XX'. La determinatriz (I) del diagrama de Newton-Cramer (figura A), corresponde a la asíntota general; como es $(x^2+y^2)^2=0$ indica que es imaginaria, siendo la curva cerrada. La determinatriz (II) se refiere a la intersección con el eje XX': $(-1,0)$ y $(-0.45,0)$. La determinatriz (III), $y^4+1=0$, corresponde a la intersección con el eje YY', al que no corta. Ordenando la ecuación dada, se tiene: $y^4+(2x^2-x)y^2+x^4+x^3+2x^2+3x+1=0$. Dando valores a x, se obtienen los dos valores correspondientes para y. Por ejemplo, para $x=-0.7$, $y=\pm0.35$.



El dibujo de la curva es el siguiente:



E 137- Dibujar la curva $x^7 + 3x^2y^2 + 2y^3 = 0$.

Solución: La determinatriz (I) del diagrama de Newton-Cramer (figura A), se refiere a la rama parabólica según el eje YY': $x^7 + 2y^3 = 0$ (figura B). La determinatriz (II) se refiere a la tangente en el origen: $y = 0$, estando definida la posición de la curva por $y_c - y_t = \pm\sqrt{\frac{-x^5}{3}}$ (figura C). La determinatriz (III) corresponde a la tangente en el origen: $y = 0$, estando la posición de la curva determinada por $y_c - y_a = \frac{-3x^2}{2}$ (figura D).

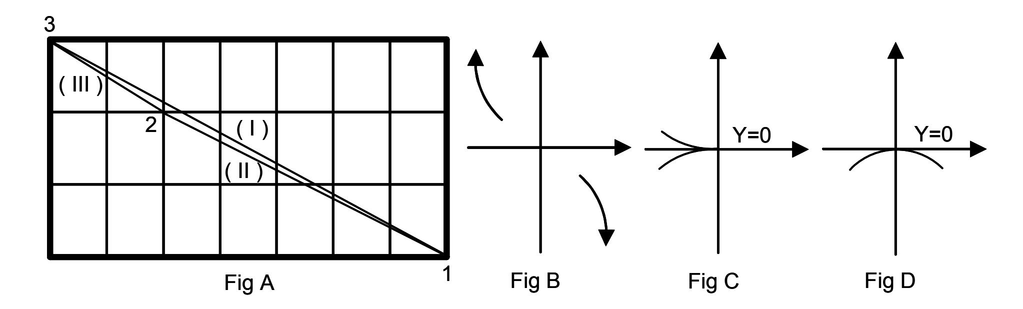
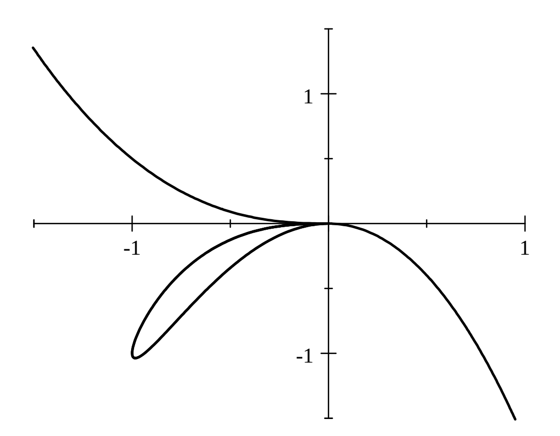


Fig A Fig B Fig C Fig D

El dibujo de la curva es el siguiente:



E 138- Dibujar la curva $(y - x)x^3y - (y + x)x^2y - xy^2 - x^2 + y = 0$.

Solución: La determinatriz (I) del diagrama de Newton-Cramer (figura A), se refiere a la asíntota: $x = 0$, estando dada la posición de la curva por $x = \frac{1}{y}$ (figura B). La determinatriz (II) se refiere a las asíntotas paralelas al eje YY': $x^2 - x - 1 = 0$; la posición de la curva respecto a: $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ se obtiene añadiendo la primera paralela, lo que da $x_c - x_a \simeq \frac{3.8}{y}$ (figura C), y respecto a: $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x_c - x_a \simeq \frac{-0.8}{y}$ (figura D). La determinatriz (III) corresponde a la asíntota general; añadiendo la primera paralela, se tiene la asíntota: $y = x + 2$, estando dada la posición de la curva, por $y_c - y_a = \frac{1}{x}$ (figura E). La determinatriz (IV) corresponde a la asíntota: $y = 0$; la posición de la curva está dada por $y_c - y_a = \frac{-1}{x^2}$ (figura F). La determinatriz (V) corresponde a la tangente en el origen: $y = 0$; la posición de la curva está dada por $y_c - y_a = x^2$ (figura G). La curva solo corta a los ejes en el origen.

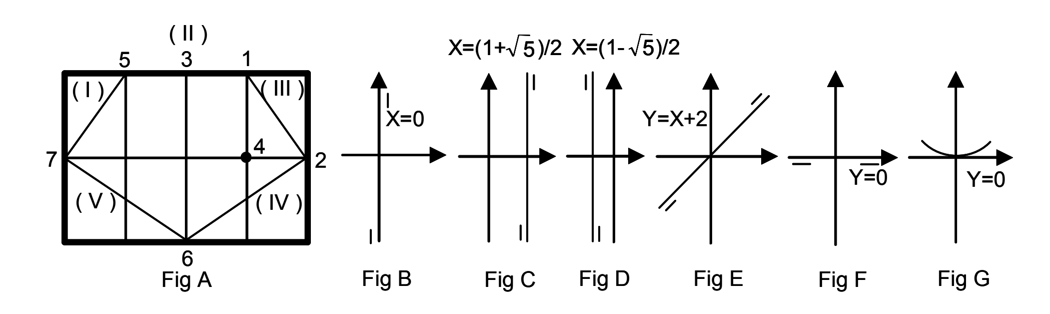
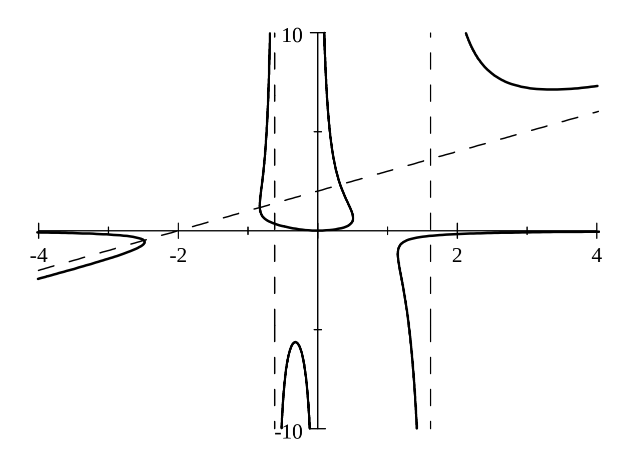


Fig A Fig B Fig C Fig D Fig E Fig F Fig G

El dibujo de la curva es el siguiente:



E 139- Dibujar la curva $x^3y(y-x)-y^3+2xy^2-x^2 = 0$.

Solución: La determinatriz (I) del diagrama de Newton-Cramer (figura A), corresponde a la rama parabólica según el eje YY': $y = x^3$ (figura B). La determinatriz (II) se refiere a la asíntota general: $y-x = 0$, estando dada la posición de la curva, por $y_c - y_a = \frac{-1}{x}$ (figura C). Los puntos de intersección de esta asíntota con la curva son $(1,1)$ y el origen. La determinatriz (III) corresponde a la asíntota: $y = 0$, estando determinada la posición de la curva, por $y_c - y_a = \frac{-1}{x^2}$. La determinatriz (IV) se refiere a la tangente en el origen: $y = 0$, estando dada la posición de la curva, por $y_c - y_t = -\sqrt[3]{x^2}$ (figura E).

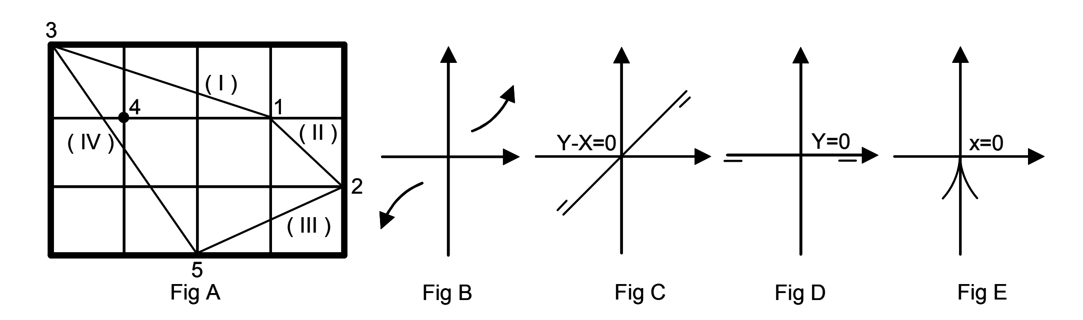
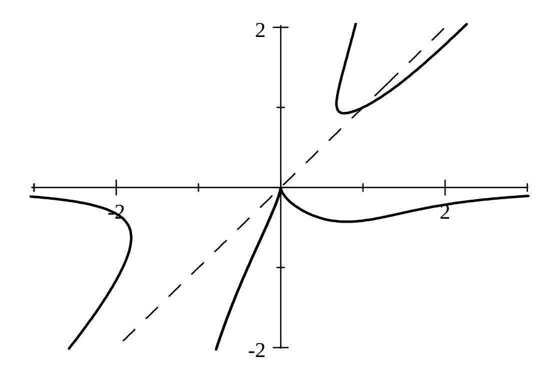


Fig A Fig B Fig C Fig D Fig E

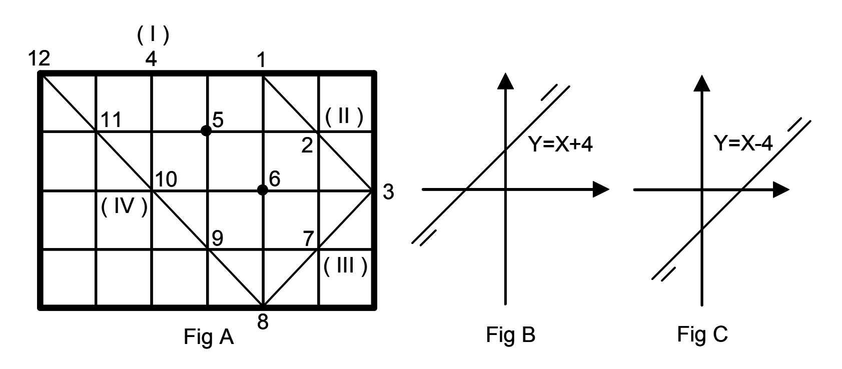
El dibujo de la curva es el siguiente:



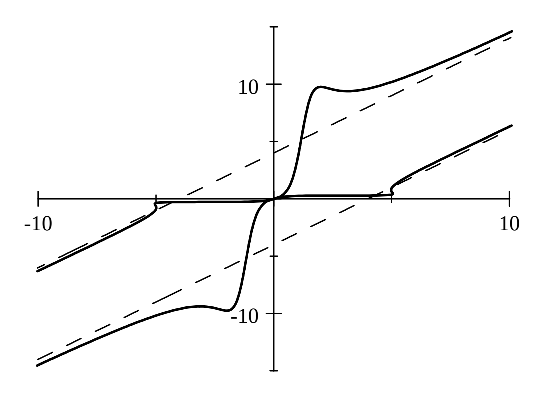
E 140- Dibujar la curva $(y-x)^2x^4y^2-2(y+x)^3x^2y+2x^4-5x^3y+3x^2y^2-xy^3+4y^4 = 0$.

Solución: La curva es simétrica respecto al origen de coordenadas. La determinatriz (I) del diagrama de Newton-Cramer (figura A), corresponde a la asíntota paralela al eje YY', siendo la posición de la curva $(x^2-2)^2 = 0$, luego es imaginaria. La determinatriz (II) corresponde a la asíntota general de dirección: $(y-x)^2 = 0$; añadiendo la primera paralela, se tiene: $(y-x)^2 = 16$; añadiendo la segunda paralela, se tiene la posición de la curva respecto a: $y = x+4$, que viene dada por $y_c - y_a = \frac{4}{x}$ (figura B), y para: $y = x-4$, por $y_c - y_a = \frac{4}{x}$ (figura C). La curva corta a la asíntota $y = x+4$, en tres puntos cuyas

coordenadas son: $(-5.04,-1.04)$, $(-4.29,-0.29)$, $(1.16,5.16)$, y a la asíntota: $y = x-4$, en tres puntos simétricos de los anteriores con relación al origen. La determinatriz (III) corresponde a la asíntota: $y = 0$, estando dada la posición de la curva por $y = x \pm \sqrt{-x^2}$, luego es imaginaria. La determinatriz (IV) corresponde a las tangentes en el origen, cuyas pendientes m vienen dadas por la ecuación: $4m^4 - m^3 + 3m^2 - 5m + 2 = 0$, cuyas raíces son imaginarias, por lo que el origen es un punto aislado. La recta $y = x$, paralela a las asíntotas, pasa por dicho punto aislado y corta a la curva en $\left(\frac{\pm\sqrt{3}}{4}, \frac{\pm\sqrt{3}}{4}\right)$.

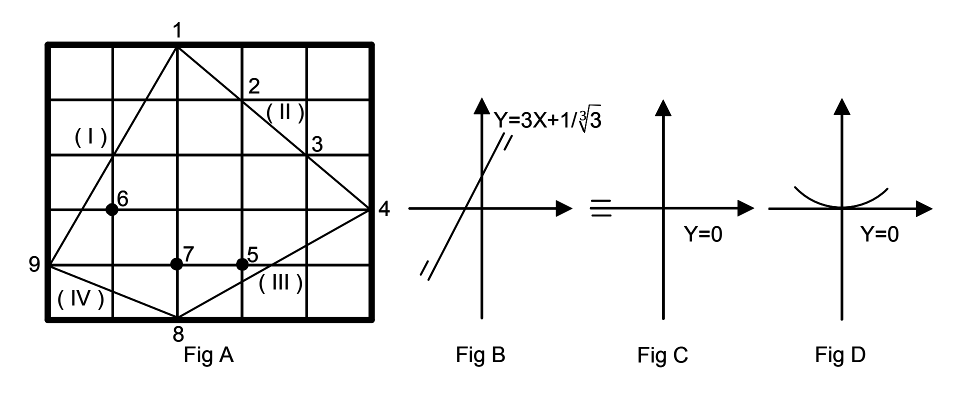


El dibujo de la curva es el siguiente:

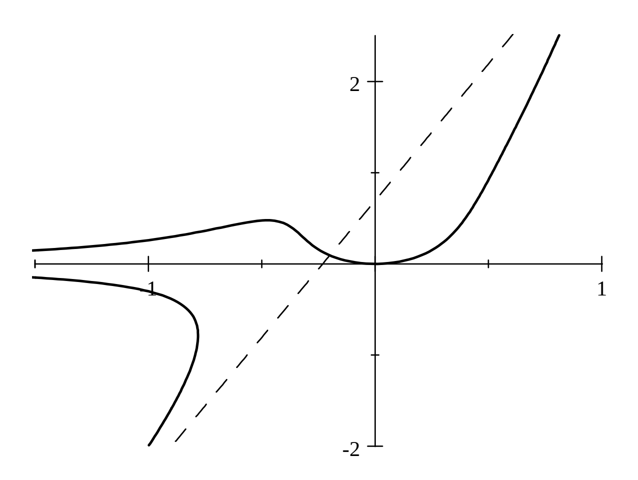


E 141- Dibujar la curva $(y-3x)^3 x^2 y^2 - x^3 y + (y-3x)xy - 2x^2 + y = 0$.

Solución: La determinatriz (I) del diagrama de Newton-Cramer (figura A), corresponde a la asíntota: $x = 0$, estando dada la posición de la curva, por $x^2 = \frac{-1}{y^4}$, luego es imaginaria. La determinatriz (II) se refiere a la asíntota general de dirección: $y-3x = 0$; añadiendo la primera paralela (monomio 5), se tiene: $y-3x = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$; añadiendo la segunda paralela (monomios 6, 7), se obtiene la posición de la curva, que viene dada por $y_c - y_a = \frac{-1}{9\sqrt[3]{9}\,x}$ (figura B). La determinatriz (III) corresponde a la asíntota: $y = 0$, estando dada la posición de la curva por $y_c - y_a = \pm\sqrt{\frac{-2}{27x^3}}$ (figura C). La determinatriz (IV) se refiere a la tangente en el origen: $y = 0$, estando dada la posición de la curva por $y = 2x^2$ (figura D).

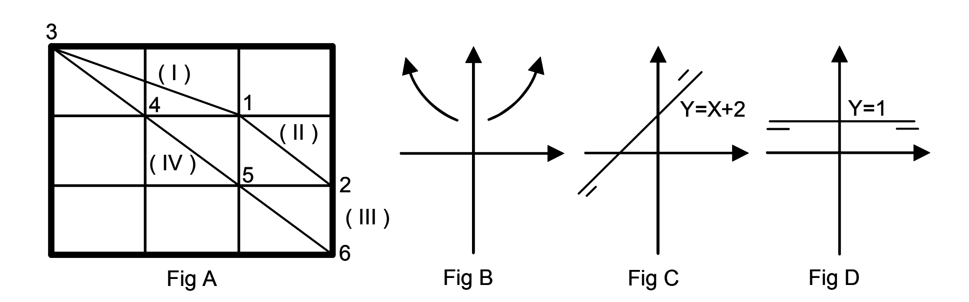


El dibujo de la curva es el siguiente:

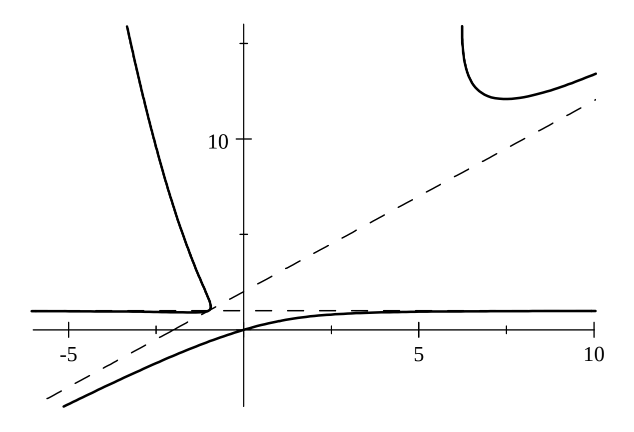


E 142- Dibujar la curva $(y-x)x^2y-y^3-y^2x-yx^2+x^3=0$.

Solución: La determinatriz (I) del diagrama de Newton-Cramer, (figura A), corresponde a la rama parabólica según el eje YY': $y=x^2$ (figura A). La determinatriz (II) corresponde a la asíntota general de dirección: $y=x$; añadiendo la primera paralela, se tiene la asíntota: $y=x+2$, y la posición de la curva, dada por $y_c-y_a=\frac{8}{x}$ (figura C). La determinatriz (III) se refiere a la asíntota: $y=1$, siendo la posición de la curva la indicada en la figura D. Ambas asíntotas se cortan entre sí en $(-1,1)$, punto de la curva, cuya tangente es la asíntota: $y=x+2$. La determinatriz (IV) se refiere a la tangente en el origen, cuya pendiente m viene dada por la ecuación: $m^3+m^2+m-1=0$, siendo su raíz real $m=0.54$.



El dibujo de la curva es el siguiente:



E 143- Dibujar la curva $(y-x)^3x^2y^2-x^3y+(y+x)xy-2x^2-y=0$.

Solución: La determinatriz (I) del diagrama de Newton-Cramer (figura A), corresponde a la asíntota: $x=0$, estando dada la posición de la curva, por $x_c-x_a=\pm\sqrt{\frac{1}{y^4}}$ (figura B). La determinatriz (II) se

refiere a la asíntota general de dirección: $y-x=0$; añadiendo la primera paralela, se tiene la asíntota: $y=x+1$; añadiendo la segunda paralela, se tiene la posición de la curva, dada por $y_c-y_a=\frac{-2}{3x}$ (figura C). La determinatriz (III) se refiere a la asíntota: $y=0$, estando dada la posición de la curva, por $y_c-y_a=\pm\sqrt{\frac{-2}{x^3}}$ (figura D). La determinatriz (IV) corresponde a la tangente en el origen: $y=0$; la posición de la curva está dada por $y_c-y_t=-2x^2$ (figura E).

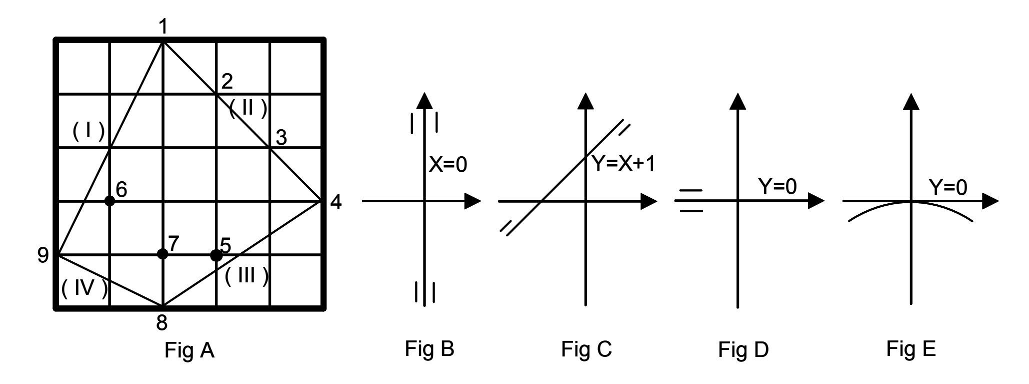
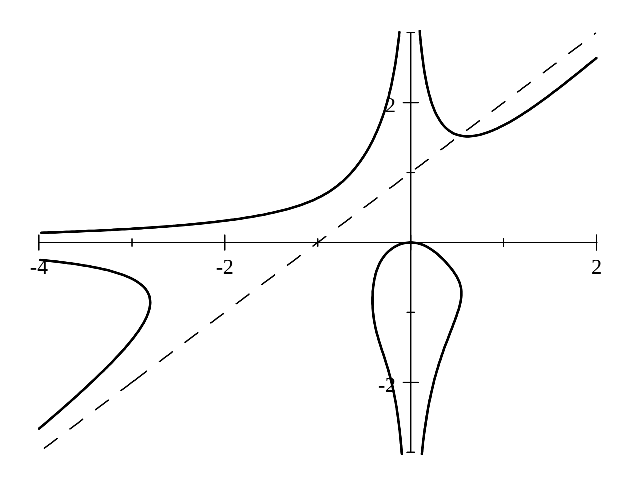


Fig A Fig B Fig C Fig D Fig E

El dibujo de la curva es el siguiente:



E 144- Dibujar la curva $(y-x)^3xy^2-(y-x)xy-2x^2-y=0$.

Solución: La determinatriz (I) del diagrama de Newton-Cramer (figura A), corresponde a la asíntota: $x=0$, estando dada la posición de la curva, por $y=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{x}}$ (figura B). La determinatriz (II) corresponde a la asíntota general: $y-x=0$; añadiendo las dos paralelas siguientes, se tiene la posición de la curva, dada por $y_c-y_a=\sqrt[3]{\frac{2}{x}}$ (figura C). Esta asíntota corta a la curva en el origen y en $\left(\frac{-1}{2},\frac{-1}{2}\right)$. La determinatriz (III) se refiere a la asíntota: $y=0$, estando dada la posición de la curva, por $y^2=\frac{-2}{x^2}$, luego la asíntota es imaginaria. La determinatriz (IV) corresponde a la tangente en el origen: $y=0$, estando dada la posición de la curva, por $y=-2x^2$ (figura D).

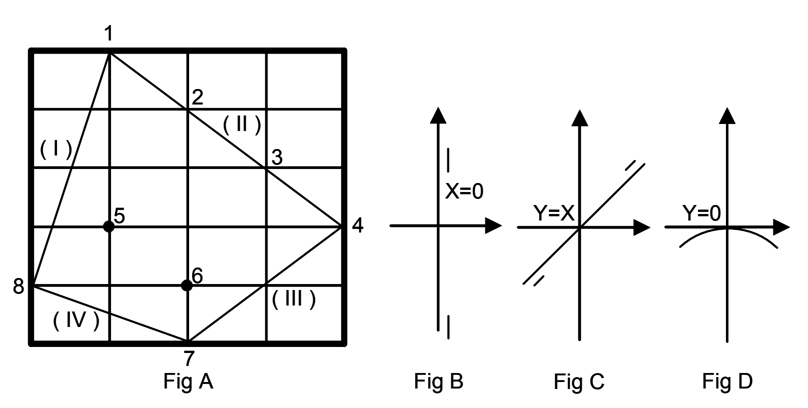
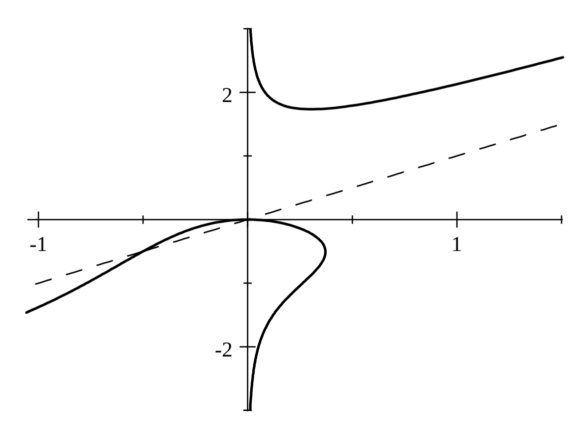


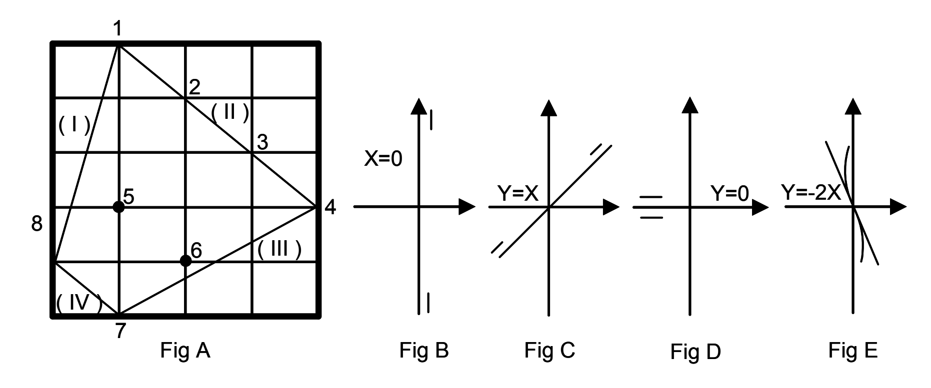
Fig A Fig B Fig C Fig D

El dibujo de la curva es el siguiente:

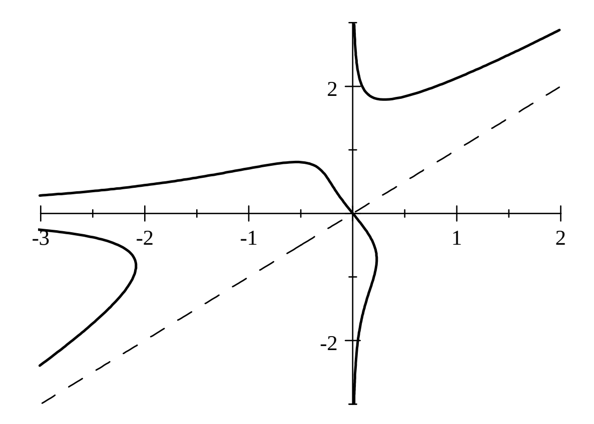


E 145- Dibujar la curva $(y-x)^3y^2x-(y-x)xy-2x-y = 0$.

Solución: La determinatriz (I) del diagrama de Newton-Cramer (figura A), corresponde a la asíntota: $x = 0$, estando dada la posición de la curva, por $x = \dfrac{1}{y^4}$ (figura B). La determinatriz (II) se refiere a la asíntota general: $y = x$; añadiendo las dos paralelas siguientes, se tiene la posición de la curva, $y_c - y_a = \sqrt[3]{\dfrac{3}{x^2}}$ (figura C). La determinatriz (III) se refiere a la asíntota: $y = 0$, estando dada la posición de la curva, por $y = \pm\sqrt{\dfrac{-2}{x^3}}$ (figura D). La determinatriz (IV) corresponde a la tangente en el origen: $y = -2x$; añadiendo la primera paralela, se tiene la posición de la curva, dada por $y_c - y_t = -6x^3$ (figura E).



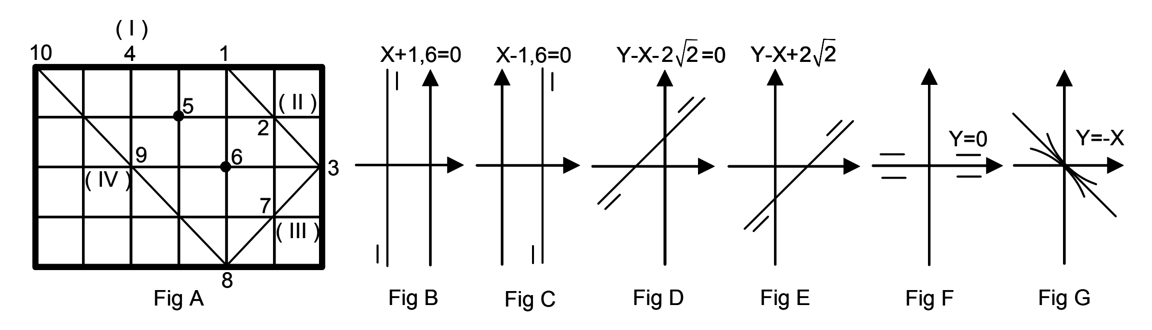
El dibujo de la curva es el siguiente:



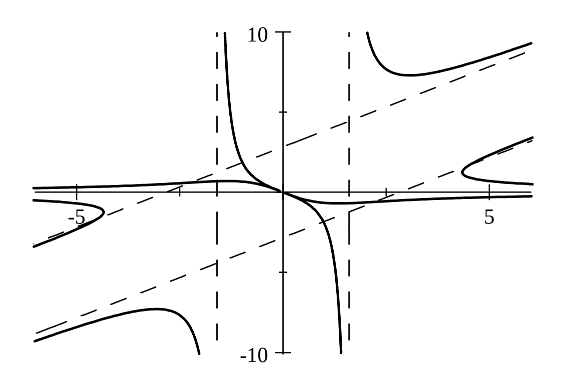
E 146- Dibujar la curva $(y-x)^2x^4y^2-(y+x)^3x^2y-4x^4+8x^2y^2-4y^4 = 0$.

Solución: La curva es simétrica respecto al origen de coordenadas. La determinatriz (I) del diagrama de Newton-Cramer (figura A), corresponde a las asíntotas: $x = \pm\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}} \simeq \pm 1.6$; añadiendo la primera paralela (monomio 5), se tiene la posición de la curva respecto a la asíntota $x \simeq -1.6$, que viene dada por

$x_c - x_a = \dfrac{2.5}{y}$ (figura B), y respecto a $x \simeq 1.6$, por $x_c - x_a = \dfrac{2.5}{y}$ (figura C). La determinatriz (II) se refiere a las asíntotas de dirección: $y = x$; añadiendo la primera paralela (monomios 4, 5, 6, 7), se tienen las asíntotas: $y - x \pm 2\sqrt{2} = 0$; añadiendo la segunda paralela, se tiene la posición de la curva respecto a $y - x = 2\sqrt{2}$, que está dada por $y_c - y_a = \dfrac{6}{x}$ (figura D), y respecto a $y - x = -2\sqrt{2}$, por $y_c - y_a = \dfrac{6}{x}$ (figura E). La determinatriz (III) corresponde a la asíntota: $y = 0$, estando dada la posición de la curva por $y_c - y_a = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{2x}$ (figura F). La determinatriz (IV) corresponde a las tangentes en el origen: $x = \pm y$; para $y - x = 0$, se tiene $y_c - y_t = \dfrac{\pm\sqrt{-2}\,x^2}{2}$, luego es imaginaria; para $y + x = 0$, se tiene $y_c - y_t = \dfrac{\pm x^3}{2}$ (figura G).



El dibujo de la curva es el siguiente:



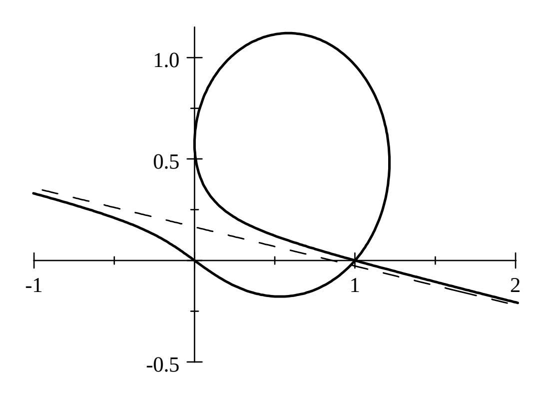
E 147- Dibujar la curva $x^3 + 3\sqrt{3}\,y^3 + 3\sqrt{3}\,x^2 y + xy^2 - 2x^2 - 6y^2 - 4\sqrt{3}\,xy + x + \sqrt{3}\,y = 0$.

Solución: La determinatriz (I) del diagrama de Newton-Cramer (figura A) corresponde a la asíntota general cuya dirección está definida por: $x^3 + 3\sqrt{3}\,y^3 + 3\sqrt{3}\,x^2 y + xy^2 = \left(x + 3\sqrt{3}\,y\right)(x^2 + y^2) = 0$, es decir: $y = \dfrac{-x}{3\sqrt{3}}$, teniendo la curva una parte cerrada; añadiendo la primera paralela se obtiene la asíntota: $y = \dfrac{-x}{3\sqrt{3}} + \dfrac{2}{7\sqrt{3}}$; añadiendo la segunda paralela, se tiene la posición de la curva, $y_c - y_a = \dfrac{-3}{14\sqrt{3}\,x}$ (figura B). La determinatriz (II) se refiere a la intersección con el eje XX': $(0,0)$, $(1,0)$. La determinatriz (III) corresponde a la tangente en el origen: $y = \dfrac{-x}{\sqrt{3}}$; añadiendo el resto de la ecuación, se tiene la posición de la curva $y_c - y_t = \dfrac{8x^3}{3\sqrt{3}}$ (figura C). La determinatriz (IV) se refiere a la intersección con el eje YY': $(0,0)$, $\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

2
6 4
(IV) (I)
9 7 3
(III)
8 5 1
(II)
Y=-X/3√3 +2/7√3
Y=-X/√3

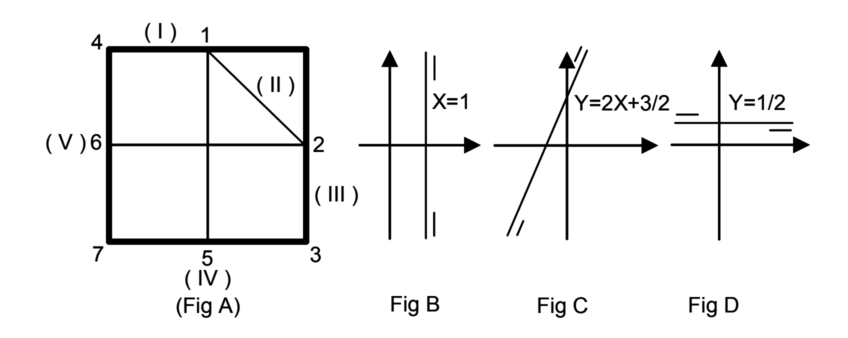
(Fig A) Fig B Fig C

El dibujo de la curva es el siguiente:

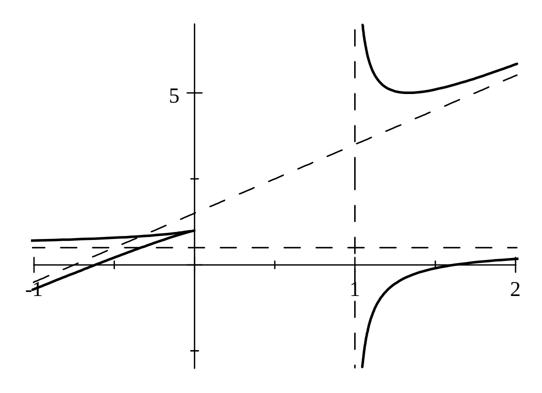


E 148- Dibujar la curva $(y-x-1)^2(x-1)-x^3 = 0$.

Solución: Desarrollando la ecuación: $xy^2-2x^2y+x^2-y^2-x+2y-1 = 0$, cuyo diagrama de Newton-Cramer se recoge en la figura A, La determinatriz (I) corresponde a la asíntota: $x = 1$; añadiendo la primera paralela, se tiene la posición de la curva, $y_c - y_a = \frac{1}{y^2}$ (figura B). La determinatriz (II) se refiere a la asíntota de dirección: $y = 2x$; añadiendo la primera paralela, se obtiene la asíntota: $y = 2x+\frac{3}{2}$, siendo la posición de la curva la indicada en la figura C. La curva corta a esta asíntota en el punto de abscisa $\frac{-1}{3}$. La determinatriz (III) corresponde a la asíntota: $y = \frac{1}{2}$; añadiendo la primera paralela, se tiene la posición de la curva, $y_c - y_a = \frac{-3x}{8}$ (figura D). La determinatriz (IV) se refiere a la intersección con XX': $\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2},0\right)$. La determinatriz (V) se refiere a la intersección con el eje YY': $(0,1)$ doble, cuya tangente doble tiene por pendiente 1 (el punto es de retroceso). La curva puede construirse como explícita, según la ecuación: $y = x+1\pm\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$.



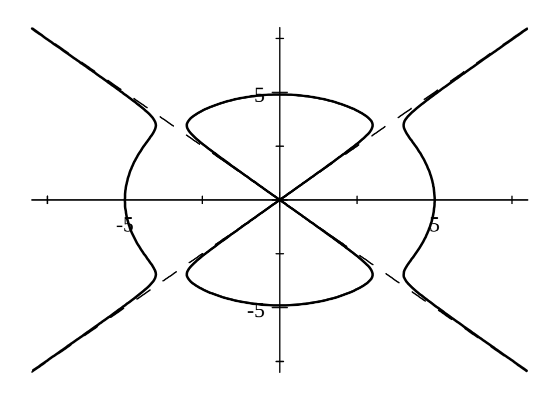
El dibujo de la curva es el siguiente:



E 149- Dibujar la curva $y^4-x^4-24y^2+25x^2 = 0$.

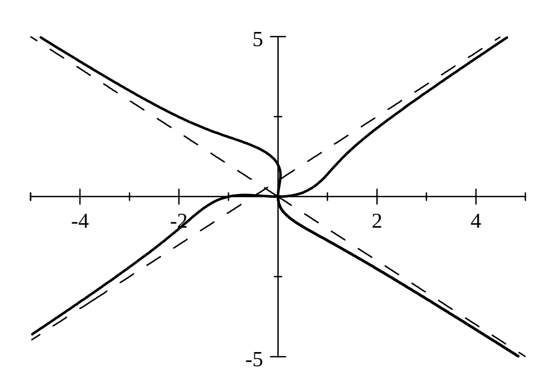
Solución: Resolviendo la ecuación en y^2, se tiene: $y^2 = 12\pm\sqrt{(x^2-9)(x^2-16)}$. No hay curva en los intervalos: $3<x<4$, $-4<x<-3$. Las asíntotas son: $y = \pm x$. La curva tiene una parte cerrada. Las

tangentes en el origen, son: $y = \pm\frac{5\sqrt{6}\,x}{12}$. Corta al eje XX' en: $(0,0)$, $(\pm 5,0)$. Corta al eje YY' en: $(0,0)$, $\left(0,\pm 2\sqrt{6}\right)$. El punto $\left(0,2\sqrt{6}\right)$ es un máximo, y el punto $\left(0,-2\sqrt{6}\right)$ es un mínimo. La curva es tangente a: $x = \pm 4$, en los puntos $\left(\pm 4,\pm 2\sqrt{3}\right)$, y es tangente a: $x = \pm 5$, en los puntos $\left(\pm 5,\pm 2\sqrt{6}\right)$. El dibujo de la curva es el siguiente (se han dibujado en línea de trazos las asíntotas):



E 150- Dibujar la curva $x^4 - y^4 + x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Solución: La curva tiene una asíntota paralela a la primera bisectriz, teniéndose que: $\lim\limits_{y=x} (y-x) = \lim\limits_{y=x} \frac{x^3 + y^3 - 3xy}{(x^2+y^2)(x+y)} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4x}$, luego la asíntota es: $y = x + \frac{1}{2}$, siendo $y_c - y_a = \frac{-3}{4x}$. La curva corta a esta asíntota en los puntos de coordenadas: $\left(\frac{-5 \pm \sqrt{31}}{24}, \frac{7 \pm \sqrt{31}}{24}\right)$. Tiene una asíntota paralela a la segunda bisectriz, teniéndose que: $\lim\limits_{y=-x} (y+x) = \lim\limits_{y=-x} \frac{x^3+y^3-3xy}{(x^2+y^2)(y-x)} = \frac{-3}{4x}$, luego la asíntota es la segunda bisectriz, siendo $y_c - y_a = \frac{-3}{4x}$. La curva corta a esta asíntota en $(0,0)$, siendo las tangentes en este punto, los ejes: $x = 0$, $y = 0$. El dibujo de la curva es el siguiente (se han dibujado en línea de trazos las asíntotas):



E 151- Dibujar la curva $x^4 - x^2y^2 - 2x^2 + 4y^2 - 4y + 1 = 0$.

Solución: La curva es simétrica respecto al eje YY'. La determinatriz (I) del diagrama de Newton-Cramer (figura A) corresponde a las asíntotas: $x = \pm 2$. Añadiendo la primera paralela se tiene: $x^2 - 4 = \frac{-4}{y}$. Luego para la asíntota: $x + 2 = 0$, $x_c - x_a = \frac{1}{y}$ (figura B). Para la asíntota: $x - 2 = 0$, $x_c - x_a = \frac{-1}{y}$ (figura C). Los puntos de intersección con estas asíntotas, son: $\left(\pm 2, \frac{9}{4}\right)$. La determinatriz (II) define las asíntotas: $y \pm x = 0$. Añadiendo la primera paralela se tiene: $x^2 - y^2 = \frac{2x^2 - 4y^2}{x^2}$. Luego para la asíntota: $y + x = 0$, se tiene $y_c - y_a = \frac{-1}{x}$ (figura D). Para la asíntota: $y - x = 0$, se tiene $y_c - y_a = \frac{1}{x}$ (figura D). La curva corta a estas asíntotas en los puntos de ordenada $y = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$. La curva corta a los ejes en los puntos $(\pm 1,0)$, que son mínimos, y en $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, que es un punto doble en el que las pendientes de las

tangentes son $\pm\frac{3}{4}$. También son puntos dobles $\left(\pm\sqrt{3}, 2\right)$.

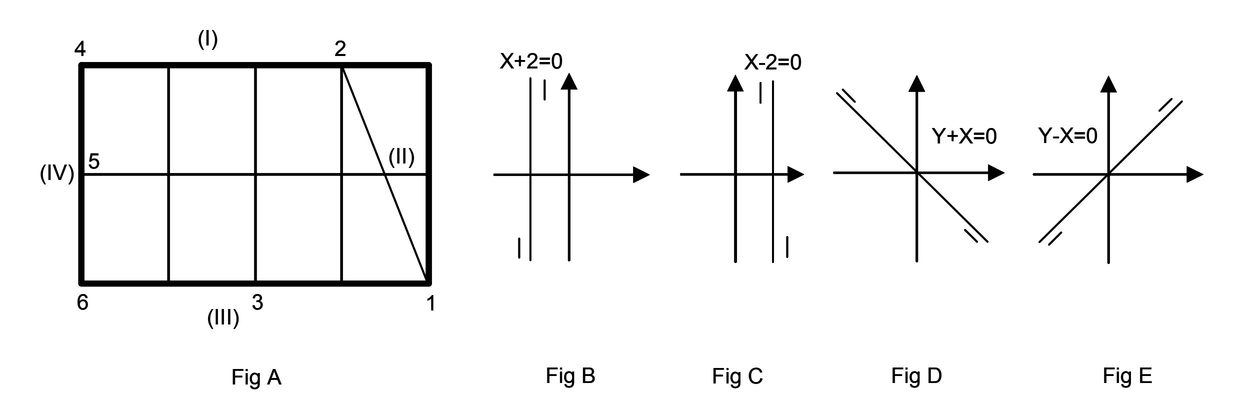
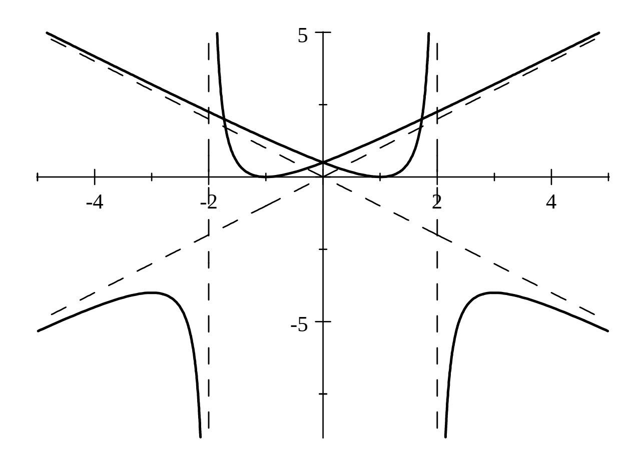


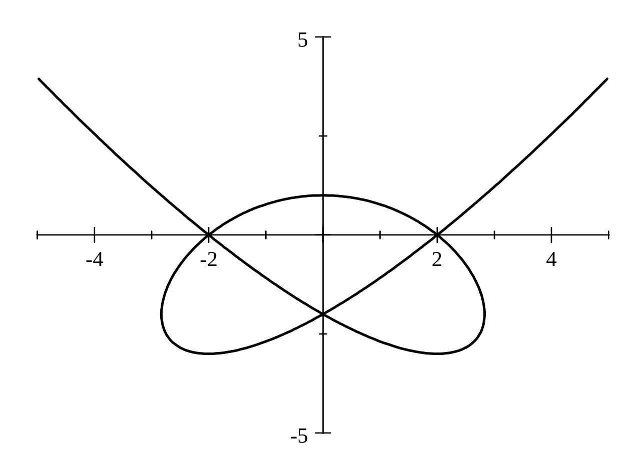
Fig A Fig B Fig C Fig D Fig E

El dibujo de la curva es el siguiente (en líneas de trazos se han incluido las asíntotas):



E 152- Dibujar la curva $x^4 - 4y^3 - 12y^2 - 8x^2 + 16 = 0$.

Solución: La curva es simétrica respecto al eje YY'. Siendo: $x^2 = 4 \pm 2y\sqrt{y+3}$, hay curva para $y > -3$. No tiene asíntotas. Tiene una rama parabólica según el eje OY. Corta a los ejes en: $(\pm 2, 0)$, $(0, 1)$ y $(0, -2)$. Las pendientes de las tangentes en $(\pm 2, 0)$, que son puntos dobles, son: $\pm\frac{1}{3}$ Las de las tangentes en $(0, -2)$, que es punto doble, son: $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. El punto $(0, 1)$ es un máximo. Los puntos $(\pm 2, -3)$ son mínimos. El dibujo de la curva es el siguiente:



E 153- Dada la curva $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - 2$, hallar la ecuación del conjunto de las tangentes trazadas desde el punto $(0,3)$.

Solución: Sea la tangente: $y - 3 = mx$, que corta a la curva en los puntos cuyo parámetro t verifica la ecuación: $t^3 - 5 = m(t^2 - 1)$, cuya derivada es: $3t^2 - 2mt = 0$. De donde se tiene que: $t = \frac{2m}{3}$. Por tanto: $\frac{8m^3}{27} - 5 = m\left(\frac{4m^2}{9} - 1\right)$. Como $m = \frac{y-3}{x}$, sustituyendo este valor en la ecuación anterior, se tiene: $\frac{8\left(\frac{y-3}{x}\right)^3}{27} - 5 = \frac{y-3}{x}\left(\frac{4\left(\frac{y-3}{x}\right)^2}{9} - 1\right)$. Operando y simplificando, se tiene la ecuación pedida: $135x^3 - 27x^2y + 4y^3 + 81x^2 - 36y^2 + 108y - 108 = 0$.

E 154- Dada la curva $x = t^3 - 1$, $y = t$, hallar el lugar geométrico de los puntos desde los que se le pueden trazar dos tangentes perpendiculares entre sí.

Solución: Sea la tangente trazada desde (α,β): $y - \beta = m(x - \alpha)$, que corta a la curva en los puntos cuyo parámetro t verifica la ecuación: $t - \beta = m(t^3 - 1 - \alpha)$, es decir: $mt^3 - t - m(\alpha+1) + \beta = 0$, o bien: $t(mt^2 - 1) - m(\alpha+1) + \beta = 0$ (**A**). Derivando, se tiene que: $3mt^2 - 1 = 0$, $t^2 = \frac{1}{3m}$. Sustituyendo en (**A**): $t = \frac{3[\beta - (\alpha+1)m]}{2}$. Como $m = \frac{1}{3t^2}$, se tiene que: $t^2 = \frac{1}{3m} = \left[\frac{3[\beta - (\alpha+1)m]}{2}\right]^2$, es decir: $4 = 27m[\beta - (\alpha+1)m]^2$, o bien: $27(\alpha+1)^2m^3 - 54\beta(\alpha+1)m^2 + 27\beta^2m - 4 = 0$. Como, por Cardano, $m_1m_2m_3 = \frac{4}{27(\alpha+1)^2} = m_1 \cdot (-1)$, se tiene que: $m_1 = \frac{-4}{27(\alpha+1)^2}$. Sustituyendo este valor en la ecuación anterior, se tiene la ecuación pedida: $27^2(\alpha+1)^4 + 27^2\beta^2(\alpha+1)^2 + 216\beta(\alpha+1) + 16 = 0$.

E 155- Dada la curva $x = \frac{t^3}{(t-1)(t+2)}$, $y = \frac{t^2 - 2t}{t-1}$, hallar sus puntos singulares y sus correspondientes tangentes.

Solución: Resolviendo el sistema: $\frac{t_1^3}{(t_1-1)(t_1+2)} = \frac{t_2^3}{(t_2-1)(t_2+2)}$, $\frac{t_1^2 - 2t_1}{t_1 - 1} = \frac{t_2^2 - 2t_2}{t_2 - 1}$, se obtiene: $t_1 = \sqrt{2}$, $t_2 = -\sqrt{2}$. Luego sustituyendo estos valores en las ecuaciones dadas, se obtiene el punto doble $(2,-2)$. Calculando las derivadas x'_t, y'_t, y particularizándolas para el punto encontrado, se tiene: para $t = \sqrt{2}$, $m = -3 - 2\sqrt{2}$, y para $t = -\sqrt{2}$, $m = -3 + 2\sqrt{2}$. Por tanto, las tangentes pedidas son: $y + 2 = \left(-3 + 2\sqrt{2}\right)(x-2)$, $y + 2 = \left(-3 - 2\sqrt{2}\right)(x-2)$.

E 156- Hallar las ecuaciones paramétricas de la lemniscata $(x^2 + y^2)^2 - a^2xy = 0$.

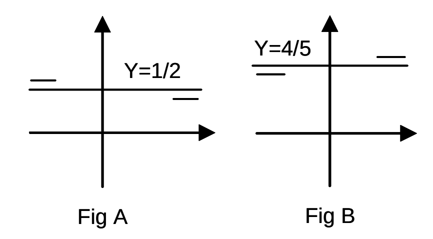
Solución: Cortando por $y = \lambda^2x$, se tiene: $x = \frac{a\lambda}{1+\lambda^4}$, $y = \frac{a\lambda^3}{1+\lambda^4}$.

E 157- Dada la curva $x = t^2$, $y = \frac{1}{t}$, determinar el número de tangentes que se le pueden trazar desde un punto P exterior, y hallar el lugar geométrico de P para que dos de las tres tangentes sean perpendiculares entre sí.

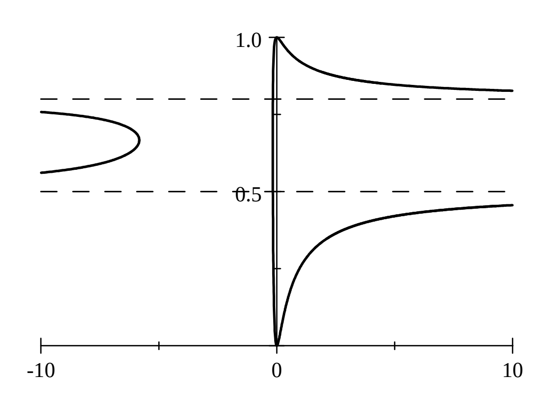
Solución: Derivando: $x' = 2t$, $y' = \frac{-1}{t^2}$. La pendiente de la tangente es: $\frac{-1}{t^2} \div 2t = \frac{-1}{2t^3}$. La tangente es: $Y - y = \frac{-1}{2t^3}(X - x)$. Luego: $2t^3y - 2t^2 = -(x - t^2)$, es decir: $2yt^3 - 3t^2 + x = 0$. Por tanto, hay tres tangentes correspondientes a cada una de las tres raíces t. Al ser dos de ellas perpendiculares entre sí, se tiene: $\frac{-1}{2t_1^3} \cdot \frac{-1}{2t_2^3} = -1$, $t_1t_2 = \frac{-1}{\sqrt[3]{4}}$. Ahora bien, $S_1 = \frac{3}{2y}$, $S_2 = 0$, $S_3 = \frac{-x}{2y}$. Luego, $t_3 = \frac{\sqrt[3]{4}\,x}{2y}$, $t_1 + t_2 = \frac{3}{2y} - \frac{\sqrt[3]{4}\,x}{2y} = \frac{2y}{2\sqrt[3]{2}\,x}$. De donde se tiene el lugar pedido: $x^2 + y^2 - \frac{3x}{\sqrt[3]{4}} = 0$.

E 158- Dada la curva $x = \frac{t}{(t-1)(t-2)}$, $y = \frac{t^2}{t^2+1}$, hallar sus máximos y mínimos, y dibujarla.

Solución: 1º) Máximos y mínimos: Derivando, $x' = \frac{-t^2+2}{(t-1)^2(t-2)^2}$, $y' = \frac{2t}{(t^2+1)^2}$. Para $x' = 0$, $t = \pm\sqrt{2}$, siendo $y' \neq 0$. Sustituyendo, se tienen los puntos $\left(-3 \mp 2\sqrt{2}, \frac{2}{3}\right)$ máximo y mínimo de x, respectivamente. Para $y' = 0$, $t = 0$, siendo $x' \neq 0$. Sustituyendo, se tiene el punto $(0,0)$, mínimo de y. Para $x' = y' = 0$, $t = \infty$. Sustituyendo, se tiene el punto $(0,1)$ máximo de y. 2º) Asíntotas: Para $t = 1$, se tiene la asíntota: $y = \frac{1}{2}$; para hallar la posición de la curva respecto a ella, se hace $t = 1+\theta$, con $\theta \to 0$, con lo que $x = \frac{1}{-\theta}$, $y_c - y_a = \theta$, luego para $\theta > 0$, $x = -\infty$, $y_c > y_a$, y para $\theta < 0$, $x = +\infty$, $y_c < y_a$ (figura A). Para $t = 2$, se tiene la asíntota: $y = \frac{4}{5}$; para hallar la posición de la curva respecto a ella, se hace $t = 2+\theta$, con lo que $x = \frac{2}{\theta}$, $y_c - y_a = \frac{4\theta}{5}$, luego para $\theta > 0$, $x = +\infty$, $y_c > y_a$, y para $\theta < 0$, $x = -\infty$, $y_c < y_a$ (figura B). No hay asíntotas paralelas al eje YY', ni asíntota general. 3º) Intersecciones con los ejes: Son los puntos ya estudiados: $(0,0)$ y $(0,1)$.

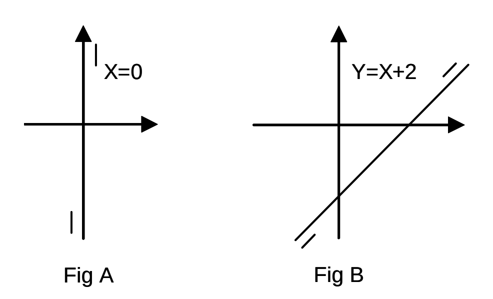


El dibujo de la curva es el siguiente:

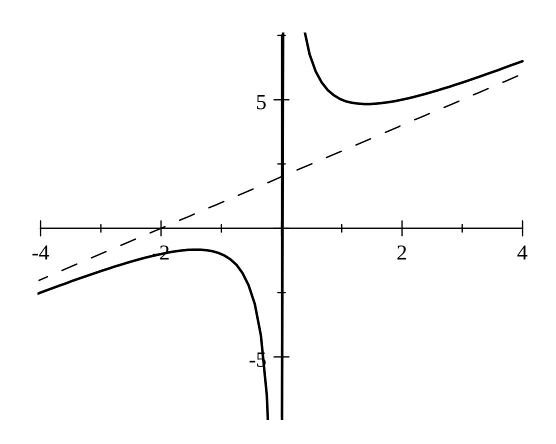


E 159- Dada la curva $x = \frac{t^2-1}{t+1}$, $y = \frac{t^2+1}{t-1}$, hallar sus asíntotas y la posición de la curva respecto a ellas.

Solución: Simplificando, se tienen las ecuaciones: $x = t-1$, $y = \frac{t^2+1}{t-1}$. Para $t = 1$, $y = \infty$, siendo la asíntota: $x = 0$; para hallar la posición de la curva, se hace $t = 1+\theta$, con $\theta \to 0$, $x = \theta$, $y = \frac{2}{\theta}$, luego para $\theta > 0$, $x > 0$, $y = +\infty$, y para $\theta < 0$, $x < 0$, $y = -\infty$ (figura A). Para $t = \infty$, $x = \infty$, $y = \infty$, $a = \lim_{t\to\infty} \frac{y}{x} = 1$, $b = \lim_{t\to\infty} (y-x) = 2$, siendo la asíntota general: $y = x+2$; para hallar la posición de la curva, se tiene que $y_c - y_a = \frac{2}{t-1}$, luego para $t = +\infty$, $x \to +\infty$, $y_c > y_a$, y para $t = -\infty$, $x \to -\infty$, $y_c < y_a$ (figura B).

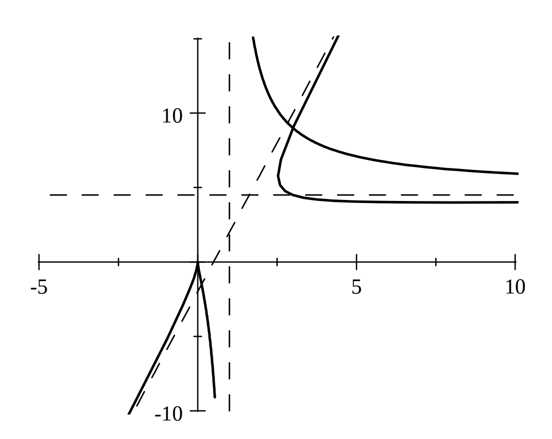


El dibujo de la curva es el siguiente:



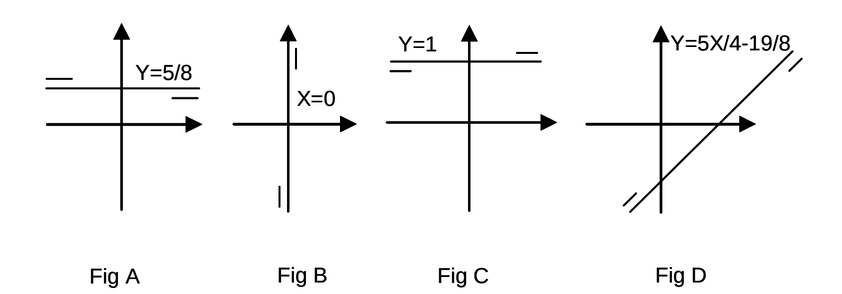
E 160- Dada la curva $x = \dfrac{t^3}{(t-3)^2(t-1)}$, $y = \dfrac{t^2}{t-1}$, hallar sus puntos singulares y las correspondientes tangentes.

Solución: Resolviendo el sistema: $\dfrac{t_1^3}{(t_1-3)^2(t_1-1)} = \dfrac{t_2^3}{(t_2-3)^2(t_2-1)}$, $\dfrac{t_1^2}{t_1-1} = \dfrac{t_2^2}{t_2-1}$, se tiene: $t_1 = t_2 = 0$, que corresponden al punto $(0,0)$, y $t_1 = \dfrac{9+3\sqrt{5}}{2}$, $t_2 = \dfrac{9-3\sqrt{5}}{2}$, que corresponden al punto $(3,9)$. Para $(0,0)$, la tangente es: $x = 0$. Para $(3,9)$, $\dfrac{y'}{x'} = \dfrac{(t-2)(t-3)^3}{t(-7t+9)} = \dfrac{3\left(1 \pm \sqrt{5}\right)}{2}$, siendo las tangentes: $y - 9 = \dfrac{3\left(1 \pm \sqrt{5}\right)}{2}(x-3)$. El dibujo de la curva es el siguiente:

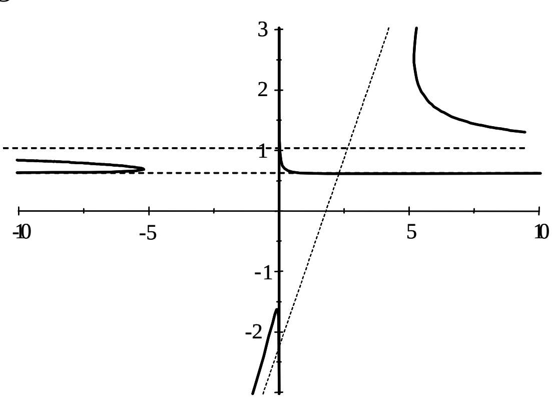


E 161- Dada la curva $x = \dfrac{t^3}{t^2-4}$, $y = \dfrac{t^2+1}{(t-2)t}$, hallar las asíntotas y la posición de la curva respecta a ellas.

Solución: Para $t = -2$, $x = \infty$, siendo la asíntota: $y = \dfrac{5}{8}$; haciendo $t = -2+\theta$, con $\theta \to 0$, se tiene: $x = \dfrac{2}{\theta}$, $y_c - y_a = \dfrac{-\theta}{2}$, luego para $\theta > 0$, $x = +\infty$, $y_a > y_c$, y para $\theta < 0$, $x = -\infty$, $y_c > y_a$ (figura A). Para $t = 0$, $y = \infty$, siendo la asíntota: $x = 0$; haciendo $t = \theta$, con $\theta \to 0$, se tiene $y = \dfrac{-1}{2\theta}$, $x_c - x_a = \dfrac{-\theta^3}{4}$, luego para $\theta > 0$, $y = -\infty$, $x_c < x_a$, y para $\theta < 0$, $y = +\infty$, $x_c > x_a$ (figura B). Para $t = \infty$, $x = \infty$, siendo la asíntota: $y = 1$; como $y_c - y_a = \dfrac{2t+1}{(t-2)t}$, para $t = +\infty$, $x = +\infty$, $y_c > y_a$, y para $t = -\infty$, $x = -\infty$, $y_c < y_a$ (figura C). Para $t = 2$, se tiene la asíntota general de ecuación: $y = ax + b$, en la que $a = \lim_{t=2} \dfrac{y}{x} = \lim_{t=2} \dfrac{(t^2+1)(t+2)}{t^4} = \dfrac{5}{4}$, $b = \lim_{t=2} \left[\dfrac{t^2+1}{(t-2)t} - \dfrac{5t^3}{4(t^2-4)} \right] = \dfrac{-19}{8}$, luego esta asíntota es: $y = \dfrac{5x}{4} - \dfrac{19}{8}$; haciendo $t = 2+\theta$, con $\theta \to 0$, $y_c - y_a = \dfrac{t^2+1}{(t-2)t} - \dfrac{5t^3}{4(t^2-4)} + \dfrac{19}{8} = \dfrac{-31\theta}{32}$, para $\theta > 0$, $y = +\infty$, $y_c < y_a$, y para $\theta < 0$, $y = -\infty$, $y_c > y_a$ (figura D).

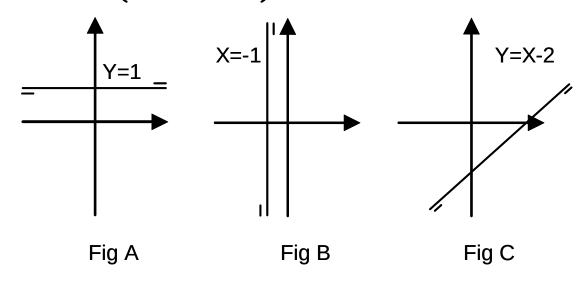


El dibujo de la curva es el siguiente:

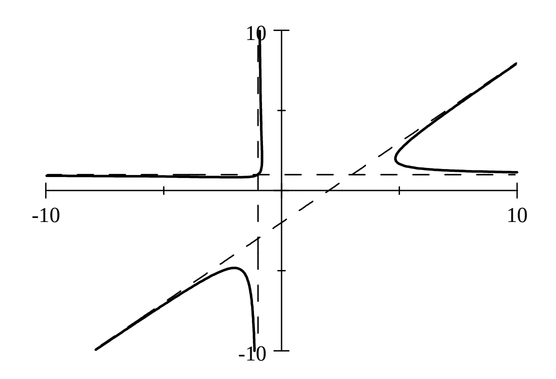


E 162- Dibujar la curva $x = -\dfrac{1+t^2}{t(t-1)}$, $y = -\dfrac{1+t^2}{t-1}$.

Solución: 1º) Asíntotas: Para $t = 0$, $x = \infty$, asíntota: $y = 1$; haciendo $t = \theta$, con $\theta \to 0$, $x = \dfrac{1}{\theta}$, $y_c - y_a = \theta$, luego para $\theta > 0$, $x = +\infty$, $y_c > y_a$, y para $\theta < 0$, $x = -\infty$, $y_c < y_a$ (figura A). Para $t = \infty$, $y = \infty$, asíntota: $x = 1$; como $x_c - x_a = \dfrac{-(t+1)}{t(t-1)}$, para $t = +\infty$, $y = -\infty$, $x_c < x_a$, y para $t = -\infty$, $y = +\infty$, $x_c > x_a$ (figura B). Para $t = 1$, $y = x = \infty$, $a = \lim\limits_{t=1} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{t=1} t = 1$, $b = \lim\limits_{t=1} (y - x) = \lim\limits_{t=1} \dfrac{-t^2-1}{t} = -2$, siendo la asíntota general: $y = x - 2$; haciendo $t = 1 + \theta$, con $\theta \to 0$, $y_c - y_a = -\theta^2$, luego siempre $y_c < y_a$ (figura C). 2º) Máximos y mínimos: para $y' = 0$, $t = 1 \pm \sqrt{2}$, teniéndose el punto $\left(-2, -2 \mp 2\sqrt{2}\right)$; para $x' = 0$, $t = -1 \pm \sqrt{2}$, siendo el punto $\left(2 \pm 2\sqrt{2}, 2\right)$. 3º) No hay intersecciones con los ejes.

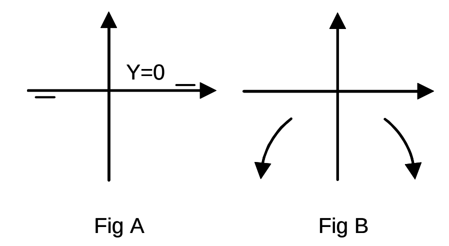


El dibujo de la curva es el siguiente:

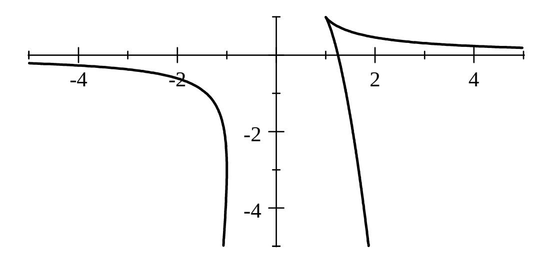


E 163- Dibujar la curva $x = \frac{t^2+1}{2t}$, $y = \frac{2t-1}{t^2}$.

Solución: 1º) Intervalos de existencia: Como $t^2 - 2xt + 1 = 0$, $t = x \pm \sqrt{x^2-1}$, luego no hay curva en $-1 < x < 1$. Como $yt^2 - 2t + 1 = 0$, $t = \frac{1 \pm \sqrt{1-y}}{y}$, luego no hay curva para $y > 1$. 2º) Asíntotas: Para $t = \infty$, $x = \infty$, asíntota: $y = 0$; para determinar la posición de la curva respecto a la asíntota, se tiene que para $t = +\infty$, $x = +\infty$, $y > 0$, y para $t = -\infty$, $x = -\infty$, $y < 0$ (figura A). Para $t = 0$, $x = \infty$, $y = -\infty$; $a = \lim_{t\to 0} \frac{y}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{2(2t-1)}{t(t^2+1)} = -\infty$, se trata, por tanto, de una rama parabólica según el eje YY' (figura B). 3º) Intersección con los ejes y con las rectas $x = \pm 1$, y las pendientes m de sus tangentes: para $t = \frac{1}{2}$, el punto de intersección con el eje XX' es $\left(\frac{5}{4}, 0\right)$, siendo $m = \frac{-16}{3}$; para $t = 1$, la intersección con $x = 1$, es el punto de retroceso $(1,1)$, $m = -2$; para $t = -1$, la intersección con $x = -1$, es $(-1,-3)$, $m = \infty$.

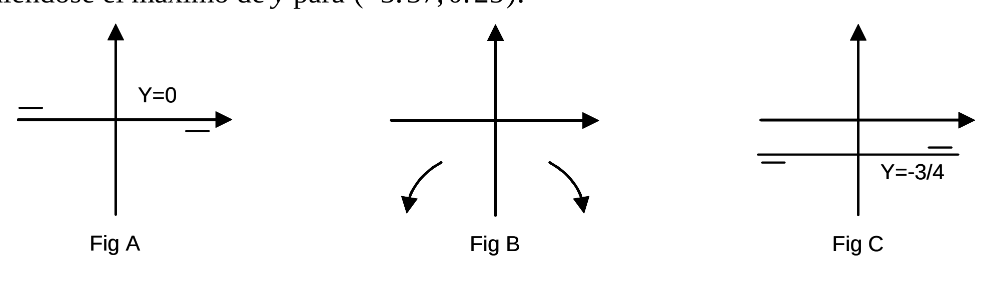


El dibujo de la curva es el siguiente:

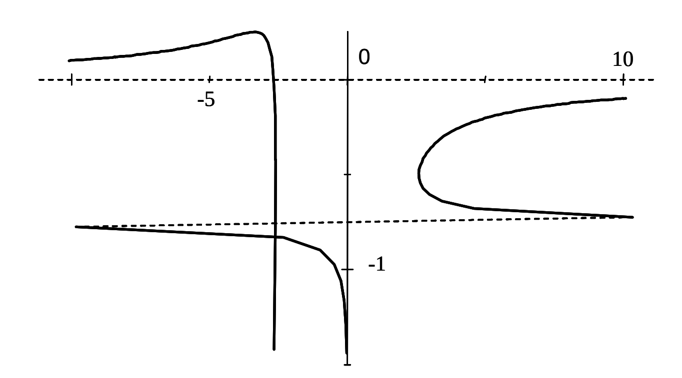


E 164- Dibujar la curva $x = \frac{t^3}{1-t^2}$, $y = \frac{t-2}{(1-t)^2}$.

Solución: 1º) Intervalos de existencia: Como $yt^2 - (2y+1)t + y + 2 = 0$, $t = \frac{2y+1 \pm \sqrt{1-4y}}{2y}$, luego no hay curva para $y > \frac{1}{4}$. 2º) Asíntotas: Para $t = \infty$, $x = \infty$, asíntota: $y = 0$; para determinar la posición de la curva, se tiene que para $x = +\infty$, $y_a > y_c$, y para $x = -\infty$, $y_c > y_a$ (figura A). Para $t = 1$, $x = \infty$, $y = \infty$, $\frac{y}{x} = \infty$, luego se trata de una rama parabólica según el eje OY (figura B). Para $t = -1$, $x = \infty$, asíntota: $y = \frac{-3}{4}$; para determinar la posición de la curva, se tiene que para $x = +\infty$, $y_c > y_a$, y para $x = -\infty$, $y_c < y_a$ (figura C). 3º) Intersección con los ejes, y pendientes m de sus tangentes: Para $t = 0$, el punto de corte es $(0,-2)$, que es punto de inflexión, siendo $m = \infty$. Para $t = 2$, se tiene el punto de corte $\left(\frac{-8}{3}, 0\right)$, siendo $m = \frac{-9}{4}$. 4º) Punto de cruce: Para hallarlo se forma el sistema: $\frac{t_1^3}{1-t_1^2} = \frac{t_2^3}{1-t_2^2}$, $\frac{t_1-2}{(1-t_1)^2} = \frac{t_2-2}{(1-t_2)^2}$, cuya solución es $t_1 = 1{,}651$, $t_2 = -0{,}866$, siendo el punto de cruce $(-2.6, -0.8)$. 5º) Máximos y mínimos: Para $x' = 0$, se tiene $t = 0$ (punto de inflexión ya estudiado), y $t = \pm\sqrt{3}$, obteniéndose el máximo de x para $(-2.6, -0.5)$, y el mínimo de x para $(2.6, -0.5)$. Para $y' = 0$, se tiene $t = 3$, obteniéndose el máximo de y para $(-3.37, 0.25)$.

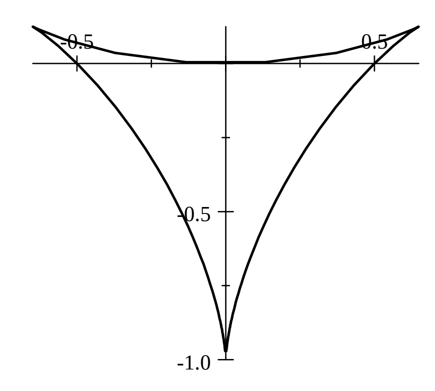


El dibujo de la curva es el siguiente:



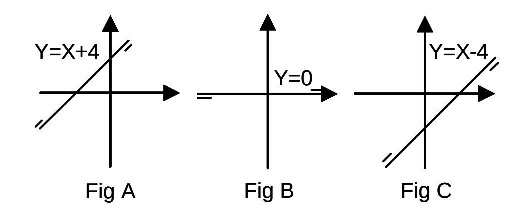
E 165- Dibujar la curva $x = \dfrac{2t}{(1+t^2)^2}$, $y = \dfrac{t^2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$.

Solución: 1º) Intervalo de existencia y simetría: Como $(y+1)t^4 + (2y-1)t^2 + y = 0$, $t^2 = \dfrac{1-2y \pm \sqrt{1-8y}}{2(y+1)}$, luego no hay curva para $y > \dfrac{1}{8}$, ni para $y < -1$. La curva es simétrica respecto al eje YY'. 2º) La curva es cerrada, no tiene asíntotas. 3º) Intersección con los ejes, y pendientes m de sus tangentes: Para $t = 0$, $(0,0)$, $m = 0$. Para $t = 1$, $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$, $m = 1$. Para $t = -1$, $\left(\dfrac{-1}{2},0\right)$, $m = -1$. 4º) Máximos y mínimos: Para $x' = 0$, $t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $t = \infty$. Para $y' = 0$, $t = 0$, $t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $t = \infty$. Los tres puntos $\left(\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{8}, \dfrac{1}{8}\right)$ y $(0,-1)$, correspondientes a los tres valores de t que anulan a las dos derivadas, son puntos de retroceso, siendo las pendientes de sus tangentes, respectivamente, $\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ y ∞. El punto $(0,0)$, correspondiente a $t = 0$, es un mínimo de y. El dibujo de la curva es el siguiente:

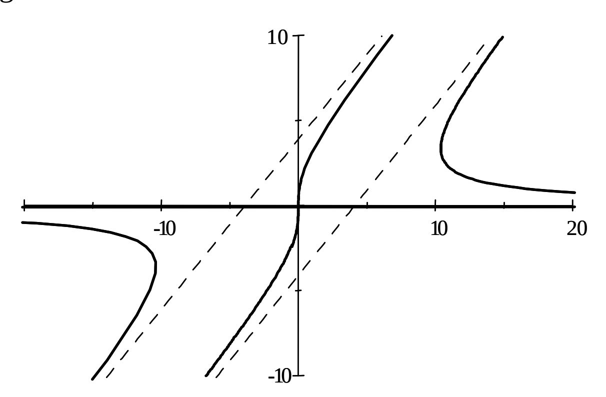


E 166- Dibujar la curva $x = \dfrac{t^3}{(t-1)(t-2)}$, $y = \dfrac{t^2-2t}{t-1}$.

Solución: 1º) Asíntotas: Para $t = 1$, $x = \infty$, $y = \infty$, $a = \lim\limits_{t\to1} \dfrac{y}{x} = \dfrac{(t-2)^2}{t^2} = 1$, $b = \lim\limits_{t\to1} (y-x) = \dfrac{-4t}{t-2} = 4$, la asíntota es: $y = x+4$; para determinar la posición de la curva, se tiene para $t = 1+\theta$, con $\theta \to 0$, $y = \dfrac{-1}{\theta}$, $y_c - y_a = 8\theta$, luego para $\theta > 0$, $y = -\infty$, $y_c > y_a$, y para $\theta < 0$, $y = +\infty$, $y_c < y_a$ (figura A). Para $t = 2$, $x = \infty$, la asíntota es: $y = 0$; para determinar la posición de la curva, se tiene para $t = 2+\theta$, con $\theta \to 0$, $x = \dfrac{8}{\theta}$, $y_c - y_a = 2\theta$, luego para $\theta > 0$, $x = +\infty$, $y_c > y_a$, y para $\theta < 0$, $x = -\infty$, $y_c < y_a$ (figura B). Para $t = \infty$, $x = \infty$, $y = \infty$, $a = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{y}{x} = 1$, $b = \lim\limits_{t\to\infty} (y-x) = -4$, por tanto la asíntota es: $y = x-4$; para $t = +\infty$, $x > 0$, $y_c < y_a$, y para $t = -\infty$, $x < 0$, $y_c > y_a$ (figura C). 2º) Intersección con los ejes: Para $t = 0$, $(0,0)$, punto de inflexión, siendo ∞ la pendiente de la tangente. 3º) Máximos y mínimos: Para $x' = 0$, la única raíz real es $t = 0$, ya estudiado. Para $y' = 0$, no hay raíces reales.

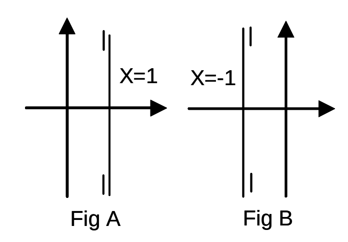


El dibujo de la curva es el siguiente:

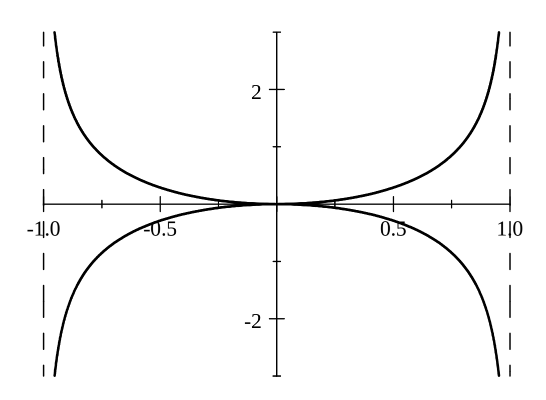


E 167- Dibujar la curva $x = \dfrac{2t}{1+t^2}, y = \dfrac{4t^2}{1-t^4}$.

Solución: 1º) Intervalo de existencia y simetría: Como $xt^2 - 2t + x = 0$, $t = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-x^2}}{x}$, luego la curva es real para $-1 \leq x \leq 1$. La curva es simétrica con relación a los ejes XX', YY', y por tanto con relación al origen. 2º) Asíntotas: Para $t = 1$, $y = \infty$, la asíntota es: $x = 1$; $x_c < x_a$ (figura A). Para $t = -1$, $y = \infty$, la asíntota es: $x = -1$; $x_c > x_a$ (figura B). 3º) Intersección con los ejes: $t = 0$, $(0,0)$, siendo 0 la pendiente de la tangente. 4º) Máximos y mínimos: Para $y' = 0$, $t = 0$ y $t = \infty$, ya estudiados.



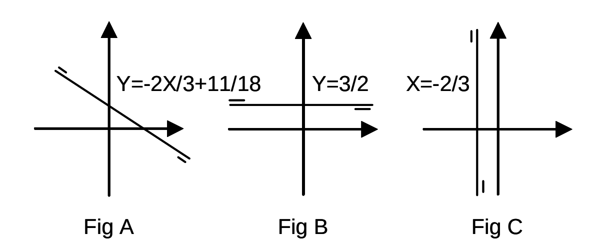
El dibujo de la curva es el siguiente:



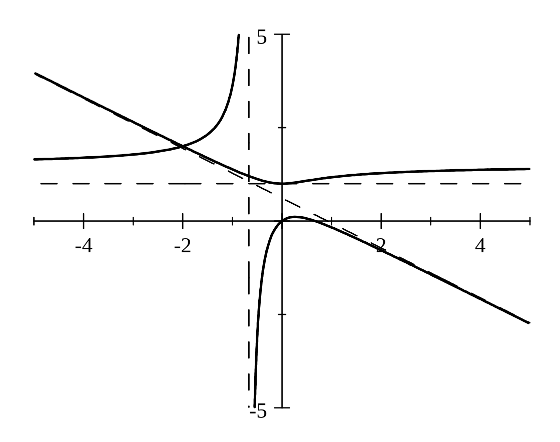
E 168- Dibujar la curva $x = \dfrac{t}{t^2-1}, y = \dfrac{t-2}{t^2+t-2}$.

Solución: 1º) Asíntotas: Para $t = 1$, $x = \infty$, $y = \infty$, $a = \lim\limits_{t\to1} \dfrac{y}{x} = \dfrac{-2}{3}$, $b = \lim\limits_{t\to1} \left(y + \dfrac{2x}{3}\right) = \dfrac{11}{18}$, luego la asíntota es: $y = \dfrac{-2x}{3} + \dfrac{11}{18}$; para $t = 1+\theta$, con $\theta \to 0$, $x = \dfrac{1}{2\theta}$, $y_c - y_a = \dfrac{-25\theta}{108}$, luego para $\theta > 0$, $x > 0$, $y_c < y_a$, y para $\theta < 0$, $x < 0$, $y_c > y_a$ (figura A). Para $t = -1$, $x = \infty$, la asíntota es: $y = \dfrac{3}{2}$; para

$t = -1+\theta$, con $\theta \to 0$, $x = \frac{1}{2\theta}$, $y_c - y_a = \frac{-5\theta}{4}$, luego para $\theta > 0$, $x > 0$, $y_c < y_a$, y para $\theta < 0$, $x < 0$, $y_c > y_a$ (figura B). Para $t = -2$, $y = \infty$, la asíntota es: $x = \frac{-2}{3}$; para $t = -2+\theta$, con $\theta \to 0$, $y = \frac{4}{3\theta}$, $x_c - x_a = \frac{-5\theta}{9}$, luego para $\theta > 0$, $y > 0$, $x_c < x_a$, y para $\theta < 0$, $y < 0$, $x_c > x_a$ (figura C). 2º) Intersección con los ejes y pendiente m de la tangente: Para $t = 0$, $(0,1)$, $m = 0$. Para $t = 2$, $\left(\frac{2}{3},0\right)$, $m = \frac{-9}{20}$. Para $t = \infty$, $(0,0)$, $m = 1$. 3º) Máximos y mínimos: Para $y' = 0$, se tienen los valores $t = 0$, $t = 4$. Ya se ha estudiado $t = 0$, que da el mínimo $(0,1)$. Para $t = 4$, se tiene el máximo $\left(\frac{4}{15},\frac{1}{9}\right)$. 4º) Punto de cruce: Se plantea el sistema: $\frac{t_1}{t_1^2-1} = \frac{t_2}{t_2^2-1}$, $\frac{t_1-2}{t_1^2+t_1-2} = \frac{t_2-2}{t_2^2+t_2-2}$, cuya solución es $t = \frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$, que corresponde al punto doble $(-2,2)$.



El dibujo de la curva es el siguiente:



E 169- Dada la curva $x = \frac{t^2}{1-t^2}$, $y = \frac{t^3}{1-t^2}$, hallar las condiciones para que seis de sus puntos sean concíclicos.

Solución: Sea el círculo: $x^2+y^2+Ax+By+C = 0$. Luego: $\frac{t^4}{(1-t^2)^2}+\frac{t^6}{(1-t^2)^2}+\frac{At^2}{1-t^2}+$ $+\frac{Bt^3}{1-t^2}+C = 0$, es decir: $t^6-Bt^5+(1-A+C)t^4+Bt^3+(A-2C)t^2+C = 0$. De donde las condiciones para que seis de sus puntos sean concíclicos, son: $S_1 = B = -S_3$ (es decir, $S_1+S_3 = 0$), $S_5 = 0$, $S_2+S_4+S_6 = 1$, siendo S_1 la suma de las seis raíces de la ecuación en t, S_2 la suma de sus productos binarios, S_4 la suma de sus productos cuaternarios, y S_6 el producto de sus seis raíces.

E 170- Dada la curva $x = t^3-t$, $y = t^3-t^2$, hallar la condición para que tres puntos de la curva estén alineados.

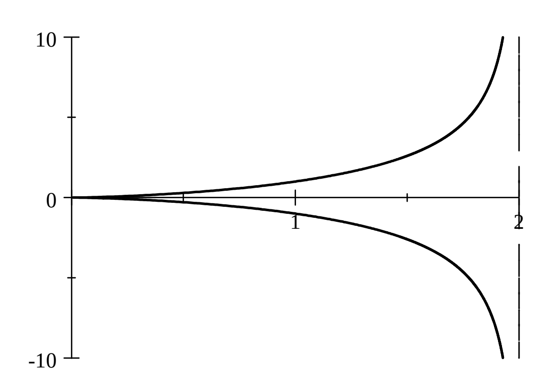
Solución: Sea la recta: $ax+by+1 = 0$. Luego se tiene que: $a(t^3-t)+b(t^3-t^2)+1 = 0$, es decir: $(a+b)t^3-bt^2-at+1 = 0$. Por tanto, $S_1 = \frac{b}{a+b}$, $S_2 = \frac{-a}{a+b}$, $S_3 = \frac{-1}{a+b}$. Luego la condición pedida es: $S_1-S_2 = \frac{a+b}{a+b} = 1$, siendo S_1 la suma de las tres raíces de la ecuación en t, y S_2 la suma de sus productos binarios.

E 171- Dada la curva $x = \frac{t^2}{1+t^3}$, $y = \frac{t}{1+t^3}$, hallar la condición para que seis puntos de la curva estén sobre una cónica.

Solución: Sea la cónica $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+1=0$. Luego: $\frac{At^4}{(1+t^3)^2}+\frac{Bt^2}{(1+t^3)^2}+$ $+\frac{Ct^3}{(1+t^3)^2}+\frac{Dt^2}{1+t^3}+\frac{Et}{1+t^3}+1=0$, de donde se tiene: $t^6+Dt^5+(A+E)t^4+(C+2)t^3+(B+D)t^2+$ $+Et+1=0$. Luego la condición pedida es: $S_6=t_1t_2t_3t_4t_5t_6=1$.

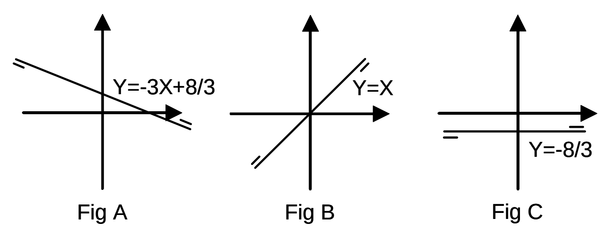
E 172- Dibujar la curva $x=\frac{2}{1+t^2}$, $y=\frac{2}{t(1+t^2)}$.

Solución: 1º) Intervalo de existencia y simetría: Hay curva en el intervalo $0\le x\le 2$. La curva es simétrica respecto al eje XX'. 2º) Asíntotas: Para $t=0$, $y=\infty$, siendo la asíntota: $x=2$; para $x=2-\theta$, con $\theta\to 0$, $y=\pm\infty$. 3º) Intersección con los ejes: $t=\infty$, $(0,0)$, siendo 0 la pendiente de la tangente, es punto de retroceso. 4º) Máximos y mínimos: No hay. 5º) Puntos de cruce: No hay. 6º) El dibujo de la curva es el siguiente:

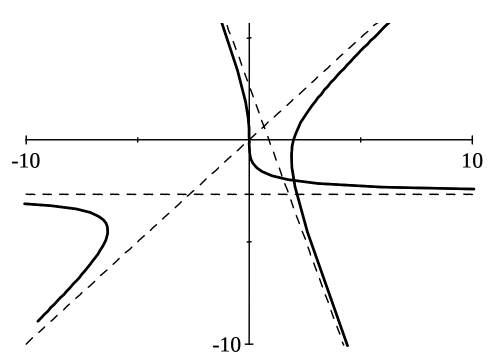


E 173- Dibujar la curva $x=\frac{t^3}{(t-1)(t+2)}$, $y=\frac{t^2-2t}{t-1}$.

Solución: 1º) Asíntotas: Para $t=1$, $x=\infty$, $y=\infty$, $a=\lim_{t\to 1}\frac{y}{x}=\lim_{t\to 1}\frac{t^2}{(t+2)(t-2)}=-3$, $b=\lim_{t\to 1}(y+3x)=\frac{4t(t+1)}{t+2}=\frac{8}{3}$, siendo la asíntota: $y=-3x+\frac{8}{3}$; para hallar la posición de la curva, se hace $t=1+\theta$, con $\theta\to 0$, con lo que $y=\frac{-1}{\theta}$, $y_c-y_a=\frac{28\theta}{9}$, luego para $\theta>0$, $y=-\infty$, $y_c>y_a$, y para $\theta<0$, $y=+\infty$, $y_c<y_a$ (figura A). Para $t=\infty$, $x=\infty$, $y=\infty$, $a=\lim_{t\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2-4}{t^2}=1$, $b=\lim_{t\to\infty}(y-x)=\lim_{t\to\infty}\frac{-4t}{(t-1)(t-2)}=0$, luego la asíntota es: $y=x$; para hallar la posición de la curva se tiene que $y_c-y_a=\frac{-4t}{(t-1)(t+2)}$, luego para $t=+\infty$, $y=+\infty$, $y_c<y_a$, y para $t=-\infty$, $y=-\infty$, $y_c>y_a$ (figura B). Para $t=-2$, $x=\infty$, siendo la asíntota: $y=\frac{-8}{3}$; para hallar la posición de la curva se hace $t=-2+\theta$, con $\theta\to 0$, con lo que $x=\frac{8}{3\theta}$, $y_c-y_a=\frac{10\theta}{9}$, luego para $\theta>0$, $x=+\infty$, $y_c>y_a$, y para $\theta<0$, $x=-\infty$, $y_c<y_a$ (figura C). 2º) Intersección con las asíntotas: La curva corta a $y=-3x+\frac{8}{3}$ en $\left(\frac{32}{21},\frac{40}{21}\right)$, a $y=x$ en $(0,0)$, a $y=\frac{-8}{3}$ en $\left(\frac{32}{15},\frac{-8}{3}\right)$. 3º) Máximos y mínimos: Para $x'=0$, $t=0$, $t=-1\pm\sqrt{7}$, obteniéndose el punto $(0,0)$, que es un punto de inflexión, y los dos puntos de coordenadas $\left(\frac{2\left(\pm 7\sqrt{7}-10\right)}{9},\frac{2(\pm\sqrt{7}-4)}{3}\right)$, es decir, aproximadamente, $(1.9,-0.9)$ y $(-6.3,-4.4)$, que son, respectivamente, mínimo y máximo de x. No hay máximos de y. 4º) Punto de cruce: resolviendo el sistema: $\frac{t_1^3}{(t_1-1)(t_1+2)}=\frac{t_2^3}{(t_2-1)(t_2+2)}$, $\frac{t_1^2-2t_1}{t_1-1}=\frac{t_2^2-2t_2}{t_2-1}$, se tiene la raíz $\pm\sqrt{2}$, que da el punto de cruce $(2,-2)$. Las pendientes de las tangentes en este punto, son $-3\pm 2\sqrt{2}$.

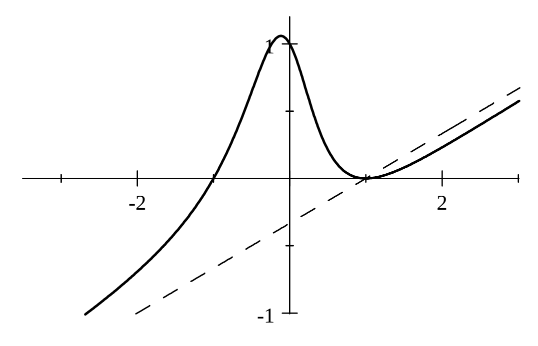


El dibujo de la curva es el siguiente:



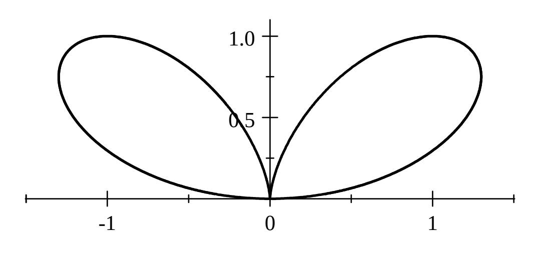
E 174- Dibujar la curva $x = \dfrac{t+1}{t-1}, y = \dfrac{2t}{t^3-1}$.

Solución: 1º) Asíntotas: Para $t = 1$, $x = \infty$, $y = \infty$, $a = \lim\limits_{t=1} \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{3}$, $b = \lim\limits_{t=1} \left(y - \dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{-1}{3}$, luego la asíntota es: $y = \dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{3}$; para hallar la posición de la curva, se hace $t = 1+\theta$, con $\theta \to 0$, con lo que $x = \dfrac{2}{\theta}$, $y_c - y_a = \dfrac{-2(t-1)}{3(t^2+t+1)} = \dfrac{-2\theta}{9}$, luego para $\theta > 0$, $x = +\infty$, $y_c < y_a$, y para $\theta < 0$, $x = -\infty$, $y_c > y_a$. 2º) Intersección con ejes y asíntota, y pendientes m de sus tangentes: Para $t = -1$, $(0,1)$, $m = -1$; para $t = 0$, $(-1,0)$, $m = 1$; para $t = \infty$, $(1,0)$, $m = 0$, siendo un mínimo de y. Además, este punto es el de intersección con la asíntota. 3º) Máximos y mínimos: Como $x' = \dfrac{-2}{(t-1)^2}$, no los hay para x. Para $y' = \dfrac{-4t^3-2}{(t^3-1)^2} = 0$, $t = \dfrac{-1}{\sqrt[3]{2}}$, al que corresponde el máximo de y, $\left(\dfrac{-1+\sqrt[3]{2}}{-1-\sqrt[3]{2}}, \dfrac{4}{3\sqrt[3]{2}}\right)$; para $t = \infty$, $x' = y' = 0$, obteniendo el punto mínimo de y, $(1,0)$, ya estudiado. El dibujo de la curva es el siguiente:



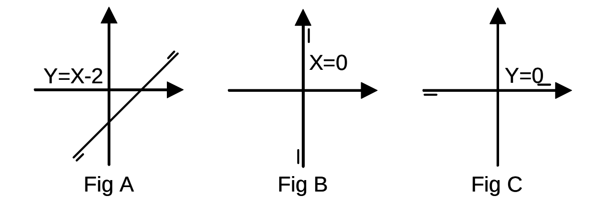
E 175- Dibujar la curva $x = \dfrac{4t}{(1+t^2)^2}, y = \dfrac{4t^2}{(1+t^2)^2}$.

Solución: 1º) Intervalo de existencia y simetría: $y \geq 0$; como $yt^4 + 2(y-2)t^2 + y = 0$, $t^2 = \dfrac{2-y \pm 2\sqrt{1-y}}{y}$, luego $y \leq 1$; por tanto $0 \leq y \leq 1$. La curva es simétrica respecto al eje YY'. 2º) La curva es cerrada, no tiene asíntotas. 3º) Puntos de intersección con los ejes, y pendientes m de sus tangentes en estos puntos: Para $t = 0$, $(0,0)$, $m = 0$. Para $t = \infty$, $(0,0)$, $m = \infty$, siendo este punto de retroceso. 4º) Máximos y mínimos: Para $x' = 0$, $t = \dfrac{\pm\sqrt{3}}{3}$, $\left(\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{4}, \dfrac{3}{4}\right)$, máximo (signo +) y mínimo (signo –) de x. Para $y' = 0$, $t = 0$, $(0,0)$, mínimo de y, ya estudiado, y $t = \pm 1$, $(\pm 1, 1)$, que corresponden a dos máximos de y. Además, para $t = \infty$, $x' = y' = 0$, $(0,0)$, punto de retroceso ya estudiado. 5º) Punto de cruce: Para $t = 0$, $t = \infty$, $(0,0)$, ya estudiado. El dibujo de la curva es el siguiente:

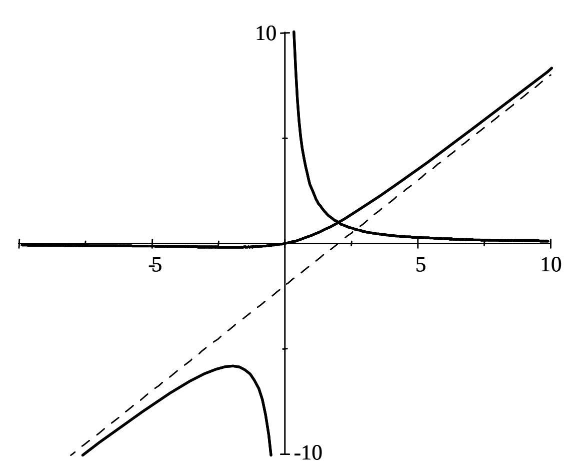


E 176- Dibujar la curva $x = \dfrac{t^2-1}{t}$, $y = \dfrac{t+1}{t(t-1)}$.

Solución: 1º) Asíntotas: Para $t = 0$, $x = \infty$, $y = \infty$, $a = \lim_{t=0} \dfrac{y}{x} = \lim_{t=0} \dfrac{1}{(t-1)^2} = 1$, $b = \lim_{t=0}(y-x) = -2$, la asíntota es: $y = x-2$; para hallar la posición de la curva, se hace $t = \theta$, con $\theta \to 0$, con lo que $x = \dfrac{-1}{\theta}$, $y_c - y_a = \dfrac{-t^2+3t}{t-1} = -3\theta$, luego para $\theta > 0$, $x = -\infty$, $y_c < y_a$, y para $\theta < 0$, $x = +\infty$, $y_c > y_a$ (figura A). Para $t = 1$, $y = \infty$, siendo la asíntota: $x = 0$; para hallar la posición de la curva, se hace $t = 1+\theta$, con $\theta \to 0$, con lo que $y = \dfrac{2}{\theta}$, $x_c - x_a = 2\theta$, luego para $\theta > 0$, $y = +\infty$, $x_c > x_a$, y para $\theta < 0$, $y = -\infty$, $x_c < x_a$ (figura B). Para $t = \infty$, $x = \theta$, la asíntota es: $y = 0$; para hallar la posición de la curva, se tiene para $t = +\infty$, $x = +\infty$, $y > 0$, y para $t = -\infty$, $x = -\infty$, $y < 0$ (figura C). 2º) Puntos de intersección con los ejes y las asíntotas, y pendientes m de las tangentes en esos puntos: Para $t = -1$, $(0,0)$, $m = \dfrac{1}{4}$; intersección con $y = x-2$, $t = 3$, $\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$, $m = \dfrac{-7}{20}$. 3º) Máximos y mínimos: No los hay para x. Para y: $y' = \dfrac{-t^2-2t+1}{t^2(t-1)^2} = 0$, $t = -1 \pm \sqrt{2}$, $\left(-2, -3 \pm 2\sqrt{2}\right)$, que es mínimo con el signo +, máximo con el signo −. 4º) Punto de cruce: Se plantea el sistema: $\dfrac{t_1^2-1}{t_1} = \dfrac{t_2^2-1}{t_2}$, $\dfrac{t_1+1}{t_1(t_1-1)} = \dfrac{t_2+1}{t_2(t_2-1)}$, cuya solución es $t = 1 \pm \sqrt{2}$, siendo el punto de cruce $(2,1)$, $m = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



El dibujo de la curva es el siguiente:



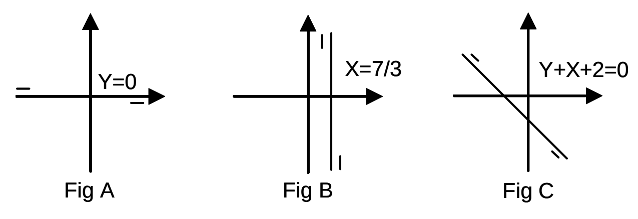
E 177- A la curva $x = 3t^2$, $y = 3t^3$, se le pueden trazar tres tangentes desde un punto $P(\alpha,\beta)$ exterior a la curva. Hallar la ecuación del círculo que pasa por los tres puntos de contacto, y el lugar geométrico de P para que dicho círculo sea de radio R.

Solución: La recta: $x+Ay+B = 0$, corta a la curva en los puntos cuyos parámetros t verifican la ecuación: $3t^2+3At^3+B = 0$. Para que sea tangente a la curva ha de tener un contacto de 2º orden con ella, por lo que dos de las tres raíces de esta ecuación han de ser iguales, es decir: $t_1 = t_2 = t$, $t_3 = \theta$. Luego: $2t+\theta = \dfrac{-1}{A}$, $t^2+2t\theta = 0$, $t^2\theta = \dfrac{-B}{3A}$. De donde: $t(t+2\theta) = 0$, $\theta = \dfrac{-t}{2}$, $A = \dfrac{-2}{3t}$, $B = -t^2$. La ecuación de la tangente es: $x - \dfrac{2y}{3t} - t^2 = 0$. Operando: $3tx-2y-3t^3 = 0$, es decir: $3t\alpha-2\beta-3t^3 = 0$. Sea la ecuación de la circunferencia: $(x-a)^2+(y-b)^2-R^2 = 0$, luego: $(3t^2-a)^2+(3t^3-b)^2-R^2 =$ $= 9t^6+9t^4-6bt^3-6at^2+a^2+b^2-R^2 = 0$. Esta circunferencia corta a la curva en seis puntos, entre ellos, los tres de tangencia, luego su ecuación se puede dividir exactamente por la de la tangente, siendo el resto nulo. Este resto es: $[9\alpha(\alpha+1)-6a]t^2+[(\alpha+1)\beta+\alpha(b+\beta)]t+ +a^2+b^2-R^2+4\beta(b+\beta) \equiv 0$.

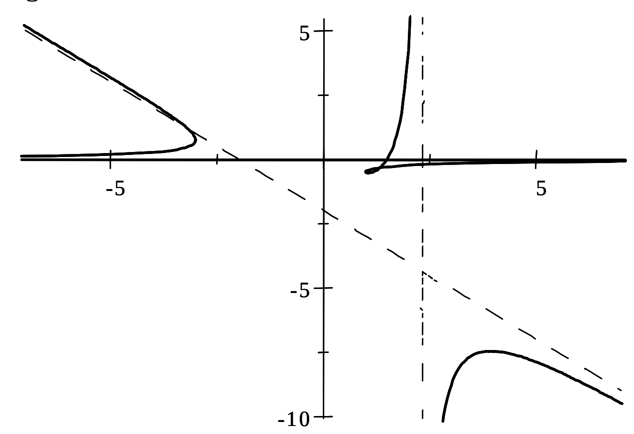
Luego ha de verificarse que las coordenadas del centro son: $a = \frac{3\alpha(\alpha+1)}{2}$, $b = -\beta\left(2+\frac{1}{\alpha}\right)$, y que: $R^2 = a^2+b^2+4\beta(b+\beta) = \frac{9}{4}\alpha^2(\alpha+1)^2+\beta^2\left(2+\frac{1}{\alpha}\right)^2+4\beta\left(-\beta-\frac{\beta}{\alpha}\right)$. La ecuación del círculo es: $\left[x-\frac{3}{2}\alpha(\alpha+1)\right]^2+\left[y+2\beta+\frac{\beta}{\alpha}\right]^2 = \frac{9}{4}\alpha^2(\alpha+1)^2+\beta^2\left(2+\frac{1}{\alpha}\right)^2+4\beta\left(-\beta-\frac{\beta}{\alpha}\right)$. La ecuación del lugar pedido es: $\frac{9}{4}x^2(x+1)^2+y^2\left(2+\frac{1}{x}\right)^2-4y^2\left(1+\frac{1}{x}\right)-R^2 = 0$.

E 178- Dibujar la curva $x = \frac{t^2+t+1}{t+1}$, $y = \frac{t^2-1}{2-t}$.

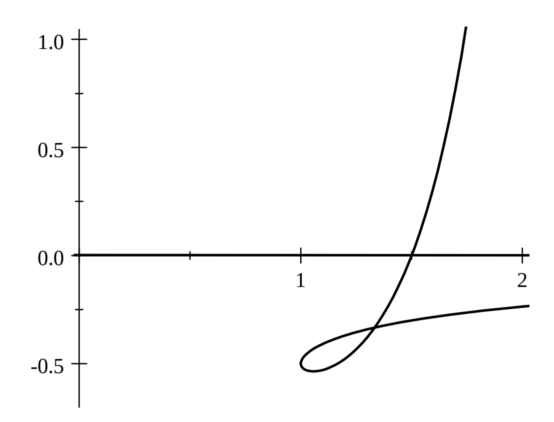
Solución: 1º) Asíntotas: Para $t = -1$, $x = \infty$, la asíntota es: $y = 0$. Para hallar la posición de la curva, se sustituye $t = -1+\theta$, con lo que: $y_c - y_a = \frac{-2\theta}{3}$ (figura A). Para $t = 2$, $y = \infty$, la asíntota es: $x = \frac{7}{3}$. Para $t = 2+\theta$, se tiene: $y_c - y_a = \frac{-3}{\theta}$ (figura B). Para $t = \infty$, se tiene la asíntota general: $y = ax+b$, siendo $a = \lim_{t\to\infty}\frac{y}{x} = -1$, $b = \lim_{t\to\infty}(y+x) = -2$, luego la asíntota es: $y+x+2 = 0$. La posición de la curva está dada por: $y_c - y_a = \frac{-2}{t}$ (figura C). 2º) La curva corta a: $y = 0$, en $\left(\frac{3}{2},0\right)$. Corta a: $x = \frac{7}{3}$, en $\left(\frac{7}{3},\frac{-5}{24}\right)$. Y corta a: $y+x+2 = 0$, en $\left(\frac{-19}{6},\frac{7}{6}\right)$. 3º) Para $t = \frac{1\pm\sqrt{13}}{6}$, la curva tiene el punto doble $\left(\frac{4}{3},\frac{-1}{3}\right)$.



El dibujo de la curva es el siguiente:

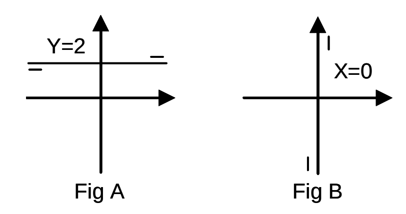


En el dibujo siguiente se presenta el entorno del punto doble.

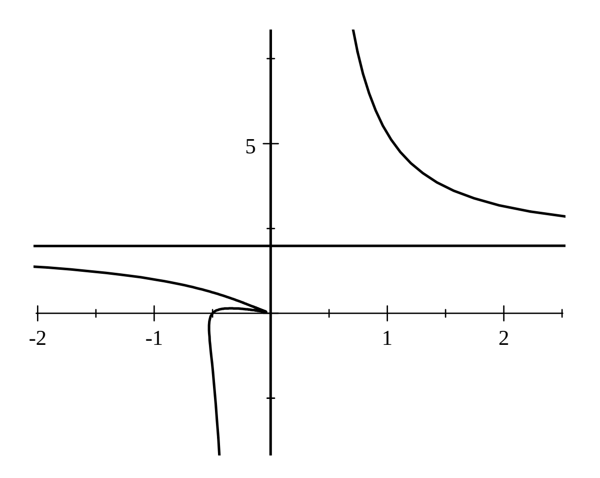


E 179- Dibujar la curva $x = \dfrac{t}{1-t^3}, y = \dfrac{1+t}{t^3}$.

Solución: 1º) Asíntotas: Para $t = 1$, $x \to \infty$, siendo la asíntota: $y = 2$; la posición de la curva está dada por $t = 1+\theta$, con $\theta \to 0$, obteniéndose que: $y_c - y_a = -5\theta$, $x = \dfrac{-1}{3\theta}$ (figura A). Para $t = 0$, $y \to \infty$, siendo la asíntota: $x = 0$; la posición de la curva está dada por $t = \theta$, con $\theta \to 0$, obteniéndose que $x_c - x_a = \theta$, $y = \dfrac{1}{\theta^3}$ (figura B). 2º) Intersección con los ejes: Para $t = \infty$, se tiene el punto de retroceso $(0,0)$, siendo -1 la pendiente de la tangente. Para $t = -1$, se tiene el punto $\left(\dfrac{-1}{2}, 0\right)$, siendo 4 la pendiente de su tangente. 3º) Máximos y mínimos: Para $t = \dfrac{-3}{2}$, $y'_t = 0$, obteniéndose el máximo $\left(\dfrac{-12}{35}, \dfrac{4}{27}\right)$.

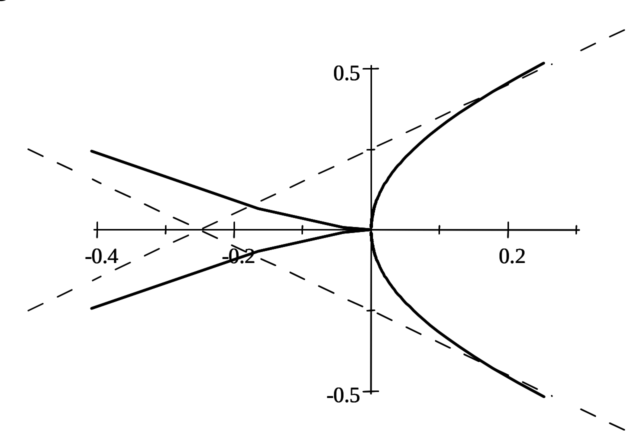


El dibujo de la curva es el siguiente.



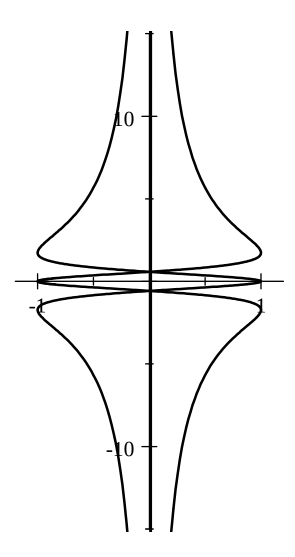
E 180- Dibujar la curva $x = \dfrac{t^2}{t^4-1}, y = \dfrac{t^3}{t^4-1}$.

Solución: 1º) La curva es simétrica respecto al eje XX'. 2º) Asíntotas: Para $t = \pm 1$, $x \to \infty$, $y \to \infty$, tratándose de asíntotas generales: $y = ax + b$. Para $t = 1$, $a = \lim\limits_{t=1} \dfrac{y}{x} = 1$, $b = \lim\limits_{t=1} (y - x) = \dfrac{1}{4}$, luego la asíntota es: $y = x + \dfrac{1}{4}$. Para $t = -1$, la asíntota es la simétrica: $y = -x - \dfrac{1}{4}$. La curva corta a estas asíntotas en los puntos en que $t = 1 \pm \sqrt{2}$. 3º) La curva corta a los ejes en $(0,0)$, para $t = 0$ y $t = \infty$, siendo los ejes las tangentes. 4º) En el origen hay un punto de retroceso de tangente el eje OX'. 5º) El dibujo de la curva es el siguiente:

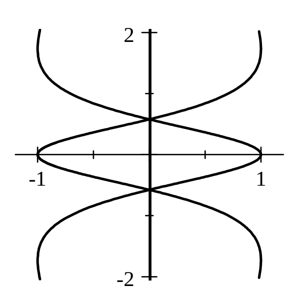


E 181- Dibujar la curva $x = \cos t,\ y = \tan \frac{t}{3}$.

Solución: 1º) La curva es simétrica respecto a los dos ejes, por lo que es suficiente estudiarla en el intervalo $0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$. 2º) Para $\frac{t}{3} = \frac{\pi}{2}$, la curva tiene por asíntota el eje YY'. 3º) La curva corta a los ejes en los puntos en que $t = \frac{\pi}{2}$, $t = 0$, es decir, en los puntos: $\left(0, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $(\pm 1, 0)$, siendo las pendientes de sus tangentes, respectivamente, $\frac{-4}{9}$, ∞. 4º) El dibujo de la curva es el siguiente:

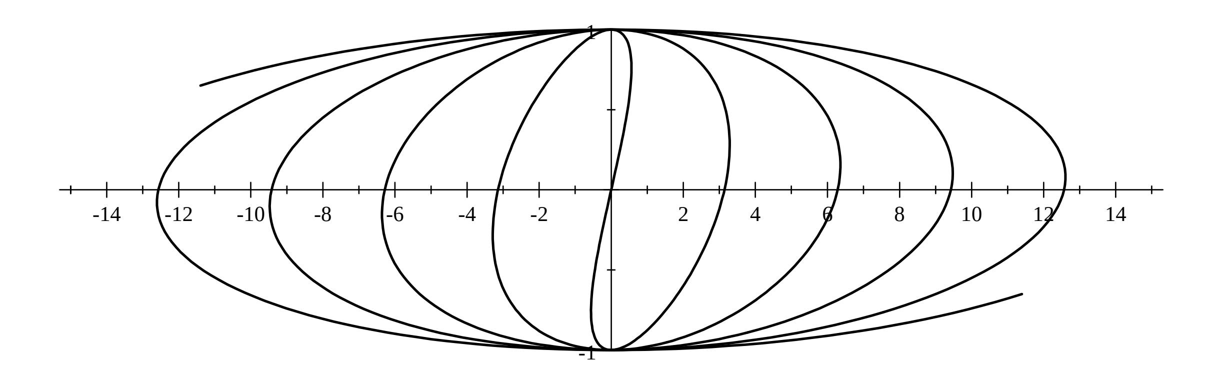


Seguidamente se presenta un dibujo de detalle para el intervalo $-2 < y < 2$.



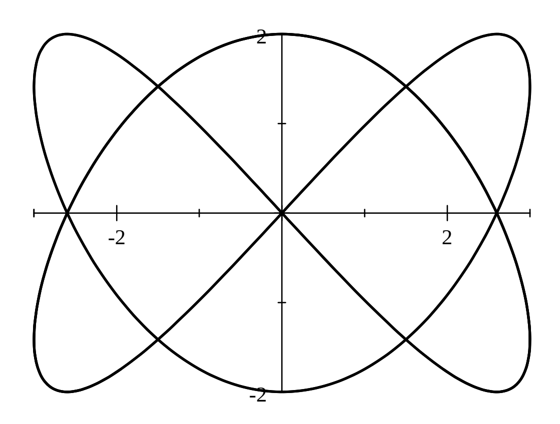
E 182- Dibujar la curva $x = t\cos t,\ y = \sin t$.

Solución: 1º) La curva es simétrica respecto al origen. 2º) No tiene asíntotas. Para $t = \infty$, la curva oscila entre $-\infty \leq x \leq +\infty$, $-1 \leq y \leq 1$. 3º) La curva corta a los ejes en $(0, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(\pm k\pi, 0)$, siendo la pendiente de sus tangentes $\frac{1}{1 - t\tan t}$, es decir, respectivamente: 1, 0 y 1. 4º) Los máximos y mínimos de x corresponden a las raíces de la ecuación: $t\tan t = 1$, es decir, $t = 0.86,\ 3.43,\ 6.44,\ 9.53,...$, siendo los correspondientes puntos: $(0.56, 0.76)$, $(-3.29, -0.28)$, $(6.36, 0.15)$, $(-9.48, -0.10)$,... 5º) El dibujo de la curva es el siguiente:



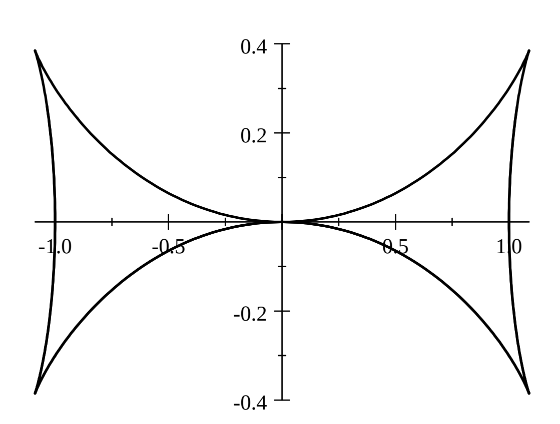
E 183- Dibujar la curva $x = 3\sin t$, $y = 2\cos\frac{3t}{2}$.

Solución: 1º) La curva es simétrica respecto a los dos ejes y por tanto respecto al origen. 2º) Existe curva dentro del rectángulo $-3 \leq x \leq 3$, $-2 \leq y \leq 2$. 3º) No tiene asíntotas. 4º) Para $t = \pi$, la curva pasa por el origen, siendo sus tangentes $y = \pm x$. 5º) Corta al eje XX' en los puntos correspondientes a $t = \frac{\pi}{3}$, es decir $\left(\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, siendo ± 2 las pendientes de sus tangentes. Corta al eje YY' en $(0, \pm 2)$, que son máximo y mínimo de y. 6º) Otros máximos y mínimos de y, son: $\left(\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}, \pm 2\right)$. Son máximos y mínimos de x, los puntos $\left(\pm 3, \pm\sqrt{2}\right)$. 7º) El dibujo de la curva es el siguiente:



E 184- Dibujar la curva $x = (1 + \cos^2 t)\sin t$, $y = \sin^2 t \cdot \cos t$.

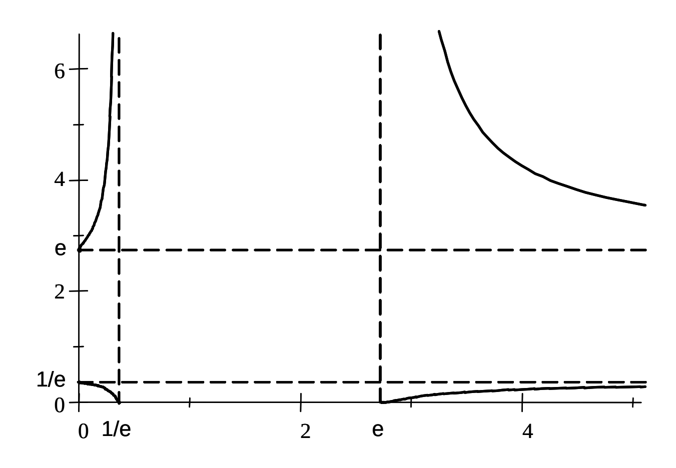
Solución: 1º) La curva es simétrica respecto a los ejes coordenados y al origen. 2º) No tiene asíntotas. 3º) Corta al eje XX' en $(0,0)$ y $(\pm 1, 0)$. Corta al eje YY' en $(0,0)$. La pendiente de las tangentes es $m = \frac{y'}{x'} = \tan t$. Luego, las pendientes de las tangentes en el origen es 0, siendo punto doble. Las pendientes de las tangentes en $(\pm 1, 0)$ son ∞. 4º) Los puntos $\left(\pm\frac{4\sqrt{6}}{9}, \pm\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$, que corresponden a $\cos t = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, son puntos de retroceso, siendo las pendientes de sus tangentes, $\pm\sqrt{2}$. 5º) El dibujo de la curva es el siguiente:



E 185- Dibujar la curva $x = e^{\frac{1}{\cos t}}$, $y = e^{\frac{1}{\sin t}}$.

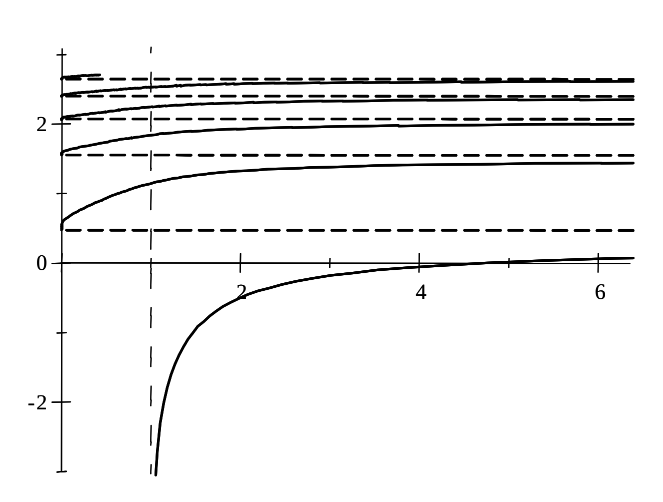
Solución: 1º) La curva es simétrica respecto a la primera bisectriz. No hay curva para $\frac{1}{e} \leq x \leq e$, ni para $\frac{1}{e} \leq y \leq e$. 2º) La curva tiene las asíntotas siguientes: $y = \frac{1}{e}$, $y = e$, $x = \frac{1}{e}$, $x = e$. 3º) Corta a los ejes en los puntos $\left(\frac{1}{e}, 0\right)$, $(e, 0)$, $\left(0, \frac{1}{e}\right)$, $(0, e)$. 4º) El punto $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ es máximo de y; el punto $(0, e)$ es mínimo de y. El punto $\left(\frac{1}{e}, 0\right)$ es máximo de x; el punto $(e, 0)$ es mínimo de x. 5º) La curva corta a la primera bisexctriz en los puntos en los que $t = \pm\frac{\pi}{4}$, es decir: $\left(e^{\pm\sqrt{2}}, e^{\pm\sqrt{2}}\right)$, siendo -1 la pendiente de sus

tangentes. 6º) El dibujo de la curva es el siguiente:



E 186- Dibujar la curva $x = e^{\tan t}$, $y = \ln t$.

Solución: 1º) La curva existe para $t > 0$, siendo siempre $x \geq 0$. 2º) Asíntota paralela a YY': Para $t = 0$, $y = -\infty$, siendo la asíntota: $x = 1$. La curva la corta en infinitos puntos, para los que $t = k\pi$. Estos puntos son: $(1, \ln \pi)$, $(1, \ln 2\pi)$,...,$(1, \ln k\pi)$, es decir: $(1, 1.145)$, $(1, 1.838)$,... Las pendientes de las tangentes en estos puntos, son: $\frac{1}{\pi}$, $\frac{1}{2\pi}$,... 3º) Asíntotas paralelas a XX': Para $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \infty$, siendo las asíntotas: $y = \ln\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$. Luego hay infinitas asíntotas paralelas al eje XX'. 4º) La curva corta al eje XX' en el punto en que $t = 1$, es decir $(e^{\tan 1}, 0)$, o bien $(4.75, 0)$, siendo la pendiente de su tangente $\frac{\cos^2 1}{e^{\tan 1}} = 0.0615$. La curva corta al eje YY' en los puntos en los que $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, es decir: $\left(0, \ln \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(0, \ln \frac{3\pi}{2}\right)$,... Las tangentes en estos puntos es el eje OY. 5º) El dibujo de la curva es el siguiente:



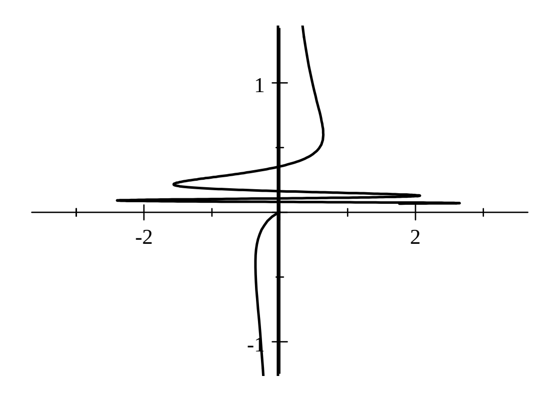
E 187- Dibujar la curva $\rho = \sin t \cdot \ln t,\ \omega = \dfrac{t}{t^2 - 1}$.

Solución: 1º) La curva existe para $t \geq 0$. 2º) Estudio de $\rho = 0$: a) Para $t = 0$, $\rho = \lim_{t \to 0} (\sin t \ln t) = 0$; luego para $t = 0$, $\rho = 0$, $\omega = 0$, que es la tangente en el origen. b) Para $t = 1$, $\omega = \infty$, punto asintótico en el origen. c) Para $t = k\pi$, $\omega = \dfrac{k\pi}{k^2\pi^2 - 1}$, que son tangentes en el origen; los lazos van decreciendo en anchura y creciendo en longitud, tendiendo a $\omega = 0$ como asíntota. 3º) Estudio de $\rho = \infty$: $t = \infty$, $\omega = 0$, el perpendículo es: $\delta = \lim_{\alpha = 0,\ t \to \infty} \rho \sin(\omega - \alpha) = \lim_{t \to \infty} \rho\omega = \lim_{t \to \infty} (\sin t) \ln t \cdot \dfrac{t}{t^2 - 1} = \lim_{t \to \infty} \dfrac{\ln t}{t} = \lim_{t \to \infty} \dfrac{1/t}{1} = 0$; luego la asíntota es: $\omega = 0$ (se ha visto más arriba que también es tangente en el origen). 4º) Los valores máximos de ρ satisfacen la ecuación: $\rho' = \cos t \ln t + \dfrac{\sin t}{t} = 0$, cuyas raíces aproximadas son: $0.35,\ 2.2,\ 4.8,\ 7.9,\ 11.0,\ 14.2,\ 17.4,\ 20.5,\ 23.6,\ 26.7,\ 29.9,\ldots$, para los que (ρ, ω) toman los siguientes valores: $(-0.36, -0.4)$, $(0.64, 1.8)$, $\ldots(3.3, 0.04)$, $(-3.4, 0.03)\ldots$ 5º) Tabla de valores:

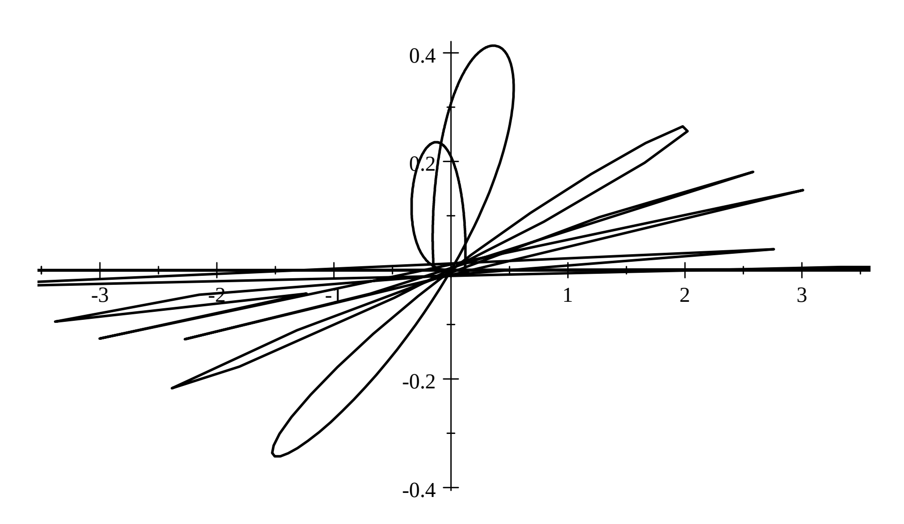
t	0	0.01	0.02	0.05	0.1	0.3	0.5	0.8	0.9	1	1.1	$\pi/2$	2	2.5
ρ	0	-0.046	-0.078	-0.150	-0.23	-0.356	-0.33	-0.16	-0.082	0	0.085	0.45	0.63	0.55
ω	0	-0.01	-0.02	-0.05	-0.10	-0.33	-0.66	-2.22	-4.74	∞	5.24	1.07	0.67	0.48

t	π	$3\pi/2$	2π	$5\pi/2$	3π	$7\pi/2$	4π	$25\pi/2$	$27\pi/2$	$125\pi/2$	$127\pi/2$	$1025\pi/2$	$1027\pi/2$
ρ	0	-1.55	0	2.06	0	-2.40	0	3.67	-3.75	5.28	-5.30	7.38	$-7,39$
ω	0.35	0.22	0.16	0.13	0.107	0.09	0.08	0.025	0.024	0.005	0.005	0.0006	0.0006

5º) El diagrama cartesiano en el que ρ se lleva en el eje de abscisas, y ω en el de ordenadas, es el siguiente:



El dibujo de la curva es el siguiente:

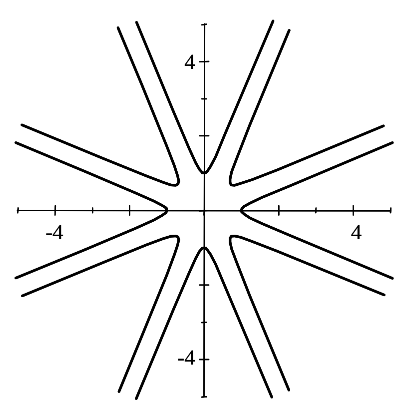


E 188- Dibujar la curva $\rho = \dfrac{1}{\cos 4\omega}$.

Solución: 1º) Simetrías: La curva es simétrica respecto al eje polar y a su perpendicular por el polo. Cada cuadrante es simétrico respecto a su bisectriz. Los ejes de simetría son: $\omega = 0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{8}$. 2º) Asíntotas en el primer cuadrante: $\rho \sin\left(\omega - \frac{\pi}{8}\right) = \frac{-1}{4}$, $\rho \sin\left(\omega - \frac{3\pi}{8}\right) = \frac{1}{4}$. 3º) Máximos y mínimos en el primer cuadrante: $\omega = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$. 4º) Tabla de valores:

ω	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos 4\omega$	1	0	-1	0	1
ρ	1	∞	-1	∞	1

5º) El dibujo de la curva es el siguiente:

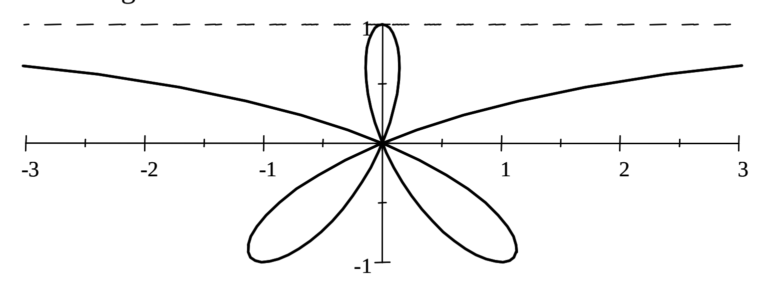


E 189- Dibujar la curva $\rho = a^2 \dfrac{\cos 4\omega}{\sin \omega}$.

Solución: 1º) Simetría: Respecto a la perpendicular al eje polar trazada por el polo. 2º) Para $\rho = 0$, $\omega = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$, que son las tangentes en el origen. 3º) Para $\rho = \infty$, $\omega = k\pi$. 4º) Para determinar el perpendículo de la asíntota, se tiene: $\delta = \lim_{\omega\to 0} \rho \sin\omega = \lim_{\omega\to 0} a^2 \cos 4\omega = a^2$, por lo que la asíntota es: $\rho \sin\omega = a^2$. 5º) Máximos y mínimos de ρ: $\rho' = \frac{a^2}{\sin^2\omega}(-4\sin\omega \sin 4\omega - \cos\omega \cos 4\omega) = 0$, de donde $4\tan\omega \tan 4\omega + 1 = 0$, luego se tienen los siguientes valores de $\tan^2\omega$: 0.544151 y 0.122514, siendo los respectivos valores de ω: $36º24'53''8$ y $19º17'28''1$. 6º) Tabla de valores:

ω	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\omega$	0	0.38	0.5	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.92	1
$\cos 4\omega$	1	0	-0.5	-1	-0.5	0	1
$\frac{\rho}{a^2}$	∞	0	-1	$-\sqrt{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	0	1

7º) El dibujo de la curva es el siguiente:

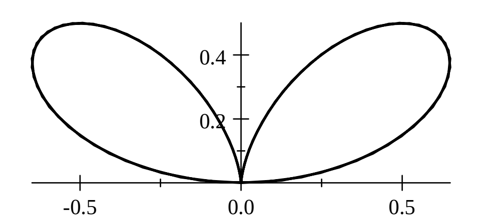


E 190- Se da la curva $\rho = 2a\cos\theta\sin 2\theta$, siendo $a > 0$. 1º) Dibujar la curva. 2º) Hallar el área del bucle para el que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. 3º) Hallar en función de θ la ecuación en cartesianas de la recta Δ perpendicular a OM en M (punto de la curva), que corta a OX en A, y a OY en B. Hallar el lugar geométrico del punto medio I de AB. 4º) Hallar el volumen que engendra dicho lugar al girar alrededor de OX. 5º) Hallar el lugar de los puntos del plano por los que pasan dos rectas Δ perpendiculares entre sí. 6º) Hallar la envolvente de Δ.

Solución: 1º) Curva cerrada, sin asíntotas, simétrica respecto a la perpendicular al eje polar por el polo. En el polo, las tangentes son: $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ (punto de retroceso). Tabla de valores:

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin 2\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	0
$\frac{\rho}{2a}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3}{4}$	0

El dibujo de la curva es el siguiente:



2º) $S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 d\theta = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\sin^2 2\theta d\theta = 8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\sin^2\theta d\theta = 8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4\theta - \cos^6\theta)d\theta =$
$= 4\pi a^2\left(\frac{3!!}{4!!} - \frac{5!!}{6!!}\right) = \frac{\pi a^2}{4}$. 3º) Se tiene que: $OM \equiv y - x\tan\theta$, $\Delta \equiv x\cos\theta + y\sin\theta -$
$-2a\cos\theta\sin 2\theta = 0$, $A(2a\sin 2\theta, 0)$, $B(4a\cos^2\theta)$, $I(a\sin 2\theta, 2a\cos^2\theta)$. Luego el lugar pedido es: $x = a\sin 2\theta$, $y = 2a\cos^2\theta$, o bien, $x^2 + y^2 - 2ay = 0$. 4º) $V = \pi a^2 2\pi a = 2\pi^2 a^3$. 5º) $\Delta_1 = x\cos\alpha +$
$+y\sin\alpha - 2a\cos\alpha\sin 2\alpha = 0$, $\Delta_2 = x\cos\beta + y\sin\beta - 2a\cos\beta\sin 2\beta = 0$, siendo $\tan\alpha\tan\beta = -1$. De donde, haciendo $\lambda = \tan\alpha$, se tiene: $x = -4a\lambda\frac{\lambda^2 - 1}{(\lambda^2 + 1)^2}$, $y = \frac{8a\lambda^2}{(\lambda^2 + 1)^2}$, luego $x^2 + y^2 - 2ay = 0$. 6º) El sistema formado por la ecuación de Δ y su derivada respecto a θ, $-x\sin\theta + y\cos\theta + 2a\sin\theta\sin 2\theta -$
$-4a\cos\theta\cos 2\theta = 0$, tiene por solución: $x = 4a\cos^2\theta\cos 2\theta$, $y = a\sin 4\theta - 2a\sin 2\theta = -4a\sin 2\theta\sin^2\theta$. Eliminando θ, se tiene: $(x^2 + y^2 + 10ay - 2a^2)^2 - 4a(a + 2y)^3 = 0$.

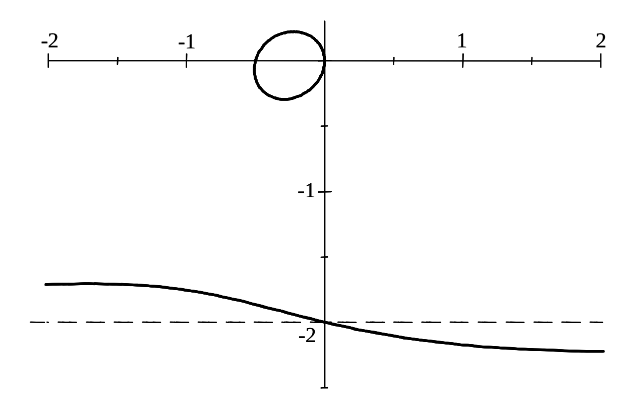
E 191- Dibujar la curva $\rho^2\sin\omega + 2\rho + \cos\omega = 0$.

Solución: 1º) Despejando ρ, se tiene: $\rho = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \sin\omega\cos\omega}}{\sin\omega}$. Se dibujan las dos curvas: $\rho_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - \sin\omega\cos\omega}}{\sin\omega}$, $\rho_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - \sin\omega\cos\omega}}{\sin\omega}$. 2º) Asíntota: $\rho = \frac{-2}{\sin\omega}$. 3º) Tabla de valores:

ω	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
ρ_1	-0.5	-0.49	-0.41	-0.29	0	0.23	0.32	0.39	0.5
ρ_2	$-\infty$	-3.51	-2.41	-2.02	-2.00	-2.54	-3.15	-4.39	$-\infty$

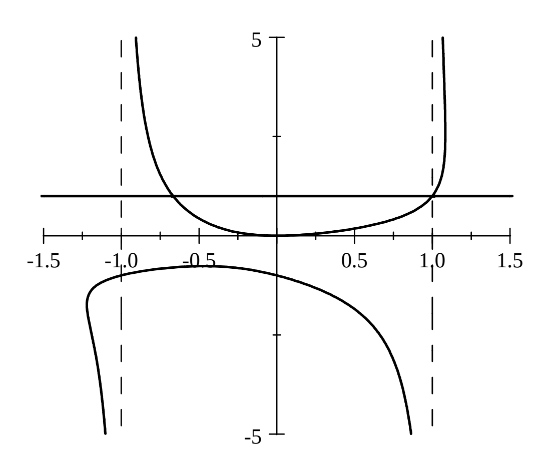
ω	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
ρ_1	0.49	0.41	0.29	0	0.49	-0.23	-0.32	-0.39	-0.5
ρ_2	3.51	2.41	2.02	2.00	3.51	2.54	3.15	4.39	∞

4º) El dibujo de la curva es el siguiente:



E 192- Dibujar la curva $(\omega^2-1)\rho^3-\omega\rho^2+(\omega+1)\rho-\omega^2=0$.

Solución: 1º) Diagrama en cartesianas: Se lleva ρ en el eje de ordenadas, y ω en el de abscisas. La ecuación dada es igual a: $(\rho-1)[(\omega^2-1)\rho^2+(\omega^2-\omega-1)\rho+\omega^2]=0$. Por tanto, la curva dada está integrada por la recta $\rho=1$ y por la curva $(\omega^2-1)\rho^2+(\omega^2-\omega-1)\rho+\omega^2=0$, cuyas asíntotas son: $\omega=\pm1$, y su tangente en el origen: $\rho=0$.



2º) Diagrama en polares: a) Forma parte de la curva la circunferencia $\rho=1$. De $(\omega^2-1)\rho^2+$ $+(\omega^2-\omega-1)\rho+\omega^2=0$, se tiene $\rho=\dfrac{-\omega^2+\omega+1\pm\sqrt{-3\omega^4-2\omega^3+3\omega^2+2\omega+1}}{2(\omega^2-1)}$. El radicando tiene dos raíces reales: $-1,22$ y $1,084$, por lo que la curva es real en el intervalo $-1,22\leq\omega\leq1,084$. b) Para hallar las asíntotas, he de tenerse $\rho=\infty$, es decir: $\omega^2-1=0$, por lo que los valores del ángulo α, formado por las asíntotas y el eje polar, son 1 y -1. Los perpendículos vienen dados por $\delta=\lim_{\omega=\alpha}\rho(\omega-\alpha)$.

Para $\omega=1$, $\delta=\lim_{\omega=1}\dfrac{-\omega^2+\omega+1+\sqrt{-3\omega^4-2\omega^3+3\omega^2+2\omega+1}}{2(\omega^2-1)}(\omega-1)=\dfrac{1}{2}$.

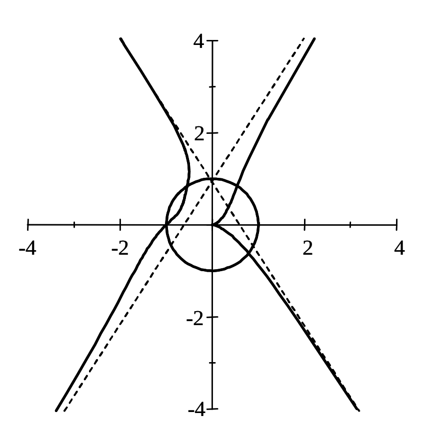
Para $\omega=-1$, $\delta=\lim_{\omega=-1}\dfrac{-\omega^2+\omega+1-\sqrt{-3\omega^4-2\omega^3+3\omega^2+2\omega+1}}{2(\omega^2-1)}(\omega+1)=\dfrac{1}{2}$.

Luego las asíntotas son: $\rho=\dfrac{1}{2\sin(\omega-1)}$, $\rho=\dfrac{1}{2\sin(\omega+1)}$. c) La tangente en el origen es $\omega=0$. d) La tabla de valores para la curva $(\omega^2-1)\rho^2+(\omega^2-\omega-1)\rho+\omega^2=0$, es la siguiente:

ω	$-1,22$	$-1,2$	$-1,1$	-1	$-0,9$	$-0,7$	$-0,5$	$-0,25$
ρ	$-1,75$	$-2,31;-1,42$	$-5,11;-1,13$	$1;\infty$	$-0,92;4,65$	$-0,81;1,18$	$-0,77;0,43$	$-0,82;0,08$

ω	0	$0,25$	$0,5$	$0,7$	$0,9$	1	$1,05$	$1,08$	$1,084$
ρ	$-1;0$	$-1,32;0,05$	$-1,85;0,18$	$-2,73;0,35$	$-6,40;0,67$	$1;\infty$	$1,37;7,88$	$2,02;3,47$	$2,59$

3º) El dibujo de la curva dada es el siguiente:



E 193- Dibujar la curva $\rho = \dfrac{\cos 2\theta}{1 + \tan \dfrac{\theta}{2}}$.

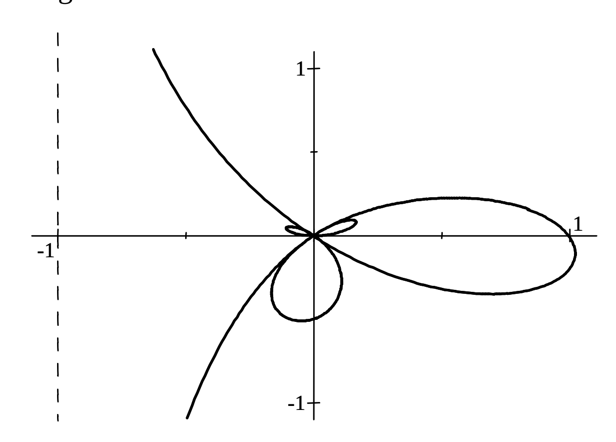
Solución: 1º) Asíntota: $\alpha = \dfrac{3\pi}{2}$, $\delta = \lim \rho \sin(\omega - \alpha) = -1$. Luego la asíntota es: $\rho = \dfrac{-1}{\sin\left(\omega - \dfrac{3\pi}{2}\right)}$.

2º) Tangentes en el origen: $\omega = 45º, 135º, 180º, 225º, 315º$. 3º) Tabla de valores:

θ	0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º	210º	225º	240º
$\cos 2\theta$	1	0.5	0	–0.5	–1	–0.5	0	0.5	1	0.5	0	–0.5
$\tan \frac{\theta}{2}$	0	0.268	0.414	0.577	1	1.732	2.414	3.732	∞	–3.732	–2.414	–1.732
ρ	1	0.394	0	–0.317	–0.5	–0.183	0	0.106	0	–0.183	0	0.683

θ	270º	300º	315º	330º	360º
$\cos 2\theta$	–1	–0.5	0	0.5	1
$\tan \frac{\theta}{2}$	–1	–0.577	–0.414	–0.268	0
ρ	–∞	–1.182	0	0.683	1

4º) El dibujo de la curva es el siguiente:



E 194- Dibujar la curva $\rho = \dfrac{\cos \dfrac{\theta}{2}}{\sin \dfrac{\theta}{3}}$, estudiando previamente las simetrías.

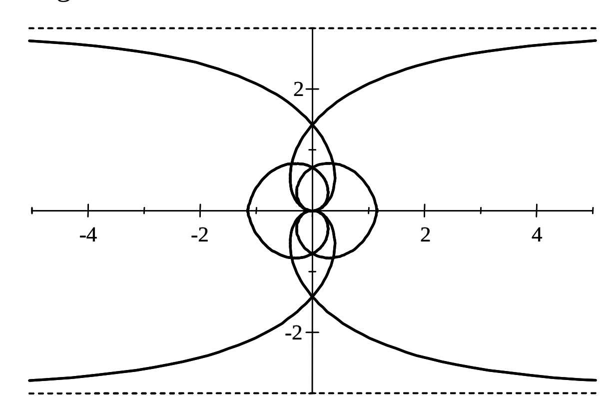
Solución: 1º) Simetrías: Se considera $\dfrac{6k\pi - \theta}{2}$, con $k = 2n + 1$, obtaniéndose que la curva es simétrica respecto al eje polar; considerando $\dfrac{6k\pi - \theta}{3}$, con $k = 2n$, se obtiene que la curva es simétrica respecto a la perpendicular por el polo al eje polar. Por tanto, la curva es simétrica respecto al polo. 2º) Asíntotas: Para

$\theta = 0,\ \rho = \infty$. El perpendículo es: $\delta = \lim_{\theta \to 0} \rho \sin\theta = \lim_{\theta \to 0} \dfrac{\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta}{\sin\frac{\theta}{3}} = \dfrac{\theta}{\frac{\theta}{3}} = 3$. La ecuación de la asíntota es: $\rho = \dfrac{3}{\sin\theta}$. 3º) Tabla de valores:

θ	0º	45º	90º	135º	180º	225º	270º	315º	360º	405º	450º	495º	540º
ρ	∞	3.570	1.414	0.541	0	-0.396	-0.707	-0.956	$-1,155$	-1.307	-1.414	-1.479	∞

θ	585º	630º	675º	720º	765º	810º	855º	900º	945º	990º	1035º	1080º
ρ	-1.479	-1.414	-1.307	-1.155	-0.956	-0.707	-0.396	0	0.541	1.414	3.570	∞

4º) El dibujo de la curva es el siguiente:

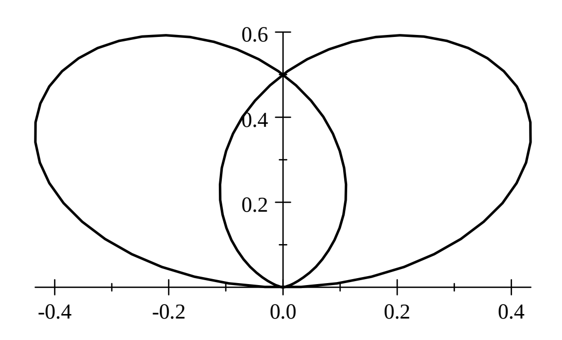


E 195- Dibujar la curva $\rho = \sin\omega \cdot \cos^2\dfrac{\omega}{2}$.

Solución: 1º) Intervalos de existencia y simetrías: Como $\rho\sin\omega = \left(\sin\omega \cdot \cos\dfrac{\omega}{2}\right)^2 \geq 0$, no hay curva por debajo del eje polar. La curva es simétrica respecto a la perpendicular al eje polar por el polo. 2º) No tiene asíntotas. Curva cerrada. 3º) Tabla de valores:

ω	0º	30º	60º	90º	120º	150º	180º	210º	240º	270º	300º	330º	360º
ρ	0	0.467	0.650	0.5	0.216	0.033	0	-0.033	-0.216	-0.5	-0.650	-0.467	0

El dibujo de la curva es el siguiente:

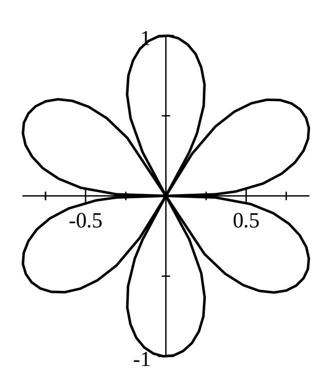


E 196- Dibujar la curva $\rho^2 = a^2 \sin 3\theta$.

Solución: 1º) Intervalo de existencia y simetría: Siendo $\rho = \pm a\sqrt{\sin 3\theta}$, la curva no tiene limitación de existencia; la curva es simétrica respecto a las siguientes rectas: $\theta = 0º, \pm 30º, \pm 60º, 90º$. La curva es simétrica respecto al polo. La curva está formada por seis lóbulos iguales, inscritos en la circunferencia de radio a. 2º) No hay asíntotas. La curva es cerrada. 3º) Tangentes en el origen: $\theta = \dfrac{k\pi}{6}$. 4º) Máximos y mínimos: Máximo de $\left|\dfrac{\rho}{a}\right| = 1$; mínimo de $\left|\dfrac{\rho}{a}\right| = 0$. 5º) Tabla de valores:

θ	0º	10º	20º	30º	40º	50º	60º
$\left\lvert\dfrac{\rho}{a}\right\rvert$	0	0.707	0.931	1	0.931	0.707	0

Los valores se repiten en intervalos de 60º. 6º) El dibujo de la curva es el siguiente:

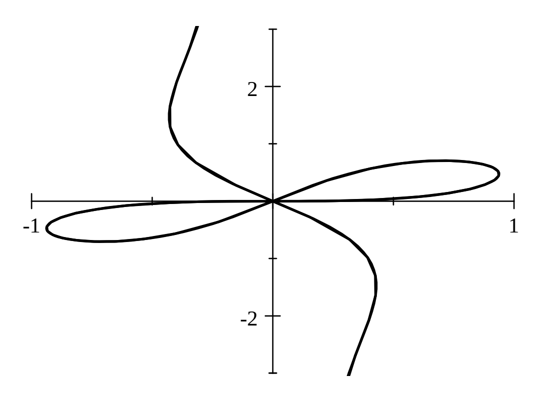


E 197- Dibujar la curva $\rho^2 = a^2 \dfrac{\sin 3\theta}{\cos\theta}$.

Solución: 1º) Intervalo de existencia y simetría: No hay curva para $\sin 3\theta \cdot \cos\theta < 0$, es decir para $60º < \theta < 90º$, $120º < \theta < 180º$, $240º < \theta < 270º$, $300º < \theta < 360º$; la curva es simétrica respecto al polo; $\left|\dfrac{\rho}{a}\right| = \sqrt{\dfrac{\sin 3\theta}{\cos\theta}}$. 2º) Asíntota: $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. 3º) Tangentes en el origen: $\theta = 0º, 60º, 120º$. 4º) Tabla de valores:

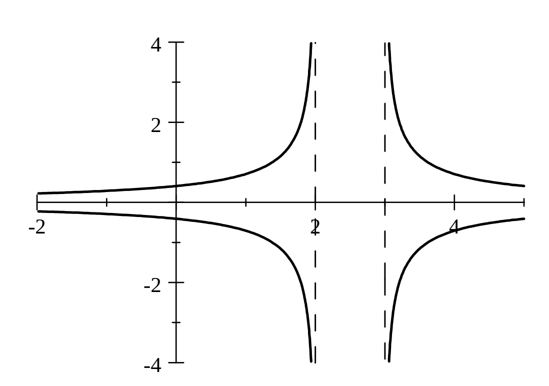
θ	0º	15º	30º	45º	60º	90º	100º	110º	120º
$\left\|\dfrac{\rho}{a}\right\|$	0	0.856	1.075	1	0	∞	2.233	1.209	0

El dibujo de la curva es el siguiente:



E 198- Dibujar la curva $\theta^2 = \dfrac{1}{\rho^2 - 5\rho + 6}$.

Solución: 1º) Diagrama cartesiano: ρ en el eje de abscisas, θ en el de ordenadas; simetría respecto al eje de abscisas; asíntotas: $\theta = 0$, $\rho = 2$, $\rho = 3$.

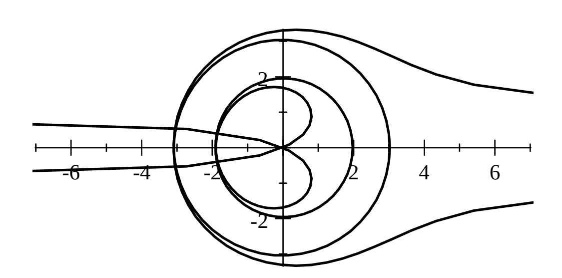


2º) Diagrama en polares: asíntota: $\theta = 0º$; círculo asintótico: $\rho = 2$; círculo asintótico: $\rho = 3$; resolviendo

la ecuación en ρ, se tiene: $\rho = \dfrac{5 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{\theta^2}}}{2}$. 3º) Tabla de valores:

θ (*radianes*)	0	0.1	0.2	0.5	1	2	3	4	5	10	20	50	∞
$\sqrt{1 + \frac{4}{\theta^2}}$	∞	20.025	10.050	4.123	2.236	1.414	1.202	1.118	1.077	1.020	1.005	1.008	1
ρ_1	∞	12.512	7.525	4.562	3.618	3.207	3,101	3.059	3.039	3.010	3.002	3.001	3
ρ_2	$-\infty$	-7.512	-2.525	0.438	1.382	1.793	1.899	1.941	1.961	1.990	1.998	1.999	2

El dibujo de la curva es el siguiente:

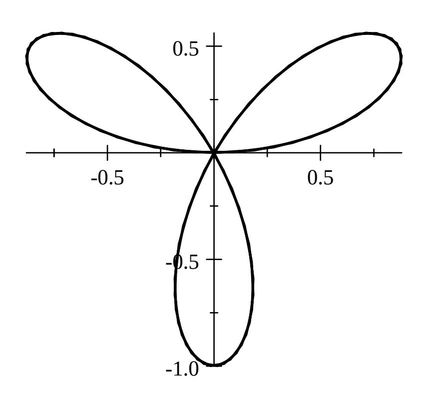


E 199- Dibujar la curva $\rho = a \sin 3\theta$, siendo $a > 0$.

Solución: 1º) Simetría: Respecto a la perpendicular al eje polar por el polo. 2º) Curva cerrada, sin asíntotas. 3º) Tangentes en el origen: $\theta = 0º, 60º, 120º$. 4º) Tabla de valores:

θ	0º	10º	20º	30º	40º	50º	60º	70º	80º	90º	100º	110º	120º
$\frac{\rho}{a}$	0	0.5	0.866	1	0.866	0.5	0	-0.5	-0.866	-1	-0.866	-0.5	0

El dibujo de la curva es el siguiente:

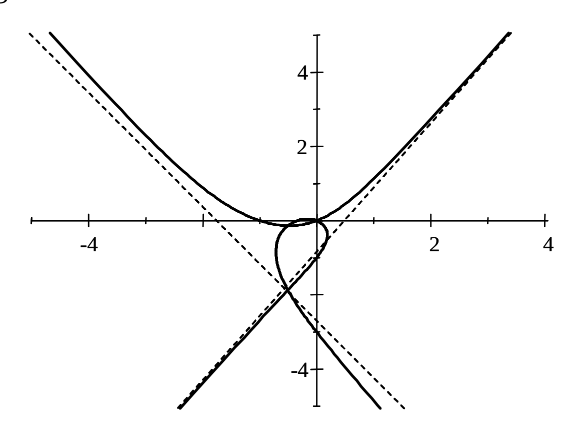


E 200- Representar la función $\rho = \dfrac{1 - 2\sin\theta}{1 - 2\cos\theta}$.

Solución: 1º) No hay simetría; el ciclo de variabilidad es 2π. 2º) Asíntotas: Para $1 - 2\cos\theta = 0$, $\theta = 2k\pi \pm 60º$, es decir, dentro del ciclo de variabilidad, se tiene que: $\theta = 60º$, $\theta = 300º$. Perpendículo: $\delta = \lim \rho \sin(\theta - \alpha)$; para $\alpha = 60º$, $\delta = \dfrac{\sqrt{3} - 3}{3}$; para $\alpha = 300º$, $\delta = \dfrac{\sqrt{3} + 3}{-3}$. 3º) Tangentes en el polo: $\theta = 30º + 2k\pi$, $\theta = -30º + 2k\pi$. 4º) Tabla de valores:

θ	0º	30º	60º	90º	120º	150º	180º	210º	240º	270º	300º	330º	360º
ρ	-1	0	∞	-1	-0.366	0	0.333	0.732	1.366	3	∞	-2.732	-1

El dibujo de la curva es el siguiente:

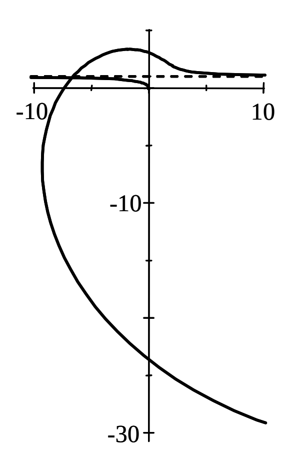


E 201- Dibujar la curva $\rho = \frac{e^{\omega}}{\omega}$.

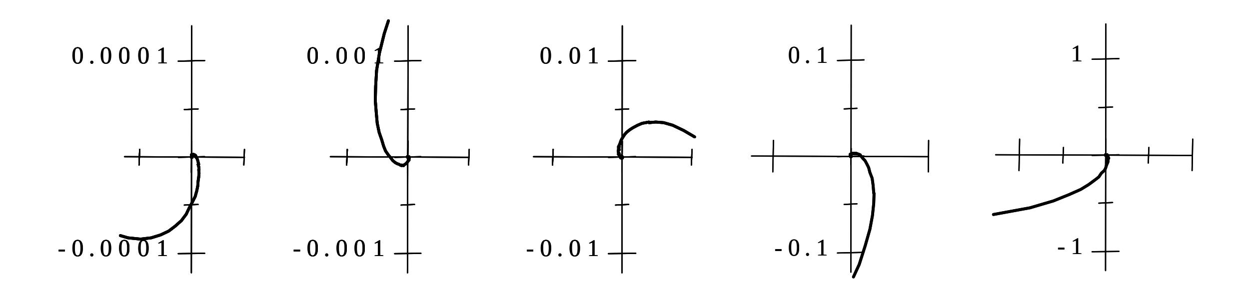
Solución: 1º) No hay simetría. El ciclo de variabilidad es $-\infty$ a $+\infty$. 2º) Asíntota: $\omega = 0$, perpendículo $\delta = \lim_{\omega=0} \left(\frac{e^{\omega}\sin\omega}{\omega}\right) = 1$. 3º) No hay tangentes en el polo. 4º) Punto asintótico para $\rho = 0$. 5º) Tabla de valores:

ω (*radianes*)	$-\infty$	-5	-2	-1	-0.5	-0.1	0	0.1	0.5	1	2	5	∞
ρ	0	-0.001	-0068	-0.367	-1.21	-9.05	∞	11.05	3.30	2.72	3.70	29.68	∞

6º) El dibujo de la curva es el siguiente:



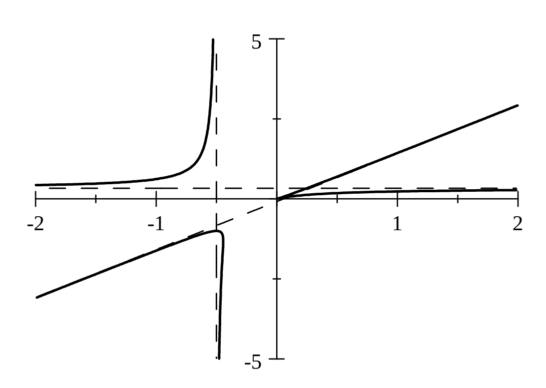
7º) Seguidamente se presentan cinco dibujos correspondientes al entorno del polo (punto asintótico), utilizando diferentes escalas:



E 202- Dibujar la curva $\rho = \frac{1}{(t-1)(t+1)}$, $\omega = \frac{1}{(t-1)(t+2)}$.

Solución: 1º) Diagrama cartesiano: ω en el eje de abscisas, ρ en el de ordenadas. Asíntotas: para $t = -2$, $\omega = \infty$, $\rho = \frac{1}{3}$; para $t = -1$, $\rho = \infty$, $\omega = \frac{-1}{2}$; para $t = 1$, $\rho = \omega = \infty$, por tanto, se tiene que:

$a = \lim\limits_{t=1} \dfrac{\rho}{\omega} = \dfrac{t+2}{t+1} = \dfrac{3}{2}$, $b = \lim\limits_{t=1} \left(\rho - \dfrac{3\omega}{2}\right) = \dfrac{-1}{12}$, la asíntota es: $\rho = \dfrac{3\omega}{2} - \dfrac{1}{12}$. Tangente en el origen: $\rho = \omega$.

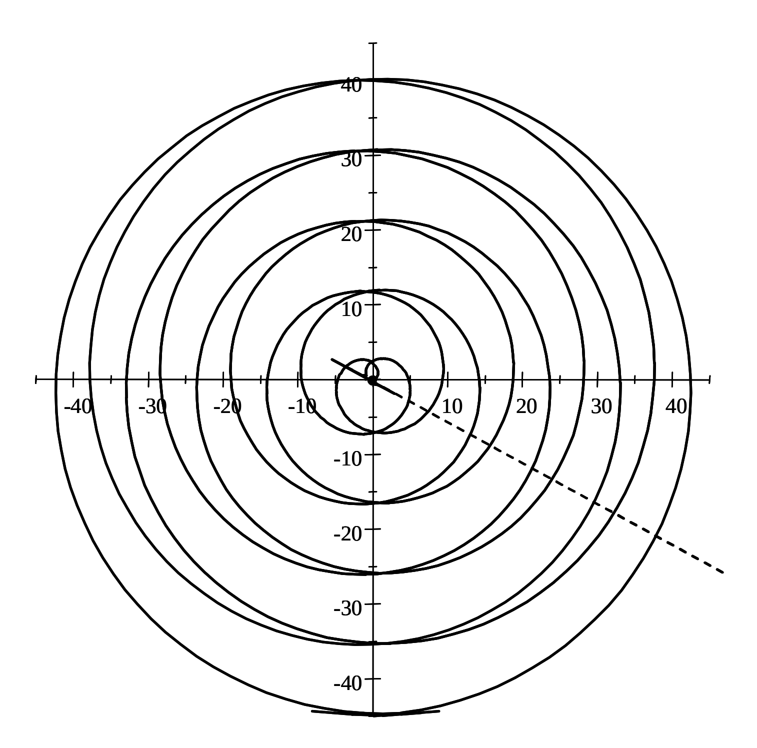


2º) Asíntotas en polares: Para $t = -2$, círculo asintótico: $\rho = \dfrac{1}{3}$; para $t = -1$, $\omega = \dfrac{-1}{2}$, $\delta = \lim\limits_{t=-1} \rho(\omega - \alpha) = \lim\limits_{t=-1} \dfrac{1}{(t-1)(t+1)}\left[\dfrac{1}{(t-1)(t+2)} + \dfrac{1}{2}\right] = \dfrac{-1}{8}$, asíntota: $\rho = \dfrac{-1}{8\sin\left(\omega + \frac{1}{2}\right)}$; para $t = 1$, $\rho = \omega = \infty$, rama en espiral. 3º) Tabla de valores:

t	$-\infty$	-10	-5	-3	-2.1	-2	-1.9	-1.1	-1	-0.9	0	0.5
ω	0	0.011	0.056	0.250	3.226	∞	-3.448	-0.529	-0.500	-0.478	-0.500	-0.800
ρ	0	0.010	0.063	0.125	0.293	0.333	0.383	4.762	∞	$-5,263$	-1	-1.333

t	0.9	1	1.1	2	3	5	10	$+\infty$
ω	-3.449	∞	3.226	0.250	0.100	0.036	0.009	0
ρ	-5.263	∞	4.762	0.333	0.125	0.042	0.010	0

El dibujo de la curva en coordenadas polares, es el siguiente:



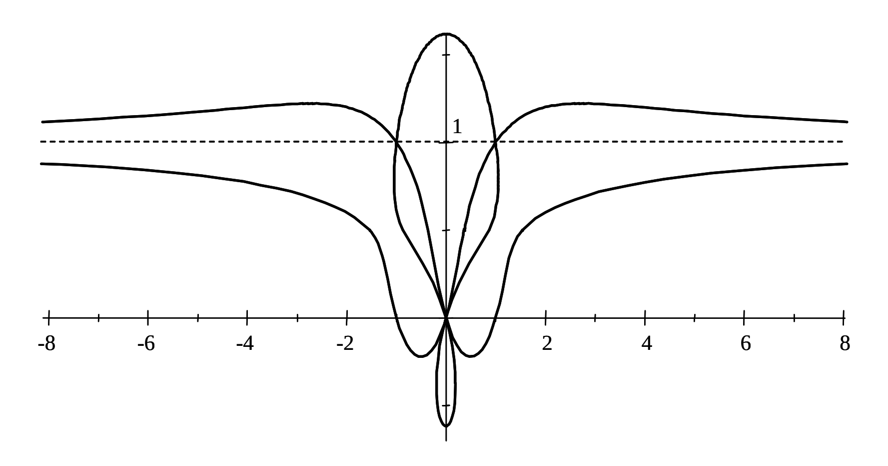
E 203- Representar la curva $\rho^2 \sin\omega - \rho + \cos 2\omega = 0$.

Solución: 1º) Ciclo de variabilidad: 2π. 2º) Simetría respecto a la perpendicular al eje polar por el polo.

3º) Asíntotas: Como $\rho = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4\sin\omega\cos 2\omega}}{2\sin\omega}$, para $\rho = \infty$, $\sin\omega = 0$. Luego: $\omega = 0$, $\omega = \pi$. El perpendículo es: $\delta = \dfrac{1}{\cos\alpha} = \pm 1$. 4º) Tangentes en el polo: $\omega = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}$. 5º) Tabla de valores:

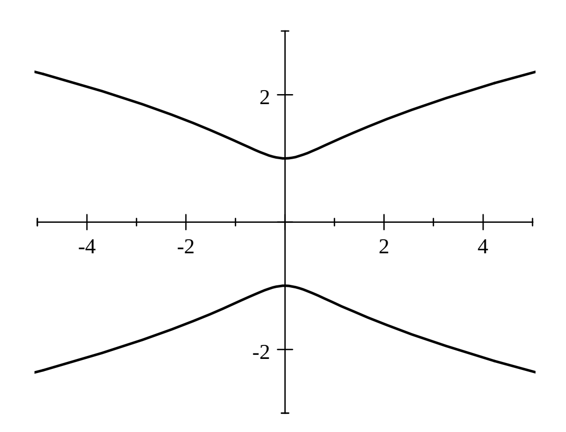
ω	0º	30º	60º	90º	120º	150º	180º	210º	240º	270º	300º	360º
$\sqrt{1-4\sin\omega\cos 2\omega}$	1	0	1.653	2.236	1.653	0	1	1.414	–	–	–	1
ρ_1	∞	1	1,532	1.618	1.532	1	∞	−2.414	–	–	–	∞
ρ_2	1	1	−0.377	−0.618	−0.377	1	∞	0.414	–	–	–	1

El dibujo de la curva es el siguiente:



E 204- Dibujar la curva $\rho = \dfrac{1}{\sin^2\omega}$.

Solución: 1º) Simetría respecto al eje polar y a su perpendicular por el polo, por tanto, simetría respecto al polo. 2º) Asíntotas: $\rho = \infty$ para $\omega = 0$; $\delta = \lim\limits_{\omega=0} \rho\sin\omega = \lim\limits_{\omega=0} \dfrac{1}{\sin\omega} = \infty$, luego se trata de una rama parabólica según el eje polar. 3º) Tangente en $\rho = 1$, $\omega = 90º$, $\dfrac{1}{\rho} = \sin\omega$. El dibujo de la curva es el siguiente:

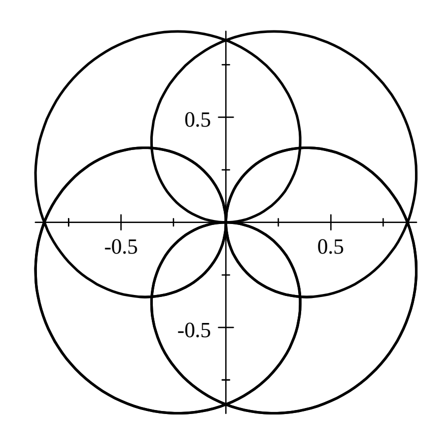


E 205- Dibujar la curva $\rho = \sin\dfrac{2\theta}{3}$.

Solución: 1º) La curva es simétrica respecto al eje polar, a su perpendicular por el polo, y respecto a las dos bisectrices. 2º) Es suficiente estudiar la curva en el intervalo $0 \leq \theta \leq \dfrac{3\pi}{2}$. 3º) La curva es cerrada, no tiene asíntotas ni ramas parabólicas. 4º) Pasa por el polo, que es punto cuádruple, con dobles tangentes: $\theta = 0$, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. Corta al eje polar en $\rho = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Corta a su perpendicular por el polo, en $\rho = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Corta a las bisectrices en $\rho = \pm\dfrac{1}{2}$, $\rho = \pm 1$. 5º) Tabla de valores:

θ	0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º
ρ	0	0.342	0.5	0.643	0′866	0.985	1

El dibujo de la curva es el siguiente:



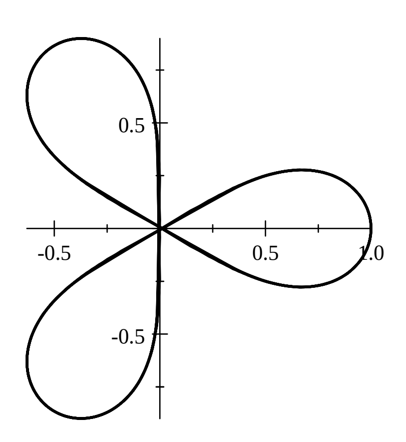
E 206- Dibujar la curva $\rho = \sqrt[3]{\cos 3\theta}$.

Solución: 1º) La curva es simétrica respecto al eje polar. Variación de θ: $0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$. No tiene asíntotas ni ramas parabólicas, es cerrada. 2º) Las tangentes en el polo, son: $\theta = 30º$, 90º, 150º. 3º) Corta al eje polar, además del polo, en $\rho = 1$, con tangente perpendicular al eje polar. 4º) Tabla de valores:

θ	0º	10º	20º	30º	40º	50º	60º
ρ	1	0.953	0.794	0	−0.794	−0.953	−1

.

El dibujo de la curva es el siguiente:



E 207- Dibujar la curva $\rho = \theta \tan\theta$.

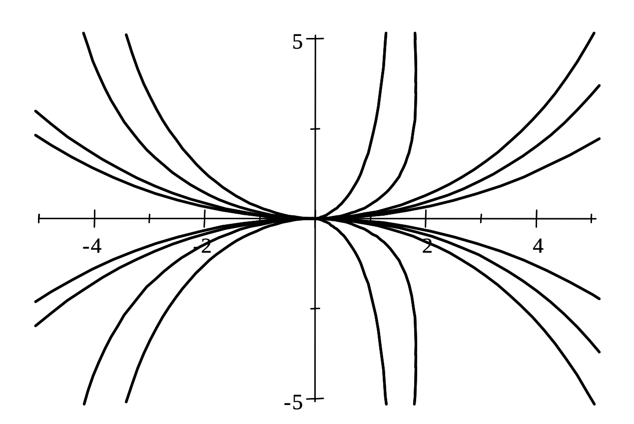
Solución: 1º) La curva es simétrica respecto al eje polar. Variación de θ: $0 \leq \theta \leq +\infty$. 2º) Tiene infinitas asíntotas de ecuación $\rho = \dfrac{\pm\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)}{\sin\left(\theta - k\pi - \frac{\pi}{2}\right)}$. 3º) Pasa por el polo, donde la tangente es el eje polar.

4º) Tabla de valores:

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
ρ	0	0.577	0.785	1.814	∞	−3.628	−2.356	−1.511	0

θ	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$11\pi/6$	2π
ρ	2.116	3.927	7.255	∞	−9069	−5498	3.325	0

El dibujo de la curva es el siguiente:

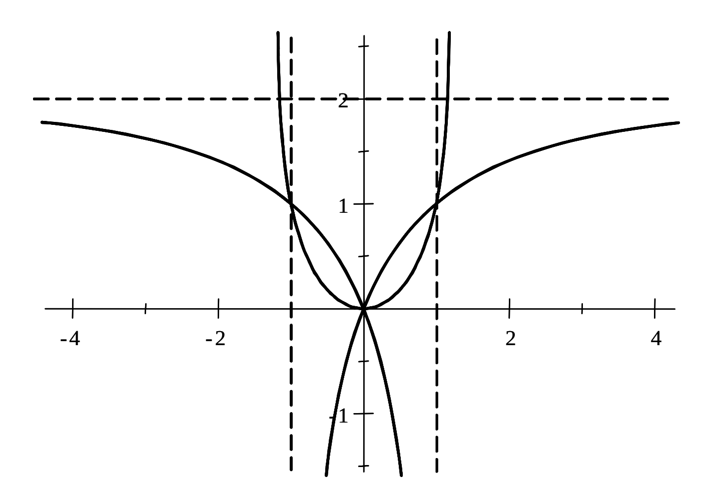


E 208- Dibujar la curva $\rho = \tan\theta + \tan\dfrac{\theta}{2}$.

Solución: 1º) La curva es simétrica respecto a la perpendicular al eje polar por el polo. Variación de θ: $0 \le \theta \le \pi$. 2º) Asíntotas: La curva tiene las siguientes asíntotas: $\rho\sin(\theta - \pi) = -2$, $\rho\sin(\theta - \frac{\pi}{2}) = -1$ y su simétrica. 3º) Las tangentes en el polo son: $\theta = 0$, $\theta = \pm\dfrac{2\pi}{3}$. 4º) Tabla de valores:

θ	0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º
ρ	0	0.845	1.414	2.309	∞	0	1.414	3.155	∞

El dibujo de la curva es el siguiente:



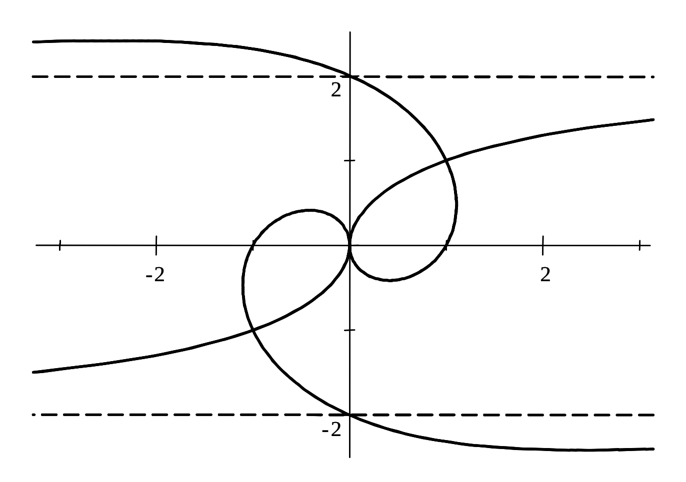
E 209- Dibujar la curva $\rho = \dfrac{\sqrt{1+\sin\theta}}{\cos\dfrac{\theta}{2}}$.

Solución: 1º) La curva es simétrica respecto al polo. Variación de θ: $0 \le \theta \le 2\pi$. 2º) Las asíntotas son: $\rho\sin(\theta - \pi) = -2$, y su simétrica. 3º) La tangente (doble) en el polo es: $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. 4º) La intersección con el eje polar es: $\rho = \pm 1$. La intersección con la perpendicular al eje polar por el polo, es: $\rho = \pm 2$. 5º) La curva tiene el punto doble (además del polo): $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, $\rho = \sqrt{2}$, y su simétrico. 6º) Tabla de valores:

θ	0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º
ρ	1	1.268	1.414	1.577	0	2.732	3.414	4.732	∞

θ	210º	225º	240	270º	300º	315º	330º	360º
ρ	-2.732	-1.414	-0.732	0	-0.423	-0.586	-0.732	1

El dibujo de la curva es el siguiente:



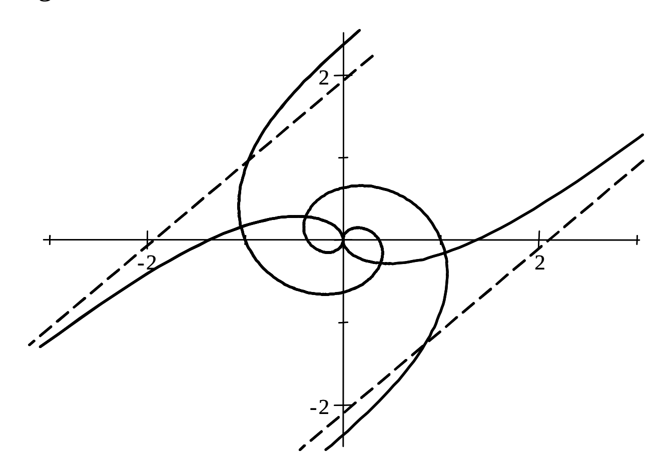
E 210- Dibujar la curva $\rho = \dfrac{1}{1+\tan\dfrac{\theta}{3}}$.

Solución: 1º) La curva es simétrica respecto al polo. Variación de θ: $0 \leq \theta \leq 3\pi$. 2º) La curva tiene las asíntotas: $\rho\sin\left(\theta - \dfrac{9\pi}{4}\right) = \dfrac{3}{2}$, y su simétrica. 3º) La tangente (doble) en el polo (punto doble) es: $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. 4º) La curva corta al eje polar en: $\rho = 1$, $\rho = \dfrac{1}{1+\sqrt{3}}$, y sus simétricos. Corta a la perpendicular al eje polar por el polo, en: $\rho = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$, y su simétrico. 5º) Tabla de valores:

θ	0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º	210	240º	270º	300º	330º	360º
ρ	1	0.85	0.79	0.73	0.63	0.54	0.5	0.46	0.37	0.27	0.15	0	−0.21	−0.57	−1.37

θ	390º	420º	450º	480º	510º	540º
ρ	−5.22	6.22	2.37	1.57	1.21	1

El dibujo de la curva es el siguiente:



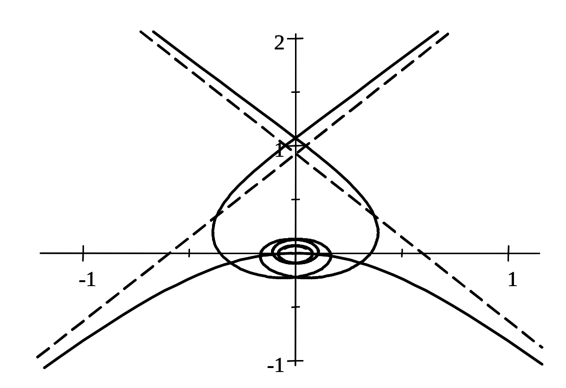
E 211- Dibujar la curva $\rho = \dfrac{\theta}{\theta^2 - 1}$.

Solución: 1º) La curva es simétrica respecto a la perpendicular al eje polar por el polo. 2º) La curva tiene dos asíntotas: $\rho\sin(\theta \pm 1) = \dfrac{1}{2}$. 3º) Para $\rho = 0$, hay dos valores de θ: $\theta = 0$ y $\theta = \infty$ (punto asintótico). 4º) Intersección con el eje polar (además del polo): $\rho = \dfrac{k\pi}{k^2\pi^2 - 1} = 0.354,\ 0.163,\ 0.107,...$ Intersección con la perpendicular al eje polar por el polo (además del polo): $\rho = \dfrac{\dfrac{\pi}{2} + k\pi}{\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)^2 - 1} = 1.07,\ 0.222,\ ...$

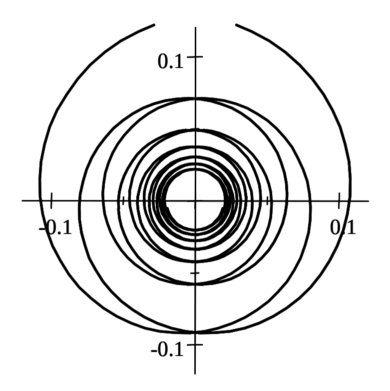
5º) Tabla de valores:

θ	0	$\pi/6$	$\pi/3$	1	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	3π	5π	10π
ρ	0	0.015	10.84	∞	1.07	0.35	0.22	0.16	0.11	0.064	0.032

El dibujo de la curva es el siguiente:



En el dibujo siguiente se presenta un detalle del punto cíclico para el intervalo $0.02 \leq |\rho| \leq 0.1$.

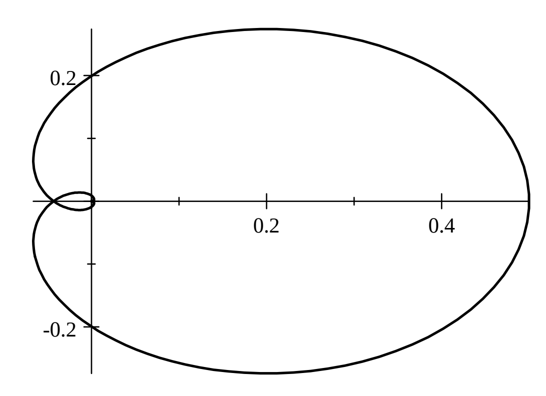


E 212- Dibujar la curva $\rho = \dfrac{1}{e^{\theta} + e^{-\theta}}$.

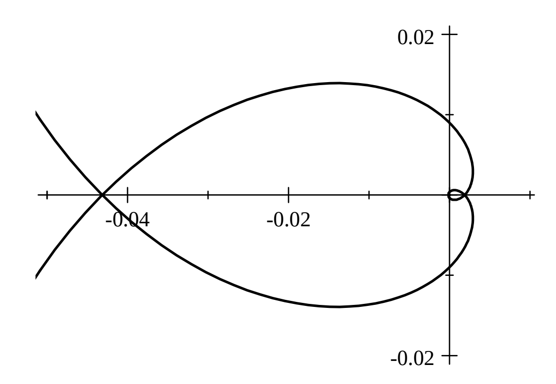
Solución: 1º) La curva es simétrica respecto al eje polar. 2º) La curva no tiene asíntotas ni ramas parabólicas. 3º) Para $\rho = 0$, $\theta = \infty$, luego el polo es un punto asintótico. 4º) Intersección con el eje polar: $\rho = \dfrac{1}{e^{k\pi} + e^{-k\pi}} = 0.5,\ 0.043,\ 0.00187$,... Intersección con la perpendicular al eje polar por el polo: $\rho = \dfrac{1}{e^{\frac{\pi}{2}+k\pi} + e^{\frac{-\pi}{2}-k\pi}} = 0.2,\ 0.009$,... 5º) Para $\theta = 0$, $\tan V = \infty$. Para $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, $\tan V = -1.09$. 6º) Tabla de valores:

θ	0	$\pi/2$	π	2π
ρ	0.5	0.2	0.043	0.00187

El dibujo de la curva es el siguiente:



En el dibujo siguiente se incluye un detalle del entorno del polo.

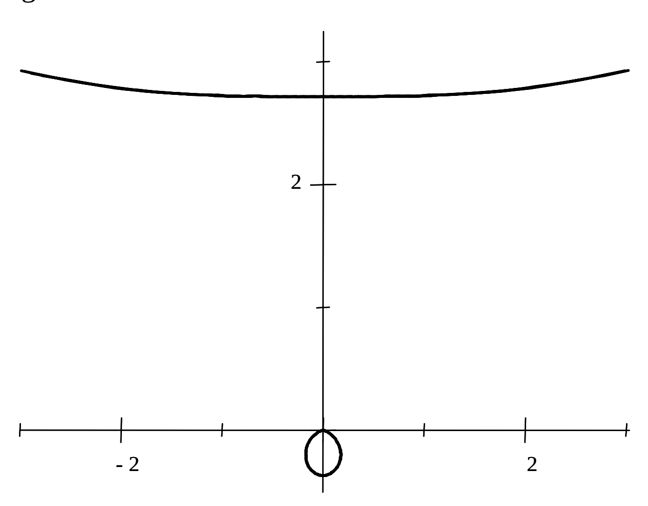


E 213- Dibujar la curva $\rho = e^{\frac{1}{\sin\theta}}$.

Solución: 1º) La curva es simétrica respecto a la perpendicular al eje polar por el polo. Variación de θ: $\frac{-\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. 2º) Para $\theta = 0$, $\delta = \lim_{\theta=0} \rho\sin\theta = \infty$, la curva tiene una rama parabólica. 3º) Como para $\rho = 0$, $\frac{1}{\sin\theta} = -\infty$, $\sin\theta = 0 - \varepsilon$, $\theta = 0 - \varepsilon$, es decir la tangente en el polo es: $\theta = 0$. 4º) La curva corta a la perpendicular al eje polar por el polo, en: $\rho = e$, y en: $\rho = \frac{1}{e}$. 5º) Tabla de valores:

θ	–90º	–60º	–45º	–30º	0º	30º	45º	60º	90º
ρ	0.368	0.315	0.243	0.135	∞	7.389	4.113	3.173	2.718

El dibujo de la curva es el siguiente:



E 214- Dibujar la curva $\rho = \ln(\theta^2 - 3\theta + 2)$.

Solución: 1º) Existe curva para $\theta > 2$ y $\theta < 1$. No tiene simetrías. 2º) La curva tiene dos asíntotas: $\theta = 1$, $\theta = 2$. 3º) Para $\theta \to \pm\infty$, $\rho \to \infty$, luego la curva tiene dos ramas parabólicas que giran en sentido contrario alrededor del polo, alejándose indefinidamente de este. 4º) Intersección con el eje polar: $\theta = k\pi$, $\rho = \ln(k^2\pi^2 - 3k\pi + 2)$, obteniéndose los siguientes valores:

θ	-100π	-10π	-3π	$-\pi$	0	π	3π	10π	100π
ρ	11.509	6.988	4.780	3.058	0.693	0.894	4.136	6.797	11.490

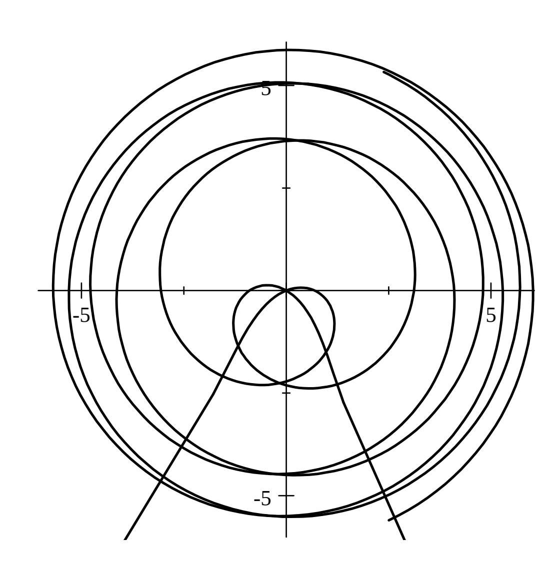
5º) Intersección con la perpendicular al eje polar por el polo: $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, obteniéndose los siguientes valores:

θ	$\frac{-199\pi}{2}$	$\frac{-9\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{2}$	$\frac{101\pi}{2}$
ρ	11.519	6.890	2.217	2.309	5.306	11.500

6º) El valor de $\tan V = \dfrac{\rho}{\rho'} = \dfrac{(\theta^2 - 3\theta + 2) \cdot \ln(\theta^2 - 3\theta + 2)}{2\theta - 3}$, se incluye en la siguiente tabla:

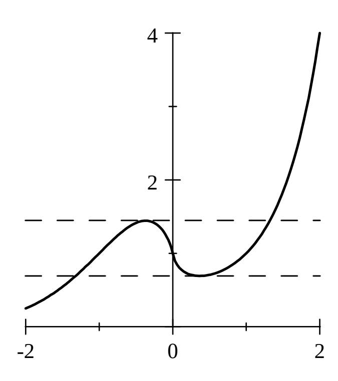
θ	0	π	$-\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{-3\pi}{2}$
$\tan V$	-0.462	0.666	-7.016	3.620	-11.253
V	$-24^{o},8$	$33^{o},65$	$-81^{o},89$	$74^{o},56$	$-84^{o},92$

El dibujo de la curva es el siguiente:



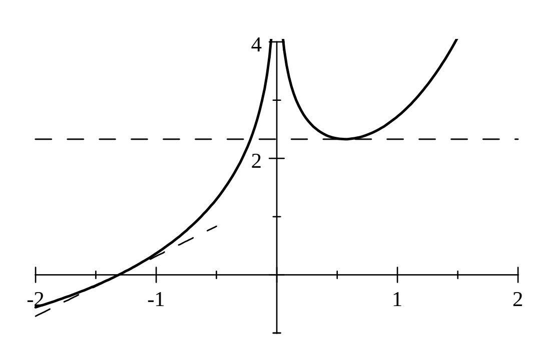
E 215- Estudiar y dibujar la función $y = |x|^x$, siendo x real.

Solución: 1º) Para $x > 0$, la ecuación de la curva es: $y = x^x$. Para $x < 0$, la ecuación de la curva es: $y = (-x)^x$. Para $x = 0+\varepsilon$, $y \to 1$. Para $x = 0-\varepsilon$, $y \to 1$. Siempre $y > 0$. 2º) Máximos y mínimos: Para $x > 0$, $y' = x^x(\ln x + 1)$. Luego la curva tiene un mínimo para $x = \frac{1}{e} = 0.368$, $y = \frac{1}{e^{\frac{1}{e}}} = 0.692$, es decir $(0.368, 0.692)$. Para $x < 0$, $y' = -x^{-x}(1+\ln x)$. Luego la curva tiene un máximo para $x = \frac{-1}{e} = -0.368$, $y = e^{\frac{1}{e}} = 1.447$, es decir $(-0.368, 1.447)$. 3º) Para $x \to +\infty$, $y \to +\infty$, $\lim \frac{y}{x} = +\infty$. Luego la curva tiene una rama parabólica según el eje OY. 4º) Para $x \to -\infty$, $y \to 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = 0$. Luego la curva tiene la asíntota: $y = 0$. 5º) La pendiente de la tangente en $(0,1)$, es para $x = 0+\varepsilon$, $y' = -\infty$, y para $x = 0-\varepsilon$, $y' = +\infty$, siendo dicho punto de inflexión. El dibujo de la curva es el siguiente:



E 216- Dibujar la curva $y = e^x - \ln|x|$.

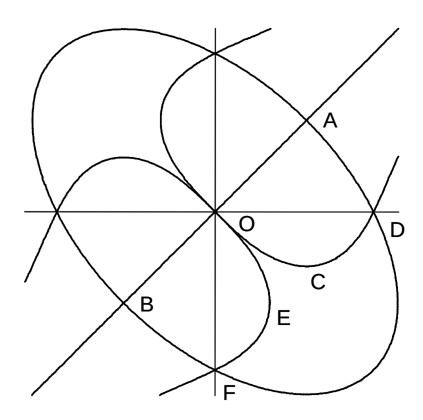
Solución: 1º) Para $x > 0$, la ecuación de la curva es: $y = e^x - \ln x$. Para $x < 0$, la ecuación de la curva es: $y = e^x - \ln(-x)$. 2º) Máximos y mínimos: Para $x > 0$, $y' = e^x - \frac{1}{x} = 0$. La solución de esta ecuación es $x = 0.567$. Luego la curva tiene un mínimo en $(0.567, 2.33)$. La curva no tiene máximo. 3º) Para $x = 0$, $\lim \frac{y}{x} = \infty$. La curva tiene la asíntota: $x = 0$. 4º) Para $x \to +\infty$, $y \to +\infty$, $\lim \frac{y}{x} = +\infty$. La curva tiene una rama parabólica según el eje OY. 5º) Para $x \to -\infty$, $y \to -\infty$, $\lim \frac{y}{x} = 0$. La curva tiene una rama parabólica según el eje OX'. 6º) La curva corta al eje XX', en el punto $(-1.31, 0)$, siendo la pendiente de la tangente en este punto, $y' = 1.03$. El dibujo de la curva es el siguiente:



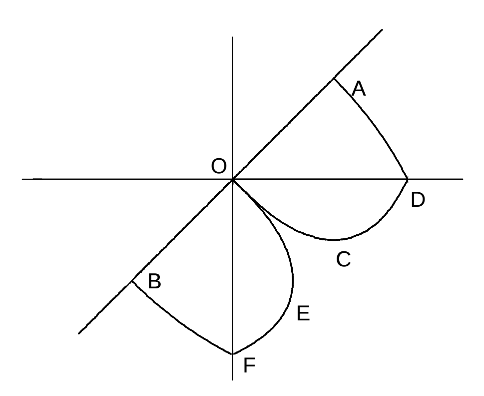
E 217- Dibujar la curva $||x| - |y|| = x^3 - y^3$.

Solución: Como $x^3 - y^3 \geq 0$, solo existe curva en la primera bisectriz y por debajo de ella. Estudiando la curva por cuadrantes, se tiene: Cuadrante 1º: $|x-y| - |x^3-y^3| = 0$, $\varphi_1 \equiv x - y = 0$, $\varphi_2 = x^3 - y^3 = 0$, $\varphi_1 > 0$, $\varphi_2 > 0$; de donde: $(x-y)(x^2+xy+y^2-1) = 0$. La curva está formada por la primera bisectriz y por el arco AD. Cuadrante 2º: no hay curva. Cuadrante 3º: $\varphi_1 \equiv -x + y = 0$, $\varphi_2 \equiv x^3 - y^3 = 0$, $\varphi_1 < 0$, $\varphi_2 > 0$, de donde: $(x-y)(x^2+xy+y^2-1) = 0$. La curva está formada por la primera bisectriz y por el arco BF. Cuadrante 4º: $\varphi_1 \equiv x + y$, $\varphi_2 \equiv x^3 - y^3$, pudiendo ser: a) $\varphi_1 > 0$, $\varphi_2 > 0$, de donde: $y^3 - x^3 + x + y = 0$, o bien, b) $\varphi_1 < 0$, $\varphi_2 > 0$, de donde: $x^3 - y^3 + x + y = 0$. La curva está formada por los arcos OCD y OEF. Resumiendo, la curva está formada por la primera bisectriz en toda su longitud, y

por los arcos AD, OCD, BF y OEF, como se indica en el dibujo siguiente:

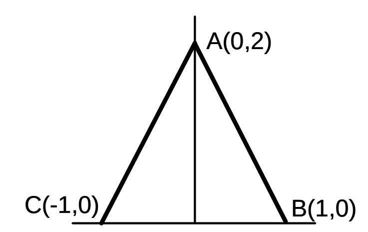


Por tanto, el dibujo de la curva es el siguiente:



E 218- Dibujar la curva $(y+|2x|-2)^2+(y-|y|)^2=0$.

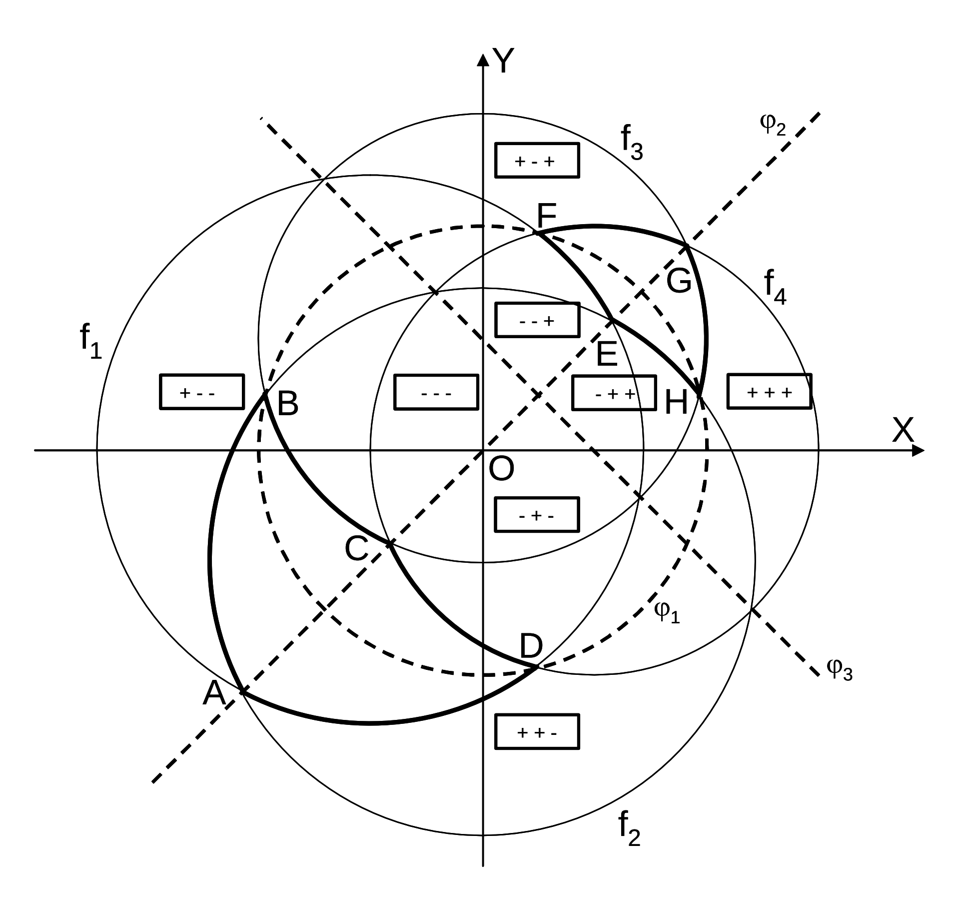
Solución: Siendo una suma de dos cuadrados igual a cero, cada uno de los dos sumandos ha de ser nulo, luego: $y+|2x|-2=0$, $y-|y|=0$. De la primera igualdad se tiene que: $|2x|=2-y$, de donde: $2-y\geq 0$, $y\leq 2$. De la segunda igualdad se tiene que: $|y|=y$, luego: $y\geq 0$. Por tanto, $0\leq y\leq 2$. Para $x>0$, se obtiene de la primera igualdad, la recta: $2x+y-2=0$, y para $x<0$, la recta: $2x-y+2=0$. De la primera recta es solución el segmento AB, siendo $A(0,2)$ y $B(1,0)$. De la segunda recta es solución el segmento AC, siendo $C(-1,0)$. La curva está formada por los segmentos AB y AC.



E 219- Dibujar la curva de valores absolutos $|x^2+y^2-4|+|x-y|-|x+y-1|=0$.

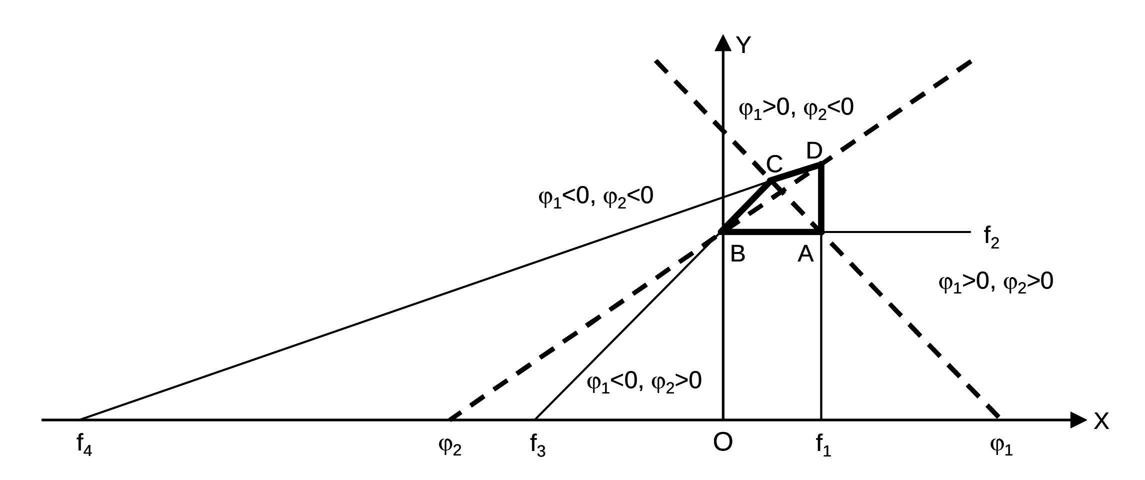
Solución: 1º) Se dibujan las curvas $\varphi_1\equiv x^2+y^2-4=0$, $\varphi_2\equiv x-y=0$, $\varphi_3\equiv x+y-1=0$. 2º) Se halla el signo de cada una de las ocho regiones que delimitan en el plano. Estos signos, recuadrados, se han incluido en el dibujo, en cada región. 3º) En la región definida por: $\varphi_1>0$, $\varphi_2>0$, $\varphi_3<0$, se dibuja: $f_1\equiv +(x^2+y^2-4)+(x-y)-[-(x+y-1)]=x^2+y^2+2x-5=0$, obteniéndose el arco AD. 4º) En la región definida por: $\varphi_1>0$, $\varphi_2<0$, $\varphi_3<0$, se dibuja: $f_2\equiv +(x^2+y^2-4)-(x-y)-[-(x+y-1)]=$ $=x^2+y^2+2y-5=0$, obteniéndose el arco AB. 5º) En la región: $\varphi_1>0$, $\varphi_2>0$, $\varphi_3>0$, se dibuja: $f_3\equiv +(x^2+y^2-4)+(x-y)-[+(x+y-1)]=x^2+y^2-2y-3=0$, obteniéndose el arco GH. 6º) En la región: $\varphi_1>0$, $\varphi_2<0$, $\varphi_3>0$, se dibuja: $f_4\equiv +(x^2+y^2-4)-(x-y)-[+(x+y-1)]=x^2+y^2-$ $-2x-3=0$, obteniéndose el arco FG. 7º) En la región: $\varphi_1<0$, $\varphi_2<0$, $\varphi_3>0$, se dibuja f_1,

obteniéndose el arco FE. 8º) En la región definida por: $\varphi_1 < 0$, $\varphi_2 > 0$, $\varphi_3 > 0$, se dibuja f_2, obteniéndose el arco EH. 9º) En la región definida por: $\varphi_1 < 0$, $\varphi_2 < 0$, $\varphi_3 < 0$, se dibuja f_3, obteniéndose el arco BC. 10º) En la región definida por: $\varphi_1 < 0$, $\varphi_2 > 0$, $\varphi_3 < 0$, se dibuja f_4, obteniéndose el arco CD. 11º) La curva pedida está formada por los dos cuadriláteros curvilíneos $ABCD$ y $EFGH$, como se indica en el dibujo siguiente.



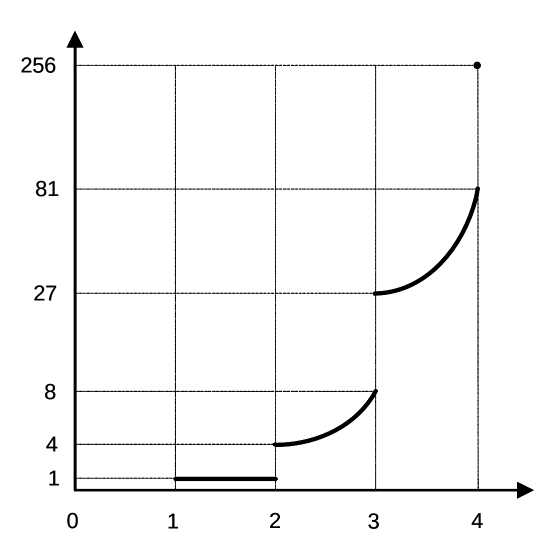
E 220- Dibujar la curva de valores absolutos $|x+y-3|+|2x-3y+6|+2y-x=5$.

Solución: 1º) Se dibujan las rectas $\varphi_1 \equiv x+y-3=0$, $\varphi_2 \equiv 2x-3y+6=0$. 2º) Se halla el signo de cada una de las cuatro regiones que estas rectas delimitan en el plano. 3º) En la región $\varphi_1 > 0$, $\varphi_2 > 0$, se dibuja: $f_1 \equiv +(x+y-3)+(2x-3y+6)+2y-x-5=2x-2=0$, luego: $f_1 \equiv x-1=0$. 4º) En la región $\varphi_1 < 0$, $\varphi_2 > 0$, se dibuja: $f_2 \equiv -(x+y-3)+(2x-3y+6)+2y-x-5=-2y+4=0$, luego: $f_2 \equiv y-2=0$. 5º) En la región $\varphi_1 < 0$, $\varphi_2 < 0$, se dibuja: $f_3 \equiv -(x+y-3)-(2x-3y+6)+ +2y-x-5=-4x+4y-8=0$, luego: $f_3 \equiv x-y+2=0$. 6º) En la región $\varphi_1 > 0$, $\varphi_2 < 0$, se dibuja: $f_4 \equiv +(x+y-3)-(2x-3y+6)+2y-x-5=-2x+6y-14=0$, luego: $f_4 \equiv x-3y+7=0$. 7º) Las intersecciones de las rectas: f_1, f_2, f_3, f_4, dan los cuatro puntos: $A(1,2)$, $B(0,2)$, $C\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$, $D\left(1,\frac{8}{3}\right)$. El cuadrilátero $ABCD$ es la curva pedida.



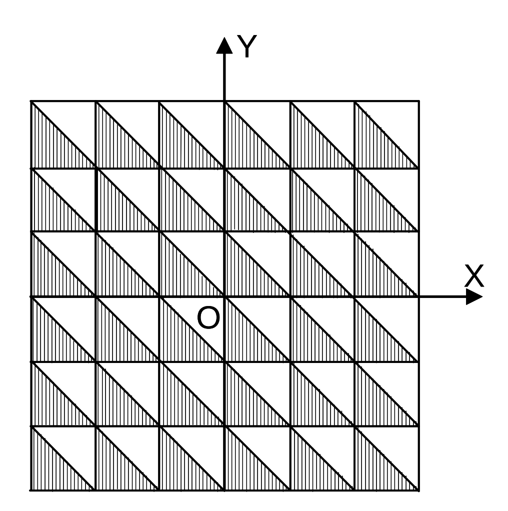
E 221- Estudiar la función $y = [E(x)]^x$, en el intervalo $1 \leq x \leq 4$. Dibujarla e indicar la naturaleza de sus discontinuidades.

Solución: Cuando x toma valores en el intervalo $1 \leq x < 2$, la función permanece constante, igual a 1. En el intervalo $2 \leq x < 3$, la función es la exponencial $y = 2^x$. En el intervalo $3 \leq x < 4$, la función es la exponencial $y = 3^x$. Por tanto, la curva solo es discontinua en los valores enteros de x, siendo la discontinuidad de primera especie. El dibujo de la curva, en el que las ordenadas no conservan la escala, es el siguiente:



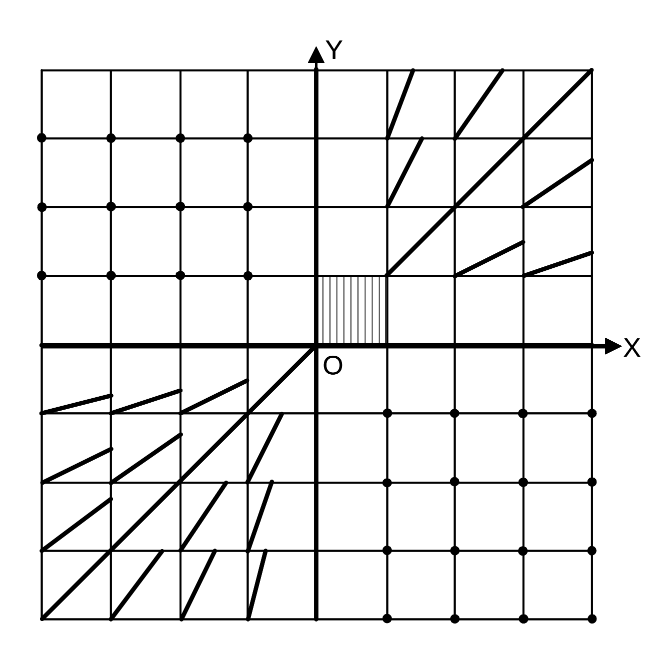
E 222- Representar la función de valores enteros $E(x) + E(y) = E(x+y)$.

Solución: Se divide el plano en escaques de lado la unidad, a partir del origen. Siendo (α, β) las coordenadas de un punto respecto al vértice inferior izquierdo del escaque en que está situado (es decir: $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq \beta \leq 1$), las coordenadas de dicho punto respecto al origen de coordenadas, se exponen seguidamente para cada cuadrante: 1º) Primer cuadrante: $x = E(x) + \alpha$, $y = E(y) + \beta$, $E(x+y) = $ $= E[E(x) + \alpha + E(y) + \beta] = E(x) + E(y) + E(\alpha + \beta)$. Para un escaque determinado, la curva corresponde a la parte rayada, en la que: $E(\alpha + \beta) = 0$. 2º) Segundo cuadrante: $x = -E(x) + \alpha$, $y = E(y) + \beta$, $E(x+y) = E[-E(x) + \alpha + E(y) + \beta] = -E(x) + E(y) + E(+\alpha + \beta)$. Para un escaque determinado, la curva corresponde a la parte rayada, en la que: $E(\alpha + \beta) = 0$, como en el primer cuadrante. 3º) Tercer cuadrante: la solución es la misma que en los dos casos anteriores, puesto que siendo: $x = -E(x) + \alpha$, $y = -E(y) + \beta$, se tiene que: $E(x+y) = E[-E(x) + \alpha - E(y) + \beta] = -E(x) - E(y) + E(\alpha + \beta)$. 4º) Cuarto cuadrante: la solución es la misma que en los casos anteriores, pues: $x = E(x) + \alpha$, $y = -E(y) + \beta$, por tanto se tiene que: $E(x+y) = E[E(x) + \alpha - E(y) + \beta] = E(x) - E(y) + E(\alpha + \beta)$. 5º) El dibujo de la curva es el siguiente:



E 223- Dibujar la curva de valores enteros $\frac{E(x)}{E(y)} = \frac{x}{y}$.

Solución: Se divide el plano en escaques cuadrados de lado la unidad. 1º) Primer cuadrante: Como en el problema anterior E 222, se tiene que: $x = E(x) + \alpha$, $y = E(y) + \beta$; luego, situando el origen en el vértice inferior izquierda de un escaque, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{E(x)}{E(y)}$, que es la ecuación de una recta que, para valores dados de $E(x)$ y de $E(y)$, parte del origen. En el primer escaque, todo él es solución (está rayado en la figura). En el resto de escaques adyacentes al eje *OX*, la solución es el propio eje *OX*. En los escaques adyacentes al eje *OY*, la solución es el propio eje *OY*. En los escaques atravesados por la primera bisectriz, la solución es la propia bisectriz. En cualquier otro escaque, la solución corresponde al segmento (comprendido dentro del escaque) de la recta que une el origen *O* con el vértice inferior izquierdo de dicho escaque. 2º) Cuarto cuadrante: $x = E(x) + \alpha$, $y = -E(y) + \beta$; luego: $E(y) = E[-E(y) + \beta] = -E(y)$, $\frac{E(x)}{E(y)} = \frac{-\alpha}{\beta}$. Para los escaques adyacentes a la parte negativa OY', del eje vertical, la solución es OY'. En cualquier otro escaque, la solución corresponde al vértice inferior izquierdo. 3º) Segundo cuadrante: $x = -E(x) + \alpha$, $y = E(y) + \beta$, $\frac{-E(x)}{E(y)} = \frac{\alpha}{\beta}$. Para los escaques adyacentes a la parte negativa del eje XX', la solución es el propio eje OX'. Para los restantes escaques, la solución es el vértice inferior izquierdo de dicho escaque. 4º) Tercer cuadrante: $x = -E(x) + \alpha$, $y = -E(y) + \beta$, $\frac{-E(x)}{-E(y)} = \frac{\alpha}{\beta}$. Para los escaques atravesados por la primera bisectriz, la solución es la propia bisectriz. En cualquier otro escaque, la solución corresponde al segmento (comprendido dentro del escaque) de la recta que une el origen *O* con el vértice inferior izquierdo de dicho escaque. 5º) El dibujo de la curva es el siguiente:



Geometría Analítica del Espacio

Sección F - ELEMENTOS. LUGARES GEOMÉTRICOS

F 1- Las coordenadas de un punto referidas a unos ejes rectangulares $OXYZ$, son $(-1,2,3)$. Hallar las nuevas coordenadas cuando se toman unos ejes $OX'Y'Z'$ con las siguientes condiciones: el origen es el mismo, el ángulo $\widehat{X'X} = 60º$, el ángulo $\widehat{X'Y} = 45º$, sabiendo que el eje Y' está situado en el plano XOY.

Solución: Sean: a', a'', a''', los cosenos de los ángulos que forma el eje OX con los nuevos ejes OX', OY', OZ'. Sean: b', b'', b''', los análogos correspondientes al eje OY. Sean: c', c'', c''', los del eje OZ. Se conocen: $a' = \frac{1}{2}$, $b' = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $c'' = 0$. Se tiene: $a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1$, de donde: $c' = \pm\frac{1}{2}$ (para los cálculos siguientes, se toma el signo +); $c'^2 + c''^2 + c'''^2 = 1$, de donde: $c''' = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ (para los cálculos siguientes, se toma el signo +); $b'c' + b''c'' + b'''c''' = 0$, de donde: $b''' = -\frac{\sqrt{6}}{6}$; $a'''^2 + b'''^2 + c'''^2 = 1$, de donde: $a''' = -\frac{\sqrt{3}}{6}$ (el signo + no es válido, pues en este caso: $a'a''' + b'b''' + c'c''' \neq 0$); $a'^2 + a''^2 + a'''^2 = 1$, de donde: $a'' = \mp\frac{\sqrt{6}}{3}$; $a'b' + a''b'' + a'''b''' = 0$, de donde: $b'' = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. Con estos resultados se completa el cuadro siguiente, en el que se han escrito con tipos mayores las letras a', b', c'', correspondientes a los datos iniciales conocidos:

	x	y	z
x'	$a'=\frac{1}{2}$	$b'=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$c'=\frac{1}{2}$
y'	$a''=\mp\frac{\sqrt{6}}{3}$	$b''=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$	$c''=0$
z'	$a'''=-\frac{\sqrt{3}}{6}$	$b'''=-\frac{\sqrt{6}}{6}$	$c'''=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Los datos pedidos, son: $x' = -1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 3\cdot\frac{1}{2} = 1+\sqrt{2}$; $y' = -1\cdot\frac{\mp\sqrt{6}}{3} + 2\cdot\frac{\pm\sqrt{3}}{3} + 3\cdot 0 = \pm\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{3}$; $z' = -1\cdot\frac{-\sqrt{3}}{6} + 2\cdot\frac{-\sqrt{6}}{6} + 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3}$. Luego las nuevas coordenadas del punto, son: $\left(1+\sqrt{2}, \pm\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{3}, \frac{5\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3}\right)$.

F 2- Se consideran unos ejes oblicuos $OXYZ$, tales que los ángulos que forman entre sí, son todos iguales a 60º. Se considera una recta que forma con OX y OY ángulos de 45º. Hallar el ángulo que forma con OZ.

Solución: Siendo $\lambda = \widehat{XY}$, $\mu = \widehat{YZ}$, $\nu = \widehat{ZX}$, y siendo α, β, γ los ángulos que la dirección dada forma con los ejes, se tiene: $\begin{vmatrix} 1 & \cos\lambda & \cos\nu & \cos\alpha \\ \cos\lambda & 1 & \cos\mu & \cos\beta \\ \cos\nu & \cos\beta & 1 & \cos\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$, es decir: $\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & x \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & x & 1 \end{vmatrix} = 0$, siendo $x = \cos\gamma$. Operando, se obtiene: $\frac{-3}{4}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x = 0$, cuyas raíces son $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Luego, para

$\cos\gamma = 0$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$; y para $\cos\gamma = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\gamma = 19^{\circ}28'16''$.

F 3- Se considera un triángulo *ABC*, cuyos vértices tienen las siguientes coordenadas: $A(1,2,-3)$, $B(2,0,-5)$, $C(-4,3,1)$. 1º) Hallar las coordenadas de estos vértices cuando se toman unos nuevos ejes que cumplen las siguientes condiciones: el nuevo origen es el punto $O'(-4,3,2)$, y los ejes son paralelos a los antiguos, pero sus sentidos positivos son los opuestos a los antiguos. 2º) Hallar las coordenadas del baricentro *G*.

Solución: 1º) $A : [-(1+4),(3-2),-(-3-2)] = (-5,1,5)$; $B : [-(2+4),(0+3),-(-5-2)] = (-6,3,7)$; $C : [(-4+4),(3-3),-(1-2)] = (0,0,1)$. 2º) En los ejes iniciales, $G\left(\frac{-1}{3},\frac{5}{3},\frac{-7}{3}\right)$; en los ejes nuevos, $G\left(\frac{-11}{3},\frac{4}{3},\frac{13}{3}\right)$.

F 4- Dada la curva $x^2+y^2-z^2 = 4$, $2x-3y+z = 1$, hallar: 1º) Las ecuaciones de sus proyecciones sobre los planos coordenados. 2º) Las trazas de la curva con dichos planos.

Solución: 1º) La proyección sobre el plano $z = 0$, es: $(1-2x+3y)^2 = x^2+y^2-4$, es decir: $3x^2+8y^2-12xy-4x+6y+5 = 0$, $z = 0$. Las restantes proyecciones sobre los planos $y = 0$, $x = 0$, son: $13x^2-8z^2+4xz-4x-2z-35 = 0$, $y = 0$; $13y^2-3z^2-6yz+6y-2z-15 = 0$, $x = 0$. 2º) Para el plano $z = 0$, se resuelve el sistema: $2x-3y = 1$, $x^2+y^2 = 4$, siendo las trazas $\left(\frac{2\pm3\sqrt{51}}{13},\frac{-3\pm2\sqrt{51}}{13},0\right)$. Las restantes trazas son: $\left(\frac{2\pm\sqrt{-11}}{3},0,\frac{-1\mp2\sqrt{-11}}{3}\right)$, $\left(0,\frac{-3\pm\sqrt{-31}}{8},\frac{-1\pm3\sqrt{-31}}{8}\right)$. Estas dos últimas trazas no son reales.

F 5- Dada la curva de ecuaciones $xyz-x^2-y^2+z^2 = 0$, $x^2+x+y+z = 0$, hallar: 1º) La ecuación del cilindro proyectante sobre el plano *XY*. 2º) Las ecuaciones de la proyección sobre *XZ*. 3º) Las trazas con el plano *YZ*.

Solución: 1º) La ecuación del cilindro proyectante, es: $xy(-x^2-x-y)-x^2-y^2+(-x^2-x-y)^2 = 0$, es decir: $x^3-x^2y+2x^2+xy-y^2+2y = 0$. 2º) $y = 0$, $x^3+x^2z+2x^2+3xz+z^2+2x+2z = 0$. 3º) $x = 0$, $y+z = 0$; $x = 0$, $y-z = 0$ (ecuaciones de las dos bisectrices de $\widehat{YOZ}$, situadas en el plano $x = 0$).

F 6- Demostrar que si una recta forma ángulos iguales con tres semirrectas de un plano, es perpendicular a dicho plano.

Solución: Sea el plano $z = 0$. Sean los cosenos directores de las tres rectas de dicho plano $(a_1,b_1,0)$, $(a_2,b_2,0)$, $(a_3,b_3,0)$. Y sean (α,β,γ) los de la recta cuya perpendicularidad se estudia. Se tiene el sistema: $a_1\alpha+b_1\beta+0\cdot\gamma = a_2\alpha+b_2\beta+0\cdot\gamma = a_3\alpha+b_3\beta+0\cdot\gamma = \cos 90^{\circ} = 0$, de donde: $\alpha = \beta = 0$. Como $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1$, $\gamma = 1$. Como los cosenos directores de $z = 0$, son $(0,0,1)$, se tiene que, siendo V el ángulo de la recta con el plano $z = 0$, $\sin V = 0\cdot0+0\cdot0+1\cdot1 = 1$, por lo que $V = 90^{\circ}$.

F 7- Dada la curva $x^2+y^2+z^2 = 4$, $x-y+2z = 3$, hallar: 1º) La ecuación del cilindro proyectante sobre el plano *XY*. 2º) Las ecuaciones de la proyección sobre *XZ*. 3º) Las trazas con *YZ*.

Solución: 1º) Ecuación del cilindro proyectante sobre el plano *XY*: $5x^2+5y^2-2xy-6x+6y-7 = 0$. 2º) Ecuaciones de la proyección sobre *XZ*: $y = 0$, $2x^2+5z^2+4xz-6x-12z+5 = 0$. 3º) Trazas con *YZ*: $\left(0,\frac{-3\pm2\sqrt{11}}{5},\frac{6\pm\sqrt{11}}{5}\right)$.

F 8- Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(1,3,2)$ y es perpendicular a la recta $2x+3y-z = 1$, $x-y+3z = 2$.

Solución: Los parámetros directores de la recta vienen dados por: $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8$, $-\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -7$, $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5$. La ecuación del plano pedido, es: $8(x-1)-7(y-3)-5(z-2) = 0$, es decir: $8x-7y-5z+23 = 0$.

F 9- Dados los puntos $M_1(2,1,-1)$, $M_2(-3,0,2)$, hallar la ecuación del plano que pasa por dichos puntos y es perpendicular al plano proyectante de M_1M_2 sobre *XOY*.

Solución: $M_1M_2 \equiv \frac{x-2}{-5} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{3}$, cuyo plano proyectante es: $3x-15y+4=0$. Los planos que pasan por M_1M_2, son: $3x+5z-1+\lambda(3y+z-2)=0$, es decir: $3x+3\lambda y+(5+\lambda)z-1-2\lambda=0$. Por ser perpendiculares ambos planos, se tiene: $3 \cdot 3 - 15 \cdot 3\lambda = 0$, de donde: $\lambda = \frac{1}{5}$. El plano pedido es: $15x+3y+26z-7=0$.

F 10- Dado el punto $(1,2,-1)$, la recta $2x+3y-z=1$, $x-2y=0$, y el plano $x+y+4z=0$, hallar la ecuación de la recta que pasa por dicho punto, es paralela al plano dado, y se apoya en la recta dada. Poner la ecuación de la recta en forma continua.

Solución: Coordenadas de un punto genérico de la recta dada: $(2\lambda,\lambda,7\lambda-1)$. Ecuaciones de la recta que pasa por el punto dado y por el punto genérico: $\frac{x-1}{2\lambda-1} = \frac{y-2}{\lambda-2} = \frac{z+1}{7\lambda}$. La condición de paralelismo con el plano dado, es: $2\lambda-1+\lambda-2+4 \cdot 7\lambda = 31\lambda-3=0$, de donde: $\lambda = \frac{3}{31}$. Luego la ecuación de la recta en forma continua, es: $\frac{x-1}{-25} = \frac{y-2}{-59} = \frac{z+1}{21}$.

F 11- Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(1,-1,3)$ y es perpendicular al plano $2x+5y+z-1=0$, determinando las coordenadas del punto de corte con el plano.

Solución: Ecuación de la recta: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-3}{1}$. Punto de intersección: $\left(\frac{16}{15},\frac{-5}{6},\frac{91}{30}\right)$.

F 12- Un triángulo de lados a,b,c, tiene los puntos medios de los lados, situados sobre los ejes X,Y,Z respectivamente. Calcular las coordenadas de los vértices.

Solución: Las coordenadas de los puntos medios son: $(\alpha,0,0)$, $(0,\beta,0)$, $(0,0,\gamma)$, y las de los vértices son: $(\alpha,\beta,-\gamma)$, $(-\alpha,\beta,\gamma)$, $(\alpha,-\beta,\gamma)$. Como $(\alpha+\alpha)^2+(\beta-\beta)^2+(-\gamma-\gamma)^2 = 4\alpha^2+4\gamma^2=b^2$, y sus análogas, $4\alpha^2+4\beta^2=c^2$, $4\beta^2+4\gamma^2=a^2$, se tiene: $\alpha = \pm\sqrt{\frac{-a^2+b^2+c^2}{8}}$, $\beta = \pm\sqrt{\frac{a^2-b^2+c^2}{8}}$, $\gamma = \pm\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{8}}$. Hay ocho soluciones según los siguientes conjuntos de signos: $(+++)$, $(---)$, $(++-)$, $(--+)$, $(-++)$, $(+--)$, $(+-+)$, $(-+-)$.

F 13- Hallar las ecuaciones de una recta que se apoya en la recta $x=3y=-5z$, y en la recta $x+2y-4z=1$, $2x-y-3z=0$, y es paralela a la recta $3x-5y+7z=0$, $x+y-2z=0$.

Solución: La ecuación del haz de planos que pasan por la segunda recta dada, es: $x+2y-4z-1+\lambda(2x-y-3z)=(1+2\lambda)x+(2-\lambda)y-(4+3\lambda)z-1=0$. Los parámetros directores de la tercera recta dada, son: $(3,13,8)$. La condición de paralelismo entre el plano y dicha tercera recta, es: $3(1+2\lambda)+13(2-\lambda)-8(4+3\lambda)=0$, de donde se obtiene: $\lambda = \frac{-3}{31}$. Luego la ecuación del plano es: $25x+65y-115z-31=0$, cuya intersección con la primera recta dada, es: $\left(\frac{93}{209},\frac{31}{209},\frac{-93}{1045}\right)$. La ecuación continua de la recta pedida es: $\frac{x-\frac{93}{209}}{3} = \frac{y-\frac{31}{209}}{13} = \frac{z+\frac{93}{1045}}{8}$.

F 14- Se conocen las coordenadas (x_g,y_g,z_g) del centro G de un triángulo equilátero, y las de uno de sus vértices $A(\alpha,\beta,\gamma)$. Hallar las de los otros dos vértices.

Solución: Las coordenadas del punto medio A' del lado opuesto al vértice A son conocidas, $\left(\frac{3x_g-\alpha}{2},\frac{3y_g-\beta}{2},\frac{3z_g-\gamma}{2}\right)$, así como la distancia R de los vértices B y C a A' que es igual a $\frac{AA'}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{(x_g-\alpha)^2+(y_g-\beta)^2+(z_g-\gamma)^2}$. Por tanto, B y C son puntos diametralmente opuestos en la circunferencia intersección de la esfera de centro A' y radio R, con el plano que pasando por A' es perpendicular a AA', por lo que hay infinitas soluciones. Tomando A' como origen de coordenadas, y AA' como eje de las X, las coordenadas de A son $(a,0,0)$, $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$, la esfera es: $y^2+z^2=\frac{a^2}{3}$, y el plano perpendicular a AA' es $x=0$. Las coordenadas del punto B son: $\left(0,\frac{a\sin\theta}{\sqrt{3}},\frac{a\cos\theta}{\sqrt{3}}\right)$ y las del punto C son: $\left(0,\frac{-a\sin\theta}{\sqrt{3}},\frac{-a\cos\theta}{\sqrt{3}}\right)$.

F 15- Se da la recta $2x + 3y - 4z = 1$, $x - 2y - 3z = 0$, y la recta $x + y - 7z = 0$, $4x + 3y = 3$. Hallar las ecuaciones de la perpendicular común y el valor de la mínima distancia.

Solución: Las ecuaciones en forma continua, de las dos rectas dadas, son: $\frac{x+7}{17} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+3}{7}$, $\frac{x+18}{-21} = \frac{y-25}{28} = z-1$. Las ecuaciones de la recta pedida corresponden al conjunto de las ecuaciones de los dos planos siguientes:

$$\begin{vmatrix} x+7 & y-1 & z+3 \\ 17 & -2 & 7 \\ \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 28 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 7 & 17 \\ 1 & -21 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 17 & -2 \\ -21 & 28 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+7 & y-1 & z+3 \\ 7 & -2 & 7 \\ -198 & -164 & 434 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x+18 & y-25 & z-1 \\ -21 & 28 & 1 \\ -198 & -164 & 434 \end{vmatrix} = 0.$$ La mínima distancia es: $$\frac{\begin{vmatrix} -18+7 & 25-1 & 1+3 \\ 17 & -2 & 7 \\ -21 & 28 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{198^2 + 164^2 + 434^2}} = 0,0436.$$

F 16- Hallar la ecuación del plano simétrico del plano $x + 2y - 3z = 1$, respecto de la recta $x = y = z$.

Solución: Siendo el plano dado paralelo a la recta dada, la ecuación del plano simétrico es de la forma $x + 2y - 3z - m = 0$. Este plano pasará por el punto simétrico de un punto cualquiera del plano dado. Sea este punto $(1,0,0)$, y su simétrico respecto al punto $(0,0,0)$ de la recta dada, es $(-1,0,0)$. Luego: $-1 - m = 0$, $m = -1$. El plano simétrico es: $x + 2y - 3z + 1 = 0$.

F 17- Hallar las ecuaciones de la recta simétrica de la recta $x + 3y - z = 3$, $2x - y + z = 2$, respecto a la recta $x = y = z$.

Solución: Las dos rectas dadas se cortan en $(1,1,1)$. Un punto de la primera recta es $(3,-2,-6)$. El plano perpendicular a la segunda recta, pasando por este punto, es: $x - 3 + y + 2 + z + 6 = 0$, o bien: $x + y + z + 5 = 0$, que corta a la segunda recta en $\left(\frac{-5}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{-5}{3}\right)$. El punto simétrico de $(3,-2,-6)$ respecto a este punto, es: $\left(\frac{-19}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{8}{3}\right)$. La recta pedida es: $\frac{x-1}{\frac{-19}{3}-1} = \frac{y-1}{\frac{-4}{3}-1} = \frac{z-1}{\frac{8}{3}-1}$, o bien: $\frac{x-1}{-22} = \frac{y-1}{-7} = \frac{z-1}{5}$.

F 18- Una recta forma con las cuatro diagonales de un cubo los ángulos $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Hallar el valor de la expresión $E = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta$.

Solución: Sean los vértices del cubo: $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,0,1)$, $(1,1,1)$, $(0,1,1)$. Los parámetros directores de las cuatro diagonales, son: $(1,-1,1)$, $(1,1,1)$, $(1,1,-1)$, $(-1,1,1)$, y los de la recta dada, (a,b,c). Luego el valor de la expresión del enunciado viene dado por: $E = \frac{(a-b+c)^2 + (a+b+c)^2 + (a+b-c)^2 + (-a+b+c)^2}{3(a^2+b^2+c^2)} = \frac{4(a^2+b^2+c^2)}{3(a^2+b^2+c^2)} = \frac{4}{3}$.

F 19- Se da la recta $2x - 3y + 1 = 0$, $x - y + z = 0$, y la recta $x = y = z$. Se pide: 1º) Ecuaciones de la perpendicular común y valor de la mínima distancia. 2º) Ecuación del plano paralelo a las dos rectas y que dista del origen la mínima distancia entre las dos rectas. 3º) Ángulos de este plano con los planos coordenados.

Solución: 1º) Las rectas dadas en forma continua, son: $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$, $x = y = z$.

La perpendicular común viene dada por las ecuaciones: $$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 3 & 2 & -1 \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 2 & -1 \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0$$, es decir: $x + 3y + 9z - 4 = 0$, $5x + 2y - 7z = 0$. La mínima distancia es: $$\frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^2}} = \frac{1}{\sqrt{26}}$$. 2º) La ecuación del plano pedido es: $$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} z + D = 3x - 4y + z + D = 0.$$ Como $\frac{D}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{26}}$, se tiene que $D = \pm 1$. Luego son dos planos cuyas ecuaciones son: $3x - 4y + z \pm 1 = 0$. 3º) Siendo α el ángulo con $x = 0$, se tiene: $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{26}}$, luego $\alpha = 53º57'36''4$. Siendo β el ángulo con $y = 0$, se tiene: $\cos\beta = \frac{-4}{\sqrt{26}}$, luego: $\beta = 141º40'16''3$. Siendo γ el ángulo con $z = 0$, se tiene: $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{26}}$, luego: $\gamma = 78º41'24''2$.

F 20- Dados los planos variables $x(1 - t^2) + y(1 + t^2) + 2tz = \alpha + \beta t + \gamma t^2$, demostrar: 1º) Que los planos pasan por un punto fijo, hallando sus coordenadas. 2º) Que forman un ángulo fijo con una recta fija, hallando recta y ángulo.

Solución: 1º) Ordenando la ecuación en t, se tiene: $(-x + y - \gamma)t^2 + (2z - \beta)t + x + y - \alpha = 0$. Luego se tiene el sistema: $-x + y - \gamma = 0$, $2z - \beta = 0$, $x + y - \alpha = 0$, cuyas soluciones dan las coordenadas del punto fijo: $\left(\frac{\alpha - \gamma}{2}, \frac{\alpha + \gamma}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$. 2º) Siendo θ el ángulo que forma el plano dado con una recta cuyos parámetros directores son (a, b, c), se tiene que: $\sin\theta = \frac{(1 - t^2)a + (1 + t^2)b + 2tc}{\sqrt{\left[(1 - t^2)^2 + (1 + t^2)^2 + 4t^2\right](a^2 + b^2 + c^2)}} = \frac{(-a + b)t^2 + 2ct + a + b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,\sqrt{2}\,(1 + t^2)}$. Para que sea independiente de t, ha de cumplirse que $a = c = 0$, con lo que $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, es decir: $\theta = 45º$, siendo la recta fija: $\frac{x}{0} = \frac{y}{b} = \frac{z}{0}$, es decir: $x = 0$, $z = 0$.

F 21- Dado el punto $A(2, 1, -3)$ y el plano $2x + 3y - 4z = 3$, se pide: 1º) Ecuación de la perpendicular trazada por el punto al plano. 2º) Siendo M el punto de intersección de la perpendicular con el plano, hallar las coordenadas de un punto B de la perpendicular, tal que la distancia $MB = 4$, estando situado B a distinto lado de A respecto al plano.

Solución: 1º) $\frac{x - 2}{2} = \frac{y - 1}{3} = \frac{z + 3}{-4}$. 2º) $M\left(\frac{26}{29}, \frac{-19}{29}, \frac{-23}{29}\right)$. Siendo un punto genérico de la perpendicular $(2\lambda + 2, 3\lambda + 1, -4\lambda - 3)$, se tiene que el cuadrado de la distancia entre este punto genérico y el punto M, es: $\left(2\lambda + 2 - \frac{26}{29}\right)^2 + \left(3\lambda + 1 + \frac{19}{29}\right)^2 + \left(-4\lambda - 3 + \frac{23}{29}\right)^2 = 4^2$. De donde operando, se tiene: $\lambda = \frac{4}{29}\left(-4 \pm \sqrt{29}\right)$. Como al sustituir las coordenadas de A en la ecuación del plano, el valor obtenido es positivo, para que B esté situado a distinto lado que A, al sustituir sus coordenadas en la ecuación del plano, ha de obtenerse un valor negativo, por lo que el valor válido de λ es: $\frac{-4}{29}\left(4 + \sqrt{29}\right)$. Por tanto las coordenadas de B son: $\left(\frac{26 - 8\sqrt{29}}{29}, \frac{-19 - 12\sqrt{29}}{29}, \frac{-23 + 16\sqrt{29}}{29}\right)$.

F 22- 1º) Hallar la ecuación del plano que pasa por la intersección de los planos $x + z - 1 = 0$, $y - z + 2 = 0$, y es perpendicular al plano $z = 0$. 2º) Hallar la ecuación del plano que pasa por dicha intersección y por el origen. 3º) Hallar el ángulo de los dos planos calculados en los puntos anteriores. 4º) Hallar su plano bisector.

Solución: 1º) La ecuación de los planos que pasan por la intersección de los planos dados, es: $x+z-1+\lambda(y-z+2) = x+\lambda y+(1-\lambda)z-1+2\lambda = 0$. La condición de perpendicularidad da: $1-\lambda = 0$. Luego el plano pedido es: $x+y+1 = 0$. 2º) Como debe cumplirse que: $-1+2\lambda = 0$, la ecuación del plano es: $2x+y+z = 0$. 3º) Siendo θ el ángulo formado por los dos planos calculados, se tiene que: $\cos\theta = \dfrac{2+1}{\sqrt{(1^2+1^2)(2^2+1^2+1^2)}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, luego $\theta = 30º$. 4º) $\dfrac{x+y+1}{\sqrt{2}} = \pm\dfrac{2x+y+z}{\sqrt{6}}$. Por tanto, la ecuación de los planos bisectores es: $\left(2\pm\sqrt{3}\right)x+\left(1\pm\sqrt{3}\right)y+z\pm\sqrt{3} = 0$.

F 23- Se da la recta $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{-1}$, y la recta $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-1}{-1}$. Hallar la paralela media y sus proyecciones sobre *XZ* y *XY*.

Solución: La paralela media es: $\dfrac{x-\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{y-\frac{1}{2}}{3} = \dfrac{z}{-1}$. La proyección sobre *XZ* es: $y = 0$, $\dfrac{x-\frac{1}{2}}{2} = -z$, o bien: $y = 0$, $2x+4z-1 = 0$. La proyección sobre *XY* es: $z = 0$, $\dfrac{x-\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{y-\frac{1}{2}}{3}$, o bien: $z = 0$, $6x-4y-1 = 0$.

F 24- Hallar la condición para que las tres ecuaciones $x = cy+bz$, $y = az+cx$, $z = bx+ay$, representen una recta, y hallar la ecuación continua de esta recta.

Solución: La condición es $\begin{vmatrix} 1 & -c & -b \\ c & -1 & a \\ b & a & -1 \end{vmatrix} = 0$, es decir: $a^2+b^2+c^2+2abc-1 = 0$. La ecuación de la recta en forma continua es: $\dfrac{x}{a+bc} = \dfrac{y}{b+ac} = \dfrac{z}{1-c^2}$, o bien, cualquiera de sus ecuaciones análogas: $\dfrac{x}{1-a^2} = \dfrac{y}{ab+c} = \dfrac{z}{ac+b}$, $\dfrac{x}{ab+c} = \dfrac{y}{1-b^2} = \dfrac{z}{a+bc}$.

F 25- Se considera un cuadrado *ABCD*, tal que $A(0,2,0)$, $B(3,0,0)$. El plano *ABCD* forma un ángulo de 60º con el plano *XY*, estando inclinado hacia delante. Hallar las coordenadas de los vértices del cuadrado y las ecuaciones de sus lados.

Solución: Las ecuaciones de *AB* son: $z = 0$, $2x+3y-6 = 0$. La ecuación de los planos que pasan por *AB*, es: $2x+3y+\lambda z-6 = 0$. Como $\cos\theta = \dfrac{1}{2} = \dfrac{\lambda}{\sqrt{13+\lambda^2}}$, $\lambda = \pm\sqrt{\dfrac{13}{3}}$, Al estar inclinado hacia delante, la ecuación es: $2x+3y-\sqrt{\dfrac{13}{3}}z-6 = 0$. Distancia $AB = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$. Proyectando el plano sobre $z = 0$, el lado perpendicular a *AB*, mide: $AB\cdot\cos\theta = AB\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$. En este plano, la ecuación de *AB* es: $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2} = 1$, y la de su perpendicular por *B* es: $y = \dfrac{3}{2}(x-3)$. Siendo C' la proyección de *C*, se tiene que: $C'B^2 = \left(\dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 = \dfrac{13}{4} = (\lambda-3)^2+\dfrac{9}{4}(\lambda-3)^2$, de donde: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$. Este segundo valor no es válido, pues da una ordenada negativa. Por tanto: $C'\left(4,\dfrac{3}{2}\right)$. Introduciendo estos valores en la ecuación del plano *ABCD*, se tienen las coordenadas de $C\left(4,\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{39}}{2}\right)$. Procediendo análogamente con D', proyección de *D*, las coordenadas de *D* son $\left(1,\dfrac{7}{2},\dfrac{\sqrt{39}}{2}\right)$. Los lados del cuadrado, son: $AB \equiv z = 0$, $2x+3y-6 = 0$; $AD \equiv x = \dfrac{2(y-2)}{3} = \dfrac{2z}{\sqrt{39}}$; $BC \equiv x-3 = \dfrac{2y}{3} = \dfrac{2z}{\sqrt{39}}$; $CD \equiv \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{2y-7}{-4}$, $z = \dfrac{\sqrt{39}}{2}$.

F 26- El triángulo cuyos vértices son $A(0,0,0)$, $B(3,5,0)$, $C(6,0,0)$, es la base de un triedro trirrectángulo. Hallar las coordenadas de su vértice y las ecuaciones de sus caras.

Solución: Sea el vértice $D(a,b,c)$, las ecuaciones de las aristas son: $AD \equiv \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$; $BD \equiv \dfrac{x-3}{a-3} = \dfrac{y-5}{b-5} = \dfrac{z}{c}$; $CD \equiv \dfrac{x-6}{a-6} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$. Como son perpendiculares dos a dos, se tiene el

sistema: $a(a-3)+b(b-5)+c^2=0$, $a(a-6)+b^2+c^2=0$, $(a-3)(a-6)+(b-5)b+c^2=0$. Sus raíces dan las coordenadas $D\left(3,\frac{9}{5},\frac{\pm 12}{5}\right)$. Tomando el valor positivo para z, la ecuación de la cara DAB es: $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 3 & \frac{9}{5} & \frac{12}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5x-3y-4z=0$. Análogamente, las ecuaciones de las caras DAC y DBC son, respectivamente: $-4y+3z=0$, $5x+3y+4z-30=0$

F 27- Hallar las distancias desde el origen a los planos bisectores de los planos $ax+by+cz=d$ y $a'x+b'y+c'z=d'$, siendo $a^2+b^2+c^2=1$ y $a'^2+b'^2+c'^2=1$.

Solución: De acuerdo con las condiciones dadas, las ecuaciones de los dos planos bisectores son: $(a\pm a')x+(b\pm b')y+(c\pm c')z-(d\pm d')=0$. Por tanto, las distancias desde el origen a los dos planos bisectores, son: $\delta = \dfrac{-d\mp d'}{\pm\sqrt{(a\pm a')^2+(b\pm b')^2+(c\pm c')^2}} = \dfrac{-d\pm d'}{\pm\sqrt{2(1\pm aa'\pm bb'\pm cc')}}$.

F 28- La superficie $x^2+y^2-3z^2=0$, representa un cono de vértice el origen de coordenadas. El plano $x+y-z=0$, lo corta según dos rectas, cuyas ecuaciones se piden.

Solución: La ecuación de una de las rectas es: $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=z$, es decir: $x=az$, $y=bz$. Introduciendo estos valores en las ecuaciones del cono y del plano, y resolviendo el sistema, se tiene: $a=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, $b=\dfrac{1\mp\sqrt{5}}{2}$. Las ecuaciones de las dos rectas son: $\dfrac{x}{1\pm\sqrt{5}}=\dfrac{y}{1\mp\sqrt{5}}=\dfrac{z}{2}$.

F 29- Se dan los puntos $A(0,0,2)$, $B(7,10,8)$, $C(9,0,2)$, $D(8,6,7)$, $M\left(\frac{7}{2},-6,-3\right)$. Hallar la ecuación de la recta que se apoya en las rectas AB y CD, y es paralela a OM.

Solución: Ecuación de $AB\equiv\frac{x}{7}=\frac{y}{10}=\frac{z-2}{6}$, o bien: $10x-7y=0$, $6x-7z+14=0$. Planos que pasan por AB: $6x-7z+14+\lambda(10x-7y)=(10\lambda+6)x-7\lambda y-7z+14=0$. Condición de paralelismo con OM: $\frac{7}{2}(10\lambda+6)+42\lambda+21=0$, de donde: $\lambda=\frac{-42}{77}$. Por tanto la ecuación del plano es: $6x+42y-77z+154=0$. Procediendo análogamente con el plano que pasa por CD y es paralelo a OM, se tiene: $24x+29y-30z-156=0$. Las ecuaciones de la recta son el conjunto de las ecuaciones de los dos planos: $6x+42y-77z+154=0$, $24x+29y-30z-156=0$.

F 30- Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(6,6,0)$, es paralela al plano XZ, forma un ángulo de 60º con el plano XY, y corta al plano YZ en su parte positiva.

Solución: La recta corta al plano $x=0$ en $(0,6,\lambda)$, siendo $\tan 60^\circ=\sqrt{3}=\frac{\lambda}{6}$. Las ecuaciones de la recta son: $\dfrac{x}{6}=\dfrac{y-6}{6-6}=\dfrac{z-6\sqrt{3}}{-6\sqrt{3}}$, o bien: $y=6$, $3x+\sqrt{3}z-18=0$.

F 31- Hallar el ángulo que forman entre sí las rectas intersección del plano $11x-13y+2z=0$ con la superficie $4x^2+8y^2+z^2-6yz+5xz-12xy=0$.

Solución: La superficie está formada por los planos: $x-2y+z=0$, $4x-4y+z=0$. Los parámetros directores de la recta: $11x-13y+2z=0$, $x-2y+z=0$, son $(1,1,1)$. Y los de la recta: $11x-13y+2z=0$, $4x-4y+z=0$, son $(5,3,-8)$. Por tanto, $\cos\theta=\dfrac{5+3-8}{\sqrt{3}\sqrt{25+9+64}}=0$. Luego el ángulo pedido es $\theta=90^\circ$.

F 32- Dada la recta $2x-3y+5=0$, $x+3y-z=3$, hallar las ecuaciones de su simétrica respecto al eje ZZ', así como las ecuaciones de la perpendicular común a la recta dada y a su simétrica.

Solución: Dos puntos de la recta dada son, por ejemplo, $(-1,1,-1)$ y $(2,3,8)$. Sus simétricos respecto al eje ZZ', son $(1.-1,-1)$ y $(-2,-3,8)$. La recta que pasa por estos dos puntos es: $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+1}{9}$,

que es la recta simétrica pedida. Las ecuaciones de la recta dada, en forma continua, son: $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{9}$. Las ecuaciones de la perpendicular común son:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z+1 \\ 3 & 2 & 9 \\ \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 9 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z+1 \\ -3 & -2 & 9 \\ 36 & -45 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$ Es decir:

$27x+18y+13z+4 = 0$, $27x+18y-13z-4 = 0$. Simplificando, se tiene: $z = \frac{-4}{13}$, $3x+2y = 0$.

F 33- Encontrar la posición relativa de la recta $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} = 0$, $\frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}+\frac{z}{c'} = 0$, y el plano $\frac{x}{a\left(\frac{b'}{b}+\frac{c'}{c}-\frac{a'}{a}\right)^2}+\frac{y}{b\left(\frac{c'}{c}+\frac{a'}{a}-\frac{b'}{b}\right)^2}+\frac{z}{c\left(\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}-\frac{c'}{c}\right)^2} = 0$.

Solución: La recta y el plano dados pasan por $(0,0,0)$. Las coordenadas de un punto de la recta son $\left(\begin{vmatrix} \frac{-1}{c} & \frac{1}{b} \\ \frac{-1}{c'} & \frac{1}{b'} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-1}{c} \\ \frac{1}{a'} & \frac{-1}{c'} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{a'} & \frac{1}{b'} \end{vmatrix}\right)$. Haciendo: $\alpha = \frac{a'}{a}, \beta = \frac{b'}{b}, \gamma = \frac{c'}{c}$, las coordenadas son: $\left(\frac{\beta-\gamma}{bc\beta\gamma}, \frac{\gamma-\alpha}{ac\alpha\gamma}, \frac{\alpha-\beta}{ab\alpha\beta}\right)$. Introduciendo estas coordenadas en la ecuación del plano, se tiene:

$$\frac{\beta-\gamma}{abc\beta\gamma\left(\frac{b'}{b}+\frac{c'}{c}-\frac{a'}{a}\right)^2}+\frac{\gamma-\alpha}{bac\alpha\gamma\left(\frac{c'}{c}+\frac{a'}{a}-\frac{b'}{b}\right)^2}+\frac{\alpha-\beta}{cab\alpha\beta\left(\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}-\frac{c'}{c}\right)^2} = 0.$$

Operando, se tiene: $\frac{1}{abc}\left[\frac{\beta-\gamma}{\beta\gamma(\beta+\gamma-\alpha)^2}+\frac{\gamma-\alpha}{\alpha\gamma(\gamma+\alpha-\beta)^2}+\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta(\alpha+\beta-\gamma)^2}\right] = 0$.

Reduciendo las tres fracciones a un denominador común, la suma de los tres numeradores resultantes, es la siguiente expresión: $S \equiv \alpha(\beta-\gamma)(\gamma+\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta-\gamma)^2+\beta(\gamma-\alpha)(\beta+\gamma-\alpha)^2(\alpha+\beta-\gamma)^2+$ $+\gamma(\alpha-\beta)(\beta+\gamma-\alpha)^2(\gamma+\alpha-\beta)^2$. Operando, se obtiene que el valor de esta expresión es nulo. Por tanto, la recta está contenida en el plano.

F 34- P y Q son funciones lineales de x,y,z. La función $f(P,Q) = 0$ es un polinomio homogéneo en P y Q de grado m. Demostrar que la función $f(P,Q) = 0$, representa un haz de m planos que pasan por una misma recta.

Solución: $f = P^m+AP^{m-1}Q+\ldots+MPQ^{m-1}+NQ^m = P^m\left[1+A\frac{Q}{P}+\ldots+M\left(\frac{Q}{P}\right)^{m-1}+N\left(\frac{Q}{P}\right)^m\right] = 0$.
Haciendo $\frac{Q}{P} = \alpha$, se tiene que: $1+A\alpha+\ldots+M\alpha^{m-1}+N\alpha^m = 0$. Esta ecuación tiene m soluciones: $\alpha_1,\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_m$. Luego, $Q-\alpha_iP = 0$, que es la ecuación de un plano que pasa por la recta: $P = 0$, $Q = 0$. Por tanto, hay m planos, uno por cada valor de α_i, que pasan todos por la recta: $P = 0$, $Q = 0$.

F 35- Dada la ecuación $(m^2+1)x+m(m^2-1)y+m^2(m^2-2m+1)z+m^4-m^2+1 = 0$, se reemplaza m por cada una de las raíces de la ecuación $m^4-2m^3+4m^2+pm-1 = 0$. Hallar el valor de p para que los cuatro planos correspondientes a las cuatro raíces de m, sean concurrentes, y hallar las coordenadas del punto de intersección.

Solución: Sea el punto $P(a,b,c)$. Se tiene: $(m^2+1)a+m(m^2-1)b+m^2(m^2-2m+1)c+m^4-$ $-m^2+1 = 0$. Es decir: $(c+1)m^4+(b-2c)m^3+(a+c-1)m^2-bm+a+1 = 0$. Se plantean las igualdades: $\frac{c+1}{1} = \frac{b-2c}{-2} = \frac{a+c-1}{4} = \frac{-b}{p} = \frac{a+1}{1} = \lambda$. Resuelto el sistema de ecuaciones, las soluciones son: $a = \frac{-1}{4}$, $b = -2$, $c = \frac{-7}{4}$, $p = \frac{-8}{3}$, $\lambda = \frac{-3}{4}$. Luego: $p = \frac{-8}{3}$, y el punto es $\left(\frac{-1}{4}, -2, \frac{-7}{4}\right)$.

F 36- Deducir la fórmula que da el volumen del tetraedro en función de las coordenadas de sus vértices.

Solución: El volumen del tetraedro es: $V = \frac{1}{3}S \cdot h$, siendo S el área de una de las caras, y h la distancia del cuarto vértice al plano de dicha cara. La ecuación del plano de la cara, es: $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Luego: $h = \dfrac{\begin{vmatrix} x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & y_1 & 1 \\ z_2 & y_2 & 1 \\ z_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2}} = \dfrac{\begin{vmatrix} x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}}{2S}$.

De donde se obtiene que: $V = \frac{1}{3}S\dfrac{\begin{vmatrix} x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}}{2S} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$.

F 37- Dada la curva $x^2 + y^2 - 4x = 0$, $x + y - z = 0$, hallar su simétrica respecto al punto $(2,4,5)$.

Solución: Siendo (x,y,z) un punto de la curva dada, y (α,β,γ) un punto de su curva simétrica respecto al punto dado, se tiene que: $x = 2 \cdot 2 - \alpha$, $y = 2 \cdot 4 - \beta$, $z = 2 \cdot 5 - \gamma$. Por tanto, sustituyendo estos valores de x,y,z, en las ecuaciones de la curva dada, se tiene: $(4-\alpha)^2 + (8-\beta)^2 - 4(4-\alpha) = 0$, $4 - \alpha + 8 - \beta - 10 + \gamma = 0$. Operando y sustituyendo (α,β,γ) por (x,y,z), se tienen las ecuaciones pedidas: $x^2 + y^2 - 4x - 16y + 64 = 0$, $x + y - z - 2 = 0$.

F 38- Dada la curva $x^2 + 3y^2 - z^2 - 2x = 0$, $x + y - 3z = 1$, hallar su simétrica respecto al punto $(2,3,5)$.

Solución: Siendo (x,y,z) un punto de la curva dada, y (α,β,γ) un punto de su curva simétrica respecto al punto dado, se tiene que: $x = 2 \cdot 2 - \alpha$, $y = 2 \cdot 3 - \beta$, $z = 2 \cdot 5 - \gamma$. Por tanto, sustituyendo estos valores de x,y,z en las ecuaciones de la curva dada, se tiene: $(4-\alpha)^2 + 3(6-\beta)^2 - (10-\gamma)^2 - 2(4-\alpha) = 0$, $4 - \alpha + 6 - \beta - 30 + 3\gamma - 1 = 0$. Operando y sustituyendo (α,β,γ) por (x,y,z), se tienen las ecuaciones pedidas: $x^2 + 3y^2 - z^2 - 6x - 36y + 20z + 16 = 0$, $x + y - 3z + 21 = 0$.

F 39- Hallar la ecuación de la superficie simétrica de $x^2 + 3y^2 - z^2 = 1$, respecto al plano $y = x + z$.

Solución: Desde un punto (α,β,γ) de la superficie se traza la perpendicular al plano dado, cuyas ecuaciones son: $\frac{x-\alpha}{1} = \frac{y-\beta}{-1} = \frac{z-\gamma}{1}$. Las coordenadas del punto de intersección de la perpendicular con este plano, son: $\left(\frac{2\alpha+\beta-\gamma}{3}, \frac{\alpha+2\beta+\gamma}{3}, \frac{-\alpha+\beta+2\gamma}{3}\right)$. Las coordenadas del punto simétrico de (α,β,γ) respecto al citado punto de intersección, son: $\alpha' = \frac{\alpha+2\beta-2\gamma}{3}$, $\beta' = \frac{2\alpha+\beta+2\gamma}{3}$, $\gamma' = \frac{-2\alpha+2\beta+\gamma}{3}$. De estas tres igualdades se obtienen los valores de α,β,γ (es decir, x,y,z) en función de α',β',γ', que son: $x = \frac{\alpha'+2\beta'-2\gamma'}{3}$, $y = \frac{2\alpha'+\beta'+2\gamma'}{3}$, $z = \frac{-2\alpha'+2\beta'+\gamma'}{3}$. Estos valores se introducen en la ecuación de la superficie dada, y se sustituye (α',β',γ') por (x,y,z), obteniéndose la ecuación pedida: $3x^2 + y^2 + 5z^2 + 8xy + 8xz - 3 = 0$.

F 40- Hallar la ecuación de la recta que se apoya en la recta $x = y = -2z$, y en la recta $x = 1$, $y + 2z = 1$, y es paralela al plano $x + y - z = 3$.

Solución: Plano general paralelo al dado: $x+y-z+m=0$. Su intersección con la primera recta es: $\left(\frac{-2m}{5},\frac{-2m}{5},\frac{m}{5}\right)$. Y con la segunda recta: $\left(1,\frac{-1-2m}{3},\frac{2+m}{3}\right)$. La ecuación de la recta que une ambos puntos es: $\frac{5x+2m}{5+2m}=\frac{15y+6m}{-5-4m}=\frac{15z-3m}{10+2m}$. Hay infinitas soluciones.

F 41- Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos de longitud 5, uno de cuyos extremos describe la recta $y=0$, $z=0$ y el otro extremo, la recta $z=3$, $y=2x$.

Solución: Punto genérico de la primera recta: $(a,0,0)$. Punto genérico de la segunda recta: $(b,2b,3)$. Cuadrado de la distancia entre los dos puntos: $(a-b)^2+4b^2+9=25$. Punto medio: $\left(\frac{a+b}{2},b,\frac{3}{2}\right)$, es decir: $b=y$, $a=2x-y$. Introduciendo los valores de b y a, en la expresión anterior, se tiene: $(2x-2y)^2+4y^2-16=0$. El lugar pedido es: $x^2+2y^2-2xy-4=0$, $z=\frac{3}{2}$.

F 42- El origen de coordenadas es el centro de un octaedro regular, del que se conocen las coordenadas de cuatro vértices: $(4,0,0)$, $(-4,0,0)$, $(0,4,0)$, $(0.-4,0)$. 1º) Hallar las coordenadas de los otros dos vértices. 2º) Se halla el simétrico del origen respecto a cada cara, y se une cada punto simétrico así hallado, con los vértices de la cara correspondiente. Hallar el volumen del cuerpo formado.

Solución: 1º) Las coordenadas de los otros dos vértices son $(0,0,4)$ y $(0,0,-4)$. 2º) Se forman ocho pirámides exteriores al octaedro, cuyas bases son cada una de las caras del octaedro, y su altura la distancia del centro a la cara. Luego la suma de los volúmenes de las ocho pirámides es igual al volumen del octaedro. Por tanto, el volumen del cuerpo formado es el doble del volumen del octaedro, es decir: $2\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}a^3=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(4\sqrt{2}\right)^3=\frac{512}{3}$.

F 43- Hallar el valor que hay que dar al parámetro m, para que la curva: $x=\frac{t+1}{t-1}$, $y=t^2+1$, $z=\frac{t+2}{t-1}$, se corte con la curva: $x=1+6u$, $y=15-3m+u(90-17m)$, $z=mu$.

Solución: Ha de verificarse que: $\frac{t+1}{t-1}=1+6u$, $t^2+1=15-3m+u(90-17m)$, $\frac{t+2}{t-1}=mu$. Resolviendo el sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas, la resultante es: $m(m^2+6m-72)=m(m-6)(m+12)=0$. Se obtienen tres valores de m: 0, 6, -12.

F 44- Hallar la ecuación de la superficie, lugar geométrico de las perpendiculares comunes al eje de las Z y a una recta variable que encuentra al eje de las X a una distancia del origen fija e igual a m, y que está siempre situada en el plano $y=z$.

Solución: Eje de las Z: $\frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}$. Recta variable: $\frac{x-m}{1}=\frac{y}{\lambda}=\frac{z}{\lambda}$. Perpendicular común:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ \begin{vmatrix}\lambda & \lambda\\ 0 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}\lambda & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 0\end{vmatrix}\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x-m & y & z\\ 1 & \lambda & \lambda\\ \lambda & -1 & 0\end{vmatrix}=0.$$ Operando, se obtienen las ecuaciones:

$x+\lambda y=0$, $-z+\lambda^2 y-\lambda^2 z+\lambda(x-m)=0$. Eliminando λ, se tiene el lugar pedido: $z(x^2+y^2)-mxy=0$.

F 45- Dentro del triedro trirrectángulo $OXYZ$, formado por el sentido positivo de los tres ejes coordenados, se trazan por el origen cuatro rectas. Una de ellas, R, forma ángulos iguales con los tres ejes coordenados. Las otras tres, R', R'' y R''', forman entre sí ángulos iguales, e iguales a 60º. Además son iguales los tres ángulos que forman R' con OX, R'' con OY y R''' con OZ. También son iguales los seis ángulos que forman R' con OY y OZ, R'' con OX y OZ, y R''' con OX y OY. Hallar las ecuaciones de R', R'' y R''', y el valor del ángulo que forman R', R'' y R''' con R.

Solución: Las ecuaciones de las distintas rectas son: $OX\equiv\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{0}$; $OY\equiv\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}$; $OZ\equiv\frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}$; $R\equiv x=y=z$; $R'\equiv\frac{x}{\cos\alpha}=\frac{y}{\cos\beta}=\frac{z}{\cos\beta}$; $R''\equiv\frac{x}{\cos\beta}=\frac{y}{\cos\alpha}=\frac{z}{\cos\beta}$; $R'''\equiv\frac{x}{\cos\beta}=\frac{y}{\cos\beta}=\frac{z}{\cos\alpha}$. Se tiene: $\cos^2\alpha+2\cos^2\beta=1$, de donde: $\cos\alpha=\sqrt{1-2\cos^2\beta}$; $2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\cos 60º=\frac{1}{2}$. Resolviendo el sistema, se tienen cuatro valores de $\cos\beta$: $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\pm\frac{\sqrt{2}}{6}$, siendo los correspondientes valores de $\cos\alpha$: ± 0, $\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Hay dos conjuntos de ecuaciones para las tres rectas. Primer conjunto: $R' \equiv \frac{x}{0} = y = z$, $R'' \equiv x = \frac{y}{0} = z$, $R''' \equiv x = y = \frac{z}{0}$. Segundo conjunto: $R' \equiv \frac{x}{4} = y = z$, $R'' \equiv x = \frac{y}{4} = z$, $R''' \equiv x = y = \frac{z}{4}$. El coseno del ángulo que forman R', R'', R''' con R, es: $\cos V = = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{3\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Luego, $V = 35^\circ 15' 51'' 8$.

F 46- Con el enunciado del problema anterior F 45, hallar el radio y las coordenadas del centro de las esferas tangentes a R', R'' y R''', y al plano que corta a los ejes en puntos que distan del origen 2 unidades. Hallar el área de la superficie de estas esferas, visible desde el origen.

Solución: Siendo el centro de las esferas $(\lambda,\lambda,\lambda)$ y el plano $x+y+z-2 = 0$, se tiene: $\frac{3\lambda-2}{\pm\sqrt{3}} = \lambda$, de donde: $\lambda = \frac{3\pm\sqrt{3}}{3}$. Por tanto, los centros de las esferas son: $\left(\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}, \frac{3\pm\sqrt{3}}{3}, \frac{3\pm\sqrt{3}}{3}\right)$, siendo sus respectivos radios: $\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}$. Por tanto, el área visible (casquete esférico) de la esfera de menor radio, es: $S = 2\pi rh = 2\pi r^2(1-\sin\alpha) = 2\pi\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^2(1-\sin 35^\circ 15' 51'' 8) = 0,4744$. Y el área de la de mayor radio: $S' = 2\pi r'h' = 2\pi r'^2(1-\sin\alpha) = 2\pi\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)^2(1-\sin 35^\circ 15' 51'' 8) = 6,6072$.

F 47- Se dan n ladrillos iguales, de aristas a, b y c. El primer ladrillo se apoya en el plano horizontal por su cara ab. En el plano vertical, sección recta ac de dicho ladrillo, que pasa por su centro de gravedad (cdg), se toman unos ejes OX y OY (horizontal y vertical, respectivamente), de forma que las coordenadas del cdg, sean $\left(\frac{a}{2}, \frac{c}{2}\right)$. Se coloca el segundo ladrillo sobre el primero, el tercero sobre el segundo, y así sucesivamente, de forma que los planos verticales de las secciones rectas ac, que pasan por los respectivos cdg, coinciden con el plano XOY, y que los lados de estas secciones de longitud a, sean horizontales. Si (x_p, y_p) es el cdg del p-ésimo ladrillo, evidentemente: $y_p = \frac{c}{2} + (p-1)c$, $x_p \leq x_{p-1} + \frac{a}{2}$. Se supone que $x_p \geq x_{p-1}$, para $p > 1$. Hallar, manteniéndose el equilibrio del conjunto, el máximo de x_n, abscisa del cdg del n-simo ladrillo. Se resolverá en primer lugar, el problema para $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$.

Solución: Para $n = 1$, la abscisa x_1 del centro de gravedad (cdg) del ladrillo es $\frac{a}{2}$. Para $n = 2$, la posición extrema de la abscisa del cdg del ladrillo superior (ladrillo 2) es $x_2 = a$, siendo la abscisa del cdg del conjunto de los dos ladrillos, $x_{1,2} = \frac{a+\frac{a}{2}}{2} = \frac{3a}{4}$. Para $n = 3$, la posición extrema del cdg de los dos ladrillos superiores (ladrillos 2 y 3) es $x_{2,3} = a$. La abscisa $x_{1,2,3}$ del cdg del conjunto de los tres ladrillos viene dada por $2a + \frac{a}{2} = 3x_{1,2,3}$, de donde $x_{1,2,3} = \frac{5a}{6}$. Siendo $\delta_{2,3}$ el desplazamiento del cdg del conjunto de los ladrillos 2 y 3, al colocarlos sobre el ladrillo 1, se tiene: $2\left(\frac{3a}{4} + \delta_{2,3}\right) + \frac{a}{2} = 3 \cdot \frac{5a}{6}$, de donde $\delta_{2,3} = \frac{a}{4}$. Luego $x_3 = a + \frac{a}{4} = \frac{5a}{4}$. Para $n = 4$, con los mismos razonamientos se obtiene: $3a + \frac{a}{2} = 4x_{1,2,3,4}$, de donde $x_{1,2,3,4} = \frac{7a}{8}$. Luego: $3\left(\frac{5a}{6} + \delta_{2,3,4}\right) + \frac{a}{2} = 4 \cdot \frac{7a}{8}$, $\delta_{2,3,4} = \frac{a}{6}$, $x_1 = \frac{5a}{4} + \frac{a}{6} = \frac{17a}{12}$. Por tanto, la abscisa x_p, correspondiente al cdg del p-simo ladrillo, es: $\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a}{4} + \frac{a}{6} + \ldots + \frac{a}{2(p-1)} = \frac{a}{2}(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1}) = \frac{a}{2}(1 + H_{p-1})$, siendo H_{p-1} la suma de los $(p-1)$ primeros términos de la serie armónica. Como $H_n \simeq \ln n + C + \varepsilon$, siendo $\varepsilon < \frac{1}{n}$, y $C = 0,5772156649$ (constante de Euler), $x_p = \frac{a}{2}(1 + \ln p + C)$, con error menor que $\frac{1}{p}$.

F 48- Sea una esfera de centro O y radio R. Sea P un punto exterior, y A el punto de la esfera más cercano a P, siendo $PA = x$. Se construye el cono de vértice P, circunscrito a la esfera (el círculo base del cono es el que corresponde a la circunferencia de tangencia). 1º) Expresar en función de R y de x, el volumen V del cono. 2º) Hallar la superficie total S del cono. 3º) Determinar x de forma que sea $\frac{V}{S} = R \cdot y$, donde y es una constante positiva dada. 4º) Definir la curva representativa de la variación de y en función de x.

Solución: 1º) $V = \dfrac{\pi R^2 x^2 (x+2R)^2}{3(x+R)^3}$. 2º) $S = \dfrac{\pi R x (x+2R)^2}{(x+R)^2}$. 3º) $\dfrac{V}{S} = \dfrac{Rx}{3(x+R)} = Ry$, de donde: $x = \dfrac{3Ry}{1-3y}$. 4º) $y = \dfrac{x}{3(x+R)}$. Se trata de una hipérbola de centro $\left(-R, \dfrac{1}{3}\right)$, una de cuyas asíntotas es paralela al eje OY, siendo la pendiente de la otra asíntota: $\dfrac{1}{3(1+R)}$.

F 49- Dado un cuadrilátero fijo $ABCD$ como base de una pirámide de vértice V, para cada posición de V existe un sistema de planos que cortan a la pirámide según paralelogramos. Determinar el lugar geométrico de V, para que las secciones sean rectangulares.

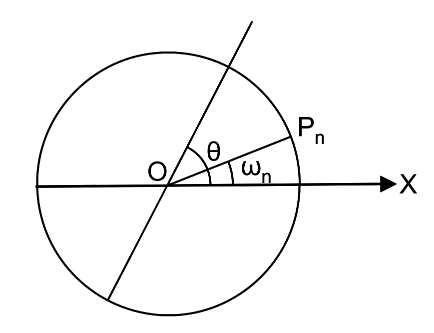
Solución: Sean M y N las intersecciones de los pares de lados opuestos: AB con CD, y AC con BD. Todo plano paralelo al plano VMN, corta a la pirámide según un paralelogramo cuyos lados son paralelos, dos a VM y los otros dos a VN. Para que el paralelogramo sea rectángulo, VM y VN han de ser perpendiculares, luego V ha de estar en la esfera de diámetro MN. Siendo la ecuación del plano $ABCD$, $z = 0$, y siendo $M(a,0,0)$, $N(-a,0,0)$, el lugar geométrico de V es la esfera: $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$.

F 50- Se dan dos rectas r y r' perpendiculares que se cruzan, y se considera el punto medio O de su recta de mínima distancia. Un punto A describe la recta r, y un punto B describe la recta r', de forma tal que el ángulo $\widehat{AOB}$ se mantiene constante. Demostrar que el área del triángulo AOB permanece invariable.

Solución: Se toma como plano $z = 0$ el paralelo a ambas rectas trazado por el punto medio O de su perpendicular común. Sea el eje OX el paralelo a r, y el eje OY el paralelo a r', trazados ambos por O. Siendo h la mitad de la mínima distancia, la ecuación de r es: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z-h}{0}$, y la de r' es: $\dfrac{x}{0} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+h}{0}$. Siendo $O(0,0,0)$, $A(\lambda,0,h)$, $B(0,\mu,-h)$, $OA \equiv \dfrac{x}{\lambda} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z}{h}$, $OB \equiv \dfrac{x}{0} = \dfrac{y}{\mu} = \dfrac{z}{-h}$, se tiene que: $\cos\widehat{AOB} = \dfrac{h}{\sqrt{\lambda^2+h^2}} \cdot \dfrac{-h}{\sqrt{\mu^2+h^2}} = k$, constante. Como $S_{AOB} = \dfrac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin\widehat{AOB}$, se tiene que: $S_{AOB} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\lambda^2+h^2}\sqrt{\mu^2+h^2}\sqrt{1-k^2} = \dfrac{h^2}{2k}\sqrt{1-k^2}$, que es constante.

F 51- En los puntos P_n de una circunferencia de radio R y centro el origen, cuyas coordenadas son $\rho = R$, $\omega_n = 3\pi\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2^n}\right)$, donde $n = 1,2,3,\ldots,n$, se trazan planos tangentes a dicha circunferencia, perpendiculares a su plano. En estos planos se dibujan circunferencias C_n con centro P_n y radio $r_n = R\sqrt{\sin\frac{\pi}{2^n}}$. Se proyectan todos estos círculos C_n sobre un plano que pasa por el origen. 1º) Hallar este plano con la condición de que la suma algebraica de todas estas áreas sea máxima. 2º) Hallar el valor del área máxima. 3º) Hallar su límite cuando $n \to \infty$. Se supone que las C_n están recorridas por puntos en sentido contrario al de las agujas de un reloj, si se miran desde el origen. Las áreas proyectadas se consideran positivas o negativas según el sentido del recorrido.

Solución:

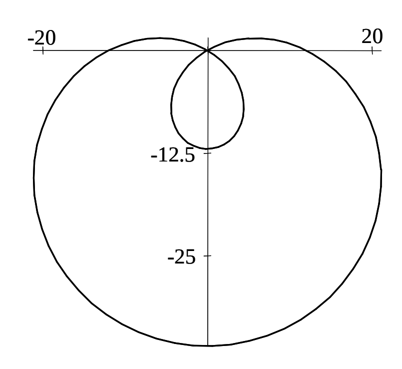


1º) El área de la elipse resultante de la proyección de una de las n circunferencias dibujadas, es: $S_n = \pi R^2 \sin\dfrac{\pi}{2^n}\sin(\theta-\omega_n)$. Ahora bien, como $\omega_n = 3\pi\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$, el valor de esta área es: $S_n = \pi R^2 \sin\dfrac{\pi}{2^n}\sin\left(\theta - \dfrac{3\pi}{2^n}\right) = \dfrac{\pi R^2}{2}\left[\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2^{n-2}}\right) - \cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{2^{n-1}}\right)\right]$. Dando valores y sumando: $S = \dfrac{\pi R^2}{2}\left[\cos\theta - \cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2^{n-1}}\right)\right] = \pi R^2 \sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2n}\right)\sin\dfrac{\pi}{2^n}$. Esta área alcanzará su valor máximo para $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2n}\right) = 1$, es decir cuando: $\theta = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2^n}$. Luego el plano buscado es el que pasa por el origen y forma con OX el ángulo $\theta = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2^n}$. 2º) Para este valor de θ, el área máxima viene dada por:

$S_{máx} = \pi R^2 \sin\frac{\pi}{2n}$. 3º) El límite pedido es $\lim_{n\to\infty} \pi R^2 \sin\frac{\pi}{2n} = 0$, siendo $\theta = \frac{\pi}{2}$.

F 52- La recta $y = 0$, $x = b + az$, gira alrededor del eje OZ con movimiento de rotación uniforme, y al mismo tiempo sufre una traslación paralela al eje Z de manera que cada uno de sus puntos describe una hélice. El paso de estas hélices es 2π. 1º) Hallar la ecuación de la superficie engendrada. 2º) Dibujar la intersección de dicha superficie con $z = 0$, para $a = 24$, $b = 12$.

Solución: 1º) $x = R\cos\theta$, $y = R\sin\theta$, $z = \lambda + \theta$. Como: $R = b + a\sin\lambda$, eliminando θ y λ, se tiene: $z = \arcsin\frac{\sqrt{x^2+y^2} - b}{a} + \arctan\frac{y}{x}$. 2º) La intersección con $z = 0$, es la curva: $\rho = b - a\sin\theta$. En el dibujo siguiente se representa esta curva para $b = 12$, $a = 24$.

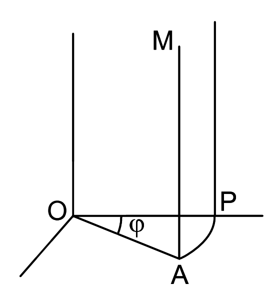


F 53- Hallar el lugar geométrico del punto medio de una recta de longitud constante, cuyos extremos se apoyan en dos rectas perpendiculares que no se cortan.

Solución: Sean las ecuaciones de las dos rectas: $y = 0$, $z = a$; $x = 0$, $z = -a$. Sus puntos genéricos son: $(\lambda, 0, a)$ y $(0, \mu, -a)$, siendo: $\lambda^2 + \mu^2 + 4a^2 = d^2$. Siendo (x, y, z) las coordenadas del punto medio, se tiene: $\lambda = 2x$, $\mu = 2y$, $z = 0$. Sustituyendo, se tiene la ecuación pedida: $z = 0$, $x^2 + y^2 = \frac{d^2}{4} - a^2$.

F 54- Dado un cilindro recto de radio R, cuya base es un círculo de centro O, siendo P el punto en que el eje OX corta a dicho círculo, hallar el lugar geométrico de los puntos M del cilindro tales que la distancia MA, siendo A la proyección de M sobre el plano $z = 0$, es proporcional al arco PA del círculo de la base.

Solución: Sea $\varphi = \widehat{POA}$, y sean (x, y, z) las coordenadas de M. Estas coordenadas, en función de φ y de R, son (ver la figura): $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$, $z = k \cdot arco\ AP = k\varphi R$.



Las ecuaciones del lugar pedido, son: $y = x\tan\frac{z}{kR}$, $x^2 + y^2 = R^2$ (hélice circular).

F 55- Se da un plano fijo Π y un punto A fuera del plano. Una recta variable OP que pasa por el origen O, corta al plano Π en un punto P. Por P se traza un plano perpendicular a OP que encuentra en M a la recta paralela a OP trazada por A. Hallar el lugar geométrico de M.

Solución: Sea $\Pi \equiv z = c$, y sea $A(\alpha, \beta, \gamma)$. Las ecuaciones de OP son: $x = \lambda z$, $y = \mu z$, siendo $P(\lambda c, \mu c, c)$. El plano por P perpendicular a OP, es: $\lambda(x - \lambda c) + \mu(y - \mu c) + z - c = 0$. La recta AM es: $\frac{x-\alpha}{\lambda} = \frac{y-\beta}{\mu} = z - \gamma$, de donde: $\lambda = \frac{x-\alpha}{z-\gamma}$, $\mu = \frac{y-\beta}{z-\gamma}$. La ecuación del lugar geométrico del punto M es: $\frac{x-\alpha}{z-\gamma}\left(x - \frac{x-\alpha}{z-\gamma}c\right) + \frac{y-\beta}{z-\gamma}\left(y - \frac{y-\beta}{z-\gamma}c\right) + z - c = 0$

F 56- Hallar el lugar geométrico de los centros de las esferas que pasan por un punto y son tangentes a un plano.

Solución: Siendo el centro de las esferas (α,β,γ), siendo $z=0$ el plano dado, y siendo el eje OZ su perpendicular por el punto dado $(0,0,c)$, la ecuación de la esfera es: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-c)^2=R^2$. Para que pase por el punto dado, ha de verificarse: $\alpha^2+\beta^2+(c-\gamma)^2=R^2$. Por ser tangente a $z=0$, $\gamma=R$. Luego el lugar pedido es, sustituyendo (α,β,γ) por (x,y,z): $x^2+y^2-2cz+c^2=0$.

F 57 Hallar el lugar geométrico de los puntos que equidistan de otro dado y de un plano dado.

Solución: Sea el punto dado el origen $(0,0,0)$, y sea $z=c$ el plano dado. Luego se tiene que: $x^2+y^2+z^2=(z-c)^2$, es decir $x^2+y^2+2cz-c^2=0$. Si se hubiera tomado como origen el punto medio de la perpendicular trazada desde el punto dado al plano, la ecuación del plano sería: $z=\frac{-c}{2}$, y las coordenadas del punto: $\left(0,0,\frac{c}{2}\right)$, siendo la ecuación del lugar: $x^2+y^2-2cz=0$.

F 58- Hallar la ecuación de la superficie engendrada por una circunferencia que se mueve paralelamente al plano XY, describiendo su centro el eje OZ, y apoyándose en la recta $x=z$, $y=0$.

Solución: El centro de la circunferencia es $(0,0,\lambda)$, y sus ecuaciones: $x^2+y^2+(z-\lambda)^2=R^2$, $z=\lambda$. La condición de corte con la recta dada (directriz) es: $x=z$, $y=0$. Luego: $z^2+(z-\lambda)^2=R^2$, $z=\lambda$, es decir: $R^2=z^2$. La ecuación pedida es: $x^2+y^2-z^2=0$.

Sección G - CUÁDRICAS

NATURALEZA. ELEMENTOS

G 1- Hallar la naturaleza de la cuádrica $x^2+5y^2+3z^2-2xy+2xz-6yz+4y-2z-3=0$.

Solución: $\frac{1}{2}f'_x=x-y+z=0$, $\frac{1}{2}f'_y=-x+5y-3z+2=0$, $\frac{1}{2}f'_z=x-3y+3z-1=0$. Luego: $A=\begin{vmatrix}1&-1&1&0\\-1&5&-3&2\\1&-3&3&-1\\0&2&-1&-3\end{vmatrix}=4$. El adjunto $A_{44}=\begin{vmatrix}1&-1&1\\-1&5&-3\\1&-3&3\end{vmatrix}=4\neq 0$, por lo que la cuádrica tiene centro único propio. El cono asintótico es: $x^2+5y^2+3z^2-2xy+2xz-6yz=0$. Cortado por $z=1$, se obtiene la cónica: $x^2+5y^2+3-2xy+2x-6y=0$, que es una elipse, pues $\begin{vmatrix}1&-1\\-1&5\end{vmatrix}=4>0$. Como $A<0$, la cuádrica es un elipsoide real.

G 2- Hallar la naturaleza de la cuádrica $x^2-3y^2-2xy-2xz+6yz+2x-2y-2z=0$.

Solución: $A_{44}=\begin{vmatrix}1&-1&-1\\-1&-3&3\\-1&3&0\end{vmatrix}=0$, $A_{34}=\begin{vmatrix}1&-1&1\\-1&-3&-1\\-1&3&-1\end{vmatrix}=0$, luego la cuádrica tiene una recta propia de centros. Cortando el cono asintótico por $x=0$, se tiene: $-3y^2+6yz=0$, luego los puntos son reales. Cortando la cuádrica por $x=0$, se obtiene la cónica: $-3y^2+6yz-2y-2z=0$, que como el adjunto $A_{33}=\begin{vmatrix}-3&3\\3&0\end{vmatrix}=-9<0$, es una hipérbola real. La cuádrica es un cilindro hiperbólico.

G 3- Hallar la naturaleza de la cuádrica $x^2+y^2-2xz+2yz-2x+3y-1=0$.

Solución: $A_{44}=\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=-2\neq 0$, luego la cuádrica tiene centro único propio. Cortando el cono asintótico por el plano $z=1$, se obtiene la cónica: $x^2+y^2-2x+2y=0$, que es una hipérbola real. Como el determinante $A=\begin{vmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&1&\frac{3}{2}\\-1&1&0&0\\-1&\frac{3}{2}&0&-1\end{vmatrix}>0$, la cuádrica es un hiperboloide de una hoja.

G 4- Hallar la naturaleza de la cuádrica $x^2+4y^2+16z^2-2x-12y-8z+11=0$.

Solución: $A=\begin{vmatrix}1&0&0&-1\\0&4&0&-6\\0&0&16&-4\\-1&-6&-4&11\end{vmatrix}=0$. Como $A_{44}=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&16\end{vmatrix}=64\neq 0$, la cuádrica tiene centro único propio. El cono asintótico cortado por $z=1$, da: $x^2+4y^2=0$, que es una elipse imaginaria. Como $A=0$, la cuádrica es un cono imaginario.

G 5- Hallar la naturaleza de la cuádrica $x^2+y^2+5z^2-2xy-2xz+2yz-4x-12z+7=0$.

Solución: $A=\begin{vmatrix}1&-1&-1&-2\\-1&1&1&0\\-1&1&5&-6\\-2&0&-6&7\end{vmatrix}=-8$. El adjunto $A_{44}=\begin{vmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\-1&1&5\end{vmatrix}=0$. Como el menor $A_{41}=\begin{vmatrix}-2&-1&-1\\0&1&1\\-6&1&5\end{vmatrix}=-8\neq 0$, la cuádrica tiene centro único impropio. Cortando el cono asintótico por $z=0$, se tiene: $x^2+y^2-2xy=(x-y)^2=0$, una recta real doble. Cortándolo por $z=1$, se tiene la cónica: $x^2+y^2-2xy-2x+2y+5=0$, es decir: $(-x+y+1)^2=-4$, dos rectas imaginarias. Como $A<0$, los puntos son elípticos. La cuádrica es un paraboloide elíptico.

G 6- Hallar la naturaleza de la cuádrica $3y^2+z^2-6xy+2xz-4yz+4x+4y-4=0$.

Solución: $A_{44}=\begin{vmatrix}0&-3&1\\-3&3&-2\\1&-2&1\end{vmatrix}=0$. El menor $A_{41}=\begin{vmatrix}-3&1&2\\3&-2&2\\-2&1&0\end{vmatrix}=0$. Luego la cuádrica tiene recta propia de centros. Cortada la cuádrica por $z=0$, se obtiene la cónica: $3y^2-6xy+4x+4y-4=0$, de la que $A_{33}=\begin{vmatrix}0&-3\\-3&3\end{vmatrix}=-9<0$, y $A=\begin{vmatrix}0&-3&2\\-3&3&2\\2&2&-4\end{vmatrix}=0$, por lo que la cónica es una hipérbola degenerada en dos rectas reales. La cuádrica es el conjunto de dos planos reales.

G 7- Discutir la naturaleza de la cuádrica $x^2+(2m^2+1)(y^2+z^2)-2(xy+xz+yz)=2m^3-3m+1$, en función del parámetro m.

Solución: 1º) $A=\begin{vmatrix}1&-1&-1&0\\-1&2m^2+1&-1&0\\-1&-1&2m^2+1&0\\0&0&0&-2m^3+3m-1\end{vmatrix}=-(2m^3-3m+1)4(m^4-1)$. El adjunto $A_{44}=\begin{vmatrix}1&-1&-1\\-1&2m^2+1&-1\\-1&-1&2m^2+1\end{vmatrix}=4(m^4-1)$. Para $m\neq\pm1$, $A_{44}\neq 0$, la cuádrica tiene centro único propio. Para $m=\pm1$, $A_{44}=0$, y el menor $A_{14}=0$, por lo que la cuádrica tiene una recta propia de centros. 2º) Para $m\neq\pm1$, cortando el cono asintótico por el plano $z=1$, se tiene la cónica: $x^2+(2m^2+1)(y^2+1)-2(xy+x+y)=0$, de la que su determinante $A=4(m^4-1)$, el adjunto $A_{33}=\begin{vmatrix}1&-1\\-1&2m^2+1\end{vmatrix}=2m^2\geq 0$, y el coeficiente $a_{22}=2m^2+1$. Por tanto, se tiene el siguiente cuadro de la naturaleza de las cuádricas:

m	<-1	$-1<m<1$	>1
A (*cónica*)	>0	<0	>0
$-a_{22}\cdot A$ (*cónica*)	<0	>0	<0
Naturaleza	*Elipsoide*	*Hiperboloide*	*Elipsoide*

Considerando las raíces $\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$ del determinante A de la cuádrica, el cuadro se completa como sigue:

m	$< \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1-\sqrt{3}}{2} < m < -1$	$-1 < m < \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{3}}{2} < m < 1$	$m > 1$
A	> 0	> 0	> 0	< 0	< 0
Naturaleza	*Elipsoide I*	*Elipsoide R*	*Hiperboloide 1H*	*Hiperboloide 2H*	*Elipsoide R*

3º) Casos particulares: Para $m = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$, centro único propio, la cónica intersección es imaginaria y el determinante A de la cuádrica es nulo, luego es un cono imaginario. Para $m = -1$, recta propia de centros, la cónica intersección es una elipse real, luego es un cilindro elíptico real. Para $m = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$, centro único propio, la cónica intersección es real y el determinante A de la cuádrica es nulo, luego es un cono real. Para $m = 1$, recta propia de centros, la cónica intersección está formada por dos rectas imaginarias, luego son dos planos imaginarios con recta real de intersección. 4º) Añadiendo estos casos particulares, el cuadro definitivo es el siguiente:

m	$< \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1-\sqrt{3}}{2} < m < -1$	-1	$-1 < m < \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$
Naturaleza	*Elipsoide I*	*Cono I*	*Elipsoide R*	*CER*	*Hiperboloide 1H*	*Cono R*

m	$\frac{-1+\sqrt{3}}{2} < m < 1$	1	> 1
Naturaleza	*Hiperboloide 2H*	*2PI*	*Elipsoide R*

Leyenda: I : *Imaginario*; R : *Real*; *CER* : *Cilindro elíptico real*; $1H$: *Una hoja*; $2H$: *Dos hojas*; $2PI$: *Dos planos imaginarios con recta real de intersección*.

G 8- Dada la cuádrica $xy + xz + yz - 2x - y + 3z + 1 = 0$, hallar: 1º) Su naturaleza. 2º) El plano diametral conjugado con $x = 5z$, $y = 2z$. 3º) El diámetro conjugado con el plano $x - y = 0$. 4º) El centro.

Solución: 1º) $A = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ -1 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix} = 2$; $A_{44} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$. Luego la cuádrica tiene centro único propio. El cono asintótico cortado por $z = 1$, da la cónica: $xy + x + y = 0$, que es una hipérbola real. Como $A > 0$, la cuádrica es un hiperboloide de una hoja. 2º) Un punto de la recta dada es $(5, 2, 1)$. Luego, $5f'_x + 2f'_y + f'_z = 3x + 6y + 7z - 9 = 0$, que es la ecuación del plano diametral conjugado con la recta dada. 3º) $\frac{f'_x}{1} = \frac{f'_y}{-1} = \frac{f'_z}{0}$, es decir: $x + y + 3 = 0$, $z = 3$, que es la ecuación del diámetro conjugado con el plano dado. 4º) La solución del sistema: $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, $f'_z = 0$, da el centro $(-2, -1, 3)$.

G 9- Hallar las secciones circulares de $3x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 2xz - 4 = 0$.

Solución: La ecuación en S de la cuádrica, es: $\begin{vmatrix} 3-S & 0 & 1 \\ 0 & 5-S & 0 \\ 1 & 0 & 3-S \end{vmatrix} = -S^3 + 11S^2 - 38S + 40$, cuyas raíces son: $2, 4, 5$. Considerando la raiz intermedia $S = 4$, se tiene que, siendo $\varphi(x,y,z)$ el cono asintótico, $\varphi(x,y,z) - 4(x^2 + y^2 + z^2) = 3x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 2xz - 4x^2 - 4y^2 - 4z^2 = y^2 - (z - x)^2 = 0$. Las secciones circulares son las producidas por planos paralelos a los planos $y = \pm(z - x)$, es decir, por los planos: $x + y - z + \lambda = 0$, $x - y - z + \mu = 0$.

G 10- Hallar la naturaleza y la ecuación cartesiana de: $\mu x = \lambda^2 + \lambda - 1$, $\mu y = 2\lambda$, $\mu z = 1 + \lambda^2$.

Solución: Eliminando λ y μ, se tiene: $4x^2 + 5y^2 - 4z^2 - 4xy = 0$, es decir: $(2x - y)^2 + 4y^2 - 4z^2 = 0$, que es un cono real.

G 11- Discutir la naturaleza de las cuádricas $(3m-2)x^2+4z^2+6xy-8xz-4yz+2x+2y=0$, en función del parámetro m.

Solución: 1º) $A_{44}=\begin{vmatrix}3m-2 & 3 & -4\\ 3 & 0 & -2\\ -4 & -2 & 4\end{vmatrix}=-12m+20=0$. Para $m\neq\frac{5}{3}$, la cuádrica tiene centro único propio. Para $m=\frac{5}{3}$, $A=\begin{vmatrix}3 & 3 & -4 & 1\\ 3 & 0 & -2 & 1\\ -4 & -2 & 4 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=16$, el menor $A_{43}=\begin{vmatrix}3 & 3 & 1\\ 3 & 0 & 1\\ -4 & -2 & 0\end{vmatrix}=-12\neq 0$. Luego la cuádrica tiene centro único impropio. 2º) En el caso de $m\neq\frac{5}{3}$, cortando el cono asintótico por $z=1$, se tiene la cónica: $(3m-2)x^2+6xy-8x-4y+4=0$, cuyo $A_{33}=\begin{vmatrix}3m-2 & 3\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-9<0$, por lo que es una hipérbola, y por tanto, las cuádricas son hiperboloides. El determinante de los coeficientes es: $A=\begin{vmatrix}3m-2 & 3 & -4 & 1\\ 3 & 0 & -2 & 1\\ -4 & -2 & 4 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=-12m+36$. Para $m<3$, $A>0$, luego los hiperboloides son de una hoja. Para $m=3$, $A=0$, la cuádrica es un cono real. Para $m>3$, $A<0$, los hiperboloides son de dos hojas. 3º) En el caso de $m=\frac{5}{3}$, la cuádrica es: $3x^2+4z^2+6xy-8xz-4yz+2x+2y=0$, que cortada por el plano $z=0$, se obtiene la cónica: $x^2+6xy+2x+2y=0$, que es una hipérbola. Luego la cuádrica es un paraboloide hiperbólico. 4º) En el cuadro siguiente se resume lo expuesto en los puntos anteriores:

m	$<\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}<m<3$	3	>3
Naturaleza	*Hiperboloide* 1*H*	*Paraboloide hiperbólico*	*Hiperboloide* 1*H*	*Cono real*	*Hiperboloide* 2*H*

Leyenda: 1*H* : *Una hoja*; 2*H* : *Dos hojas*.

G 12- Demostrar que dos cuádricas de revolución con un foco común, son bitangentes.

Solución: Sean las dos cuádricas de revolución con un foco común, las siguientes: $\frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2+z^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1$. Sus respectivas ecuaciones tangenciales son: $a^2(u^2+w^2)+b^2v^2-1=0$, $a^2(u^2+w^2)+b^2v^2-1+\lambda(u^2+v^2+w^2)=0$. La ecuación tangencial de las cuádricas bitangentes a la primera, es: $a^2(u^2+w^2)+b^2v^2-1+(mu^2+nv^2+pw^2)=0$. Luego para $m=n=p=\lambda$, se obtiene la ecuación tangencial de la segunda cuádrica, con lo que queda demostrado.

G 13- Dadas las cuádricas de ecuación $x^2+y^2-z^2+2pxz+2qyz-2ax-2by+2cx=0$, hallar el lugar geométrico de sus centros. 1º) Cuando p y q varían, separando el lugar de los centros correspondientes a híperboloides de una o de dos hojas. 2º) Cuando p y q varían y además la superficie es un cono.

Solución: $\frac{1}{2}f'_x=x+pz-a=0$, $\frac{1}{2}f'_y=y+qz-b=0$, $\frac{1}{2}f'_z=y+qz-b=0$. De donde: $p=\frac{a-x}{z}$, $q=\frac{b-y}{z}$. Sustituyendo y operando, se tiene el lugar del punto 1º: $x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0$, que es una esfera. El determinante de los coeficientes de las cuádricas dadas, es: $A=\begin{vmatrix}1 & 0 & p & -a\\ 0 & 1 & q & -b\\ p & q & -1 & c\\ -a & -b & c & 0\end{vmatrix}=$
$=b^2p^2+a^2q^2-2abpq-2acp-2bcq+a^2+b^2-c^2$. Introduciendo los valores anteriores, igualando a cero y operando, se tiene el lugar geométrico de los centros, que es un cono real cuya ecuación es: $b^2x^2+a^2y^2+(a^2+b^2-c^2)z^2-2abxy+2acxz+2bcyz-2c(a^2+b^2)z=0$. Esta ecuación junto con la de la esfera, determinan la curva correspondiente al lugar pedido en el punto 2º. En la parte de la superficie

esférica interior al cono, se tiene que $A < 0$, por lo que el hiperboloide es de dos hojas. En la parte de la superficie esférica exterior al cono, $A > 0$, por lo que el hiperboloide es de una hoja.

G 14- Dada la cuádrica $4x^2+2y^2+z^2-4xy-2yz-4x+2y-3=0$, hallar: 1º) Planos principales y ejes. 2º) Ecuación canónica.

Solución: 1º) El determinante $\begin{vmatrix} 4-S & -2 & 0 \\ -2 & 2-S & -1 \\ 0 & -1 & 1-S \end{vmatrix} = S(S^2-7S+9)=0$, corresponde a la ecuación en S de la cuádrica. Sus raíces, distintas de 0, son: $\frac{7\pm\sqrt{13}}{2}$. Para $S=\frac{7+\sqrt{13}}{2}$, se tiene el sistema: $\frac{1-\sqrt{13}}{2}l-2m=0$, $-m+\frac{-5-\sqrt{13}}{2}n=0$, obteniéndose la dirección $\left(\frac{4}{1-\sqrt{13}},1,\frac{-2}{5+\sqrt{13}}\right)$. Para $S=\frac{7-\sqrt{13}}{2}$, se tiene el sistema: $\frac{1+\sqrt{13}}{2}l-2m=0$, $-m+\frac{-5+\sqrt{13}}{2}n=0$, obteniéndose la dirección $\left(\frac{4}{1+\sqrt{13}},1,\frac{-2}{5-\sqrt{13}}\right)$. Como los planos principales vienen dados por: $lf'_x+mf'_y+nf'_z=0$, y siendo $f'_x=8x-4y-4$, $f'_y=-4x+4y-2z+2$, $f'_z=-2y+2z$, se obtienen los dos planos principales siguientes: $-4\left(4\pm\sqrt{13}\right)x+3\left(3\pm\sqrt{13}\right)y-\left(1\pm\sqrt{13}\right)z+2\left(4\pm\sqrt{13}\right)=0$. El tercer plano principal es indeterminado (la cuádrica es un cilindro elíptico real). La ecuación del eje viene dada por el conjunto de las ecuaciones de los dos planos principales, antes hallados, y que simplificadas proporcionan las siguientes ecuaciones del eje: $2x-y-1=0$, $y-z=0$. 2º) Siendo $S_1x^2+S_2y^2+\frac{1}{2}f'_{t_0}=0$, la ecuación canónica, y como $f_t=-4xt+2yt-3t^2$, $\frac{1}{2}f'_{t_0}=-2x_0+y_0-3t_0=-1-3=-4$, se obtiene la ecuación pedida: $\left(\frac{7+\sqrt{13}}{2}\right)y^2+\left(\frac{7-\sqrt{13}}{2}\right)z^2-4=0$.

G 15- Se dan las rectas: $y=0$, $z-h=0$; $x=0$, $z+h=0$. 1º) Hallar la ecuación general de las cuádricas que pasan por las dos rectas. 2º) Discusión de esas cuádricas según los valores de los parámetros.

Solución: 1º) La ecuación de las cuádricas que pasan por las rectas $P=0$, $Q=0$ y $R=0$, $S=0$, es $P(R+\alpha S)+Q(\beta R+yS)=0$. Aplicando esta expresión a las rectas del enunciado, y ordenando, se tiene que la ecuación de las cuádricas es: $\gamma z^2+xy+\beta xz+\alpha yz-\beta hx+\alpha hy-\gamma h^2=0$. 2º) Se obtiene el sistema $f'_x=y+\beta z-\beta h=0$, $f'_y=x+\alpha z+\alpha h=0$, $f'_z=2\gamma z+\beta x+\alpha y=0$, cuya solución es $(-\alpha h,\beta h,0)$. Luego las cuádricas tienen centro único propio. Cortando el cono asintótico $\varphi(x,y,z)=0$ por $z=1$, se tiene la cónica de ecuación: $xy+\beta x+\alpha y+\gamma=0$, cuyo $A_{33}=\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix}=\frac{-1}{4}<0$. Por tanto, las cuádricas son hiperboloides de una hoja. Como $A=\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{\beta}{2} & \frac{-\beta h}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha h}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \frac{\alpha}{2} & \gamma & 0 \\ \frac{-\beta h}{2} & \frac{\alpha h}{2} & 0 & -\gamma h^2 \end{vmatrix}=\frac{h^2}{16}(4\gamma^2-8\alpha\beta\gamma+5\alpha^2\beta^2)$, para que se anule, $\gamma=\frac{\alpha\beta(2\pm i)}{2}$. Para $\alpha=\gamma=0$, la cuádrica degenera en los planos: $x(y+z-h)=0$. Para $\beta=\gamma=0$, degenera en los planos: $y(x+\alpha z+\alpha h)=0$. Para $\alpha=\beta=\gamma=0$, degenera en los planos: $xy=0$.

G 16- Se da un círculo C situado en el plano $z=0$, tangente en O al eje OY, y un segundo círculo Γ situado en el plano $x=0$, tangente en O al eje OY. Sea a la abscisa del centro de C, y b la cota del centro de Γ, siendo $a>b>0$. Se pide: 1º) Ecuación general de las cuádricas Q que contienen a C y Γ. 2º) Lugar geométrico de los centros de estas cuádricas. 3º) Dado un punto $V(\alpha,\beta,0)$, se considera la curva de contacto del cono de vértice V circunscrito a Q. Demostrar que el lugar de esta curva es una cuádrica Σ. 4º) Hallar el lugar de V para que Σ sea un cono.

Solución: 1º) $C\equiv x^2+y^2-2ax=0$, $z=0$: $\Gamma\equiv y^2+z^2-2bz=0$, $x=0$. La ecuación de la cuádrica que

contiene a ambos círculos, es: $Q \equiv x^2+y^2+z^2+2\lambda xz-2ax-2bz=0$. 2º) $Q'_x=2x+2\lambda z-2a=0$, $Q'_y=2y=0$, $Q'_z=2z+2\lambda x-2b=0$. Eliminando λ se tiene la ecuación pedida: $x^2-z^2-ax+bz=0$, $y=0$. 3º) El plano polar de $V(\alpha,\beta,0)$, es: $(\alpha-a)x+\beta y+(\lambda\alpha-b)z-a\alpha=0$. Eliminando λ entre esta ecuación y la de Q, se tiene: $\Sigma \equiv (2a-\alpha)x^2+\alpha y^2+\alpha z^2-2\beta xy+2bxz-2b\alpha z=0$, que es una cuádrica. 4º) El valor del determinante A, es: $A=\begin{vmatrix} 2a-\alpha & -\beta & b & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 0 \\ b & 0 & \alpha & -b\alpha \\ 0 & 0 & -b\alpha & 0 \end{vmatrix}=b^2\alpha^2(2a\alpha-\alpha^2-\beta^2)=0$. $A_{44}=2a\alpha^2-\alpha^3-2\alpha b^2$. Para $\alpha=0$, se tiene que $A_{44}=0$, solución no válida. Por tanto, el lugar pedido es: $x^2+y^2-2ax=0$.

G 17- Se dan los puntos $A(2a,0,0)$, $B(0,2b,0)$, y $C(0,0,2c)$, siendo a, b y c mayores que 0. Se pide: 1º) Ecuación general de las cuádricas que pasan por A, B, C y por el origen O, siendo cortadas por $z=0$ según círculos, y por $y=0$ y por $x=0$, según hipérbolas equiláteras. 2º) Lugar geométrico de los centros de estas cuádricas.

Solución: 1º) La ecuación de las cuádricas que pasan por A, B, C y O, es: $x^2+\alpha y^2+\beta z^2+2\gamma xy+2\delta xz+$ $+2\varepsilon yz-2ax-2b\alpha y-2c\beta z=0$. La sección por $z=0$, es: $x^2+\alpha y^2+2\gamma xy-2ax-2b\alpha y=0$; para que sea una circunferencia, ha de cumplirse que $\alpha=1$, $\gamma=0$. La sección por $x=0$, es: $y^2+\beta z^2+2\varepsilon yz-$ $-2b\alpha y-2c\beta z=0$; para que sea una hipérbola equilátera, ha de cumplirse que $\beta=-1$. La sección por $y=0$, es: $x^2-z^2+2\delta xz-2ax+2cz=0$, que es una hipérbola equilátera. La ecuación general pedida es: $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2+2\delta xz+2\varepsilon yz-2ax-2by+2cz=0$. 2º) Las derivadas parciales de $f(x,y,z)$, son: $f'_x=2x-2\delta z-2a=0$, $f'_y=2y+2\varepsilon z-2b=0$, $f'_z=-2z+2\delta x+2\varepsilon y+2c=0$. Eliminando δ y ε, se tiene la ecuación pedida: $x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0$.

G 18- Demostrar que las intersecciones por un mismo plano de las cuádricas de las que una está circunscrita a la otra, son cónicas bitangentes.

Solución: Sea el plano sección $z=0$. Siendo la cuádrica inscrita: $f(x,y,z)=0$, la ecuación de la cuádrica circunscrita a ella, es: $f+\lambda P^2=0$. Cortando ambas por $z=0$, se tienen las cónicas: $f(x,y,0)=0$, $z=0$ y $f(x,y,0)+\lambda(mx+ny+p)^2$, $z=0$. Luego en el plano $z=0$, ambas cónicas son bitangentes.

G 19- Dada la cuádrica $4x^2+9y^2+z^2-12xy+2z-5=0$, hallar: 1º) Planos asintóticos. 2º) Diámetro conjugado con $x-2y=0$.

Solución: 1º) $f'_x=8x-12y=0$, $f'_y=18y-12x=0$, $f'_z=2z+2=0$. La solución de este sistema, es: $2x-3y=0$, $z+1=0$. Luego los planos que pasan por el eje son: $2x-3y+\lambda(z+1)=0$. El cono asintótico es: $\varphi(x,y,z)=4x^2+9y^2+z^2-12xy=(2x-3y)^2+z^2=0$. De donde: $2x-3y\pm iz=0$, que da las direcciones de los planos asintóticos. Por tanto, obligando a que los planos que pasan por el eje sean paralelos a dichas direcciones, se tiene: $\frac{2}{2}=\frac{-3}{-3}=\frac{\lambda}{\pm i}$, de donde: $\lambda=\pm i$. Luego los planos asintóticos son: $2x-3y\pm iz\pm i=0$. 2º) El diámetro conjugado con la dirección $(1,-2,0)$, viene dado por las ecuaciones: $\frac{8x-12y}{1}=\frac{18y-12x}{-2}=\frac{2z+2}{0}$, es decir: $2x-3y=0$, $z+1=0$.

G 20- En un punto P de la intersección de dos cuádricas homofocales se trazan normales a las dos superficies. Estas normales encuentran a un mismo plano principal en dos puntos Q y Q'. Demostrar que cuando P describe la intersección de las dos cuádricas, los puntos Q y Q' describen cónicas que son polares recíprocas respecto de la focal situada en dicho plano.

Solución: Sea: $\frac{Xx}{a^2-\lambda_1}+\frac{Yy}{b^2-\lambda_1}+\frac{Zz}{c^2-\lambda_1}=1$, la ecuación del plano tangente de una de las cuádricas homofocales . La normal en el punto de tangencia es: $\frac{X-x}{\frac{x}{a^2-\lambda_1}}=\frac{Y-y}{\frac{y}{b^2-\lambda_1}}=\frac{Z-z}{\frac{z}{c^2-\lambda_1}}$. Las coordenadas del punto Q de intersección de esta normal con el plano principal $z=0$, son: $X=\frac{(a^2-c^2)x}{a^2-\lambda_1}, Y=\frac{(b^2-c^2)y}{b^2-\lambda_1}, Z=0$. La curva intersección de las dos cuádricas homofocales viene dada por las dos ecuaciones: $\frac{x^2}{a^2-\lambda_1}+\frac{y^2}{b^2-\lambda_1}+\frac{z^2}{c^2-\lambda_1}=1$, $\frac{x^2}{a^2-\lambda_2}+\frac{y^2}{b^2-\lambda_2}+\frac{z^2}{c^2-\lambda_2}=1$. Eliminando z, entre estas dos ecuaciones, se tiene: $\left[\frac{1}{(a^2-\lambda_1)(c^2-\lambda_2)}-\frac{1}{(a^2-\lambda_2)(c^2-\lambda_1)}\right]x^2+$

$+\left[\frac{1}{(b^2-\lambda_1)(c^2-\lambda_2)}-\frac{1}{(b^2-\lambda_2)(c^2-\lambda_1)}\right]y^2=\frac{1}{c^2-\lambda_2}-\frac{1}{c^2-\lambda_1}$. Sustituyendo en esta expresión las coordenadas (x,y) en función de las coordenadas (X,Y) del punto Q, se obtiene, simplificando: $\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(a^2-\lambda_1)}{(a^2-\lambda_2)(a^2-c^2)}X^2+\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(b^2-\lambda_1)}{(b^2-\lambda_2)(b^2-c^2)}Y^2=\lambda_2-\lambda_1$. Dividiendo por $(\lambda_2-\lambda_1)$, la cónica C_1 descrita por Q es: $\frac{(a^2-\lambda_1)X^2}{(a^2-\lambda_2)(a^2-c^2)}+\frac{(b^2-\lambda_1)Y^2}{(b^2-\lambda_2)(b^2-c^2)}=1,\ z=0$, y la cónica C_2 descrita por Q' es: $\frac{(a^2-\lambda_2)X^2}{(a^2-\lambda_1)(a^2-c^2)}+\frac{(b^2-\lambda_2)Y^2}{(b^2-\lambda_1)(b^2-c^2)}=1,\ z=0$. Para comprobar que ambas cónicas son polares recíprocas respecto de la focal: $\frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}=1,\ z=0$, basta ver que la polar de un punto de la primera es tangente a la segunda. En efecto, siendo: $u=-(a^2-c^2)x,\ v=-(b^2-c^2)y$, se tiene: $x=\frac{-u}{a^2-c^2}, y=\frac{-v}{b^2-c^2}$, y sustituyendo estos valores en C_1, se obtiene la ecuación tangencial de C_2: $\frac{(a^2-c^2)(a^2-\lambda_1)u^2}{a^2-\lambda_2}+\frac{(b^2-c^2)(b^2-\lambda_1)v^2}{b^2-\lambda_2}=1$.

G 21- Se da la esfera $f(x,y,z)\equiv x^2+y^2+z^2-2bz-a^2=0$, y el círculo C cuyas ecuaciones son $x^2+y^2-a^2=0,\ z=0$. Por un punto P se traza un plano cualquiera que corta a la esfera según un círculo Γ. Se considera un cono de 2º orden que pasa por C y Γ. El lugar del vértice V del cono es una cuádrica. Discutir su naturaleza cuando P se desplaza, permaneciendo fijos la esfera y el círculo C.

Solución: Sean las coordenadas de $P(x_0,y_0,z_0)$, sea Π el plano: $u(x-x_0)+v(y-y_0)+w(z-z_0)=0$, y sea φ la cuádrica formada por los planos $\Pi=0,\ z=0$, es decir, $\varphi(x,y,z)=z\Pi=0$. El vértice V tiene el mismo plano polar respecto a $\varphi(x,y,z)$ y a $f(x,y,z)$. Luego, $\frac{f'_x}{\varphi'_x}=\frac{f'_y}{\varphi'_y}=\frac{f'_z}{\varphi'_z}=\frac{f'_t}{\varphi'_t}$, es decir: $\frac{2x}{uz}=\frac{2y}{vz}=\frac{2z-2bt}{2wz-ux_0t-vy_0t-wz_0t}=\frac{-2bz-2a^2t}{-ux_0z-vy_0z-wz_0z}$. Eliminando u,v,w, se tiene la cuádrica lugar de V: $z_0(x^2+y^2)+(2b-z_0)z^2-2x_0xz-2y_0yz+2a^2z-a^2z_0=0$. Llamando A a la esfera dada, y B a la esfera $x^2+y^2+z^2-2bz=0$, se tiene: 1º) Si P está dentro de B, la cuádrica es un elipsoide real, pues es de la forma $M^2+N^2+P^2=1$. 2º) Si P está en B, la cuádrica es un paraboloide elíptico, pues es de la forma $M^2+N^2=P$. 3º) Si P está entre A y B, la cuádrica es un hiperboloide, pues es de la forma $M^2+N^2-P^2=\pm1$. 4º) Si P está en A, la cuádrica es un cono real, pues es de la forma $M^2+N^2-P^2=0$. 5º) Si P está fuera de A, la cuádrica es un hiperboloide, pues es de la forma $M^2+N^2-P^2=\pm1$. 6º) Si P está en el plano $z=0$, la cuádrica degenera en dos planos, siendo uno de ellos $z=0$.

G 22- Dadas las rectas A, B y B', cuyas respectivas ecuaciones son: $A\equiv x=0,\ y=0$, $B\equiv y=0,\ z-h=0$, $B'\equiv x=0,\ z+h=0$, se consideran las cuádricas Q que pasan por A, B y B', y cuyo centro C describe la recta $z=0,\ ux+vy+w=0$. 1º) Demostrar que las cuádricas Q pasan por una recta fija que se apoya en B y B'. 2º) Cuando C describe en $z=0$ una curva Γ de clase m, Q tiene por envolvente una superficie reglada Σ de grado $2m$.

Solución: 1º) Sea el centro $C(\alpha,\beta,0)$. La ecuación de Q es: $hxy+\beta xz-\alpha yz-h\beta x-h\alpha y=0$. Si C describe la recta: $ux+vy+w=0,\ z=0$, las cuádricas Q pasan por la recta D de ecuaciones: $hux+w(z+h)=0,\ hvy+w(z-h)=0$, que se apoya en las dos rectas dadas. 2º) A cada punto C de la curva Γ corresponde una superficie Q. Por consiguiente, la característica de esta superficie es la recta Δ cuyas ecuaciones se deducen de las de D sustituyendo u,v,w por las coordenadas de la tangente a Γ en el punto C. Si la ecuación tangencial de la curva Γ es $F(u,v,w)=0$, la ecuación de la superficie Σ es: $F[-y(z+h),x(z-h),hxy]=0$, siendo los valores de u,v,w los deducidos de D. Por tanto, si Γ es de clase m (número de tangentes desde un punto exterior a la curva), Σ es de grado $2m$

G 23- Dadas dos cuádricas homofocales C_1 y C_2, demostrar que los semidiámetros de C_2 paralelos a las normales a C_1 a lo largo de la cuártica de intersección, son de longitud constante.

Solución: Sean $C_1\equiv\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $C_2\equiv\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1$. Siendo (α,β,γ) un punto de la cuártica intersección, la normal a C_1 es: $\frac{x-\alpha}{\frac{\alpha}{a^2}}=\frac{y-\beta}{\frac{\beta}{b^2}}=\frac{z-\gamma}{\frac{\gamma}{c^2}}$. El diámetro de la cuádrica C_2 paralelo a dicha normal es: $\frac{x}{\frac{\alpha}{a^2}}=\frac{y}{\frac{\beta}{b^2}}=\frac{z}{\frac{\gamma}{c^2}}=\mu$. Este diámetro corta a la propia cuádrica C_2 en:

$\dfrac{\left(\dfrac{\mu\alpha}{a^2}\right)^2}{a^2+\lambda}+\dfrac{\left(\dfrac{\mu\beta}{b^2}\right)^2}{b^2+\lambda}+\dfrac{\left(\dfrac{\mu\gamma}{c^2}\right)^2}{c^2+\lambda}=1$, de donde: $\mu^2=\dfrac{1}{\dfrac{\alpha^2}{a^4(a^2+\lambda)}+\dfrac{\beta^2}{b^4(b^2+\lambda)}+\dfrac{\gamma^2}{c^4(c^2+\lambda)}}$. Por tanto, el cuadrado L^2 del semidiámetro es: $L^2=\mu^2\left(\dfrac{\alpha^2}{a^4}+\dfrac{\beta^2}{b^4}+\dfrac{\gamma^2}{c^4}\right)$. Introduciendo en esta expresión el valor de μ^2, se tiene: $L^2=\dfrac{\dfrac{\alpha^2}{a^4}+\dfrac{\beta^2}{b^4}+\dfrac{\gamma^2}{c^4}}{\dfrac{\alpha^2}{a^4(a^2+\lambda)}+\dfrac{\beta^2}{b^4(b^2+\lambda)}+\dfrac{\gamma^2}{c^4(c^2+\lambda)}}$. Operando y simplificando, se obtiene: $\dfrac{\alpha^2(a^2+\lambda-L^2)}{a^4(a^2+\lambda)}+\dfrac{\beta^2(b^2+\lambda-L^2)}{b^4(b^2+\lambda)}+\dfrac{\gamma^2(c^2+\lambda-L^2)}{c^4(c^2+\lambda)}=0$. Restando las ecuaciones de C_1 y C_2, se tiene: $\dfrac{\alpha^2\lambda}{a^2(a^2+\lambda)}+\dfrac{\beta^2\lambda}{b^2(b^2+\lambda)}+\dfrac{\beta^2\lambda}{c^2(c^2+\lambda)}=0$. Para que α,β,γ tengan los mismos coeficientes en ambas ecuaciones, ha de cumplirse que $\lambda-L^2=0$, es decir que los semidiámetros de C_2 miden $\sqrt{\lambda}$, constante.

G 24- Dado un paralelepípedo, se consideran tres de sus aristas que no tengan extremo común, y los dos vértices no situados en estas tres aristas. 1º) Hallar la ecuación del lugar de una cónica que pasa por estos dos puntos y se apoya en las tres aristas. 2º) Hallar las generatrices rectilíneas contenidas en la superficie.

Solución: 1º) Sean las tres aristas AD, BF y GH, cuyas respectivas ecuaciones son: $AD\equiv y-b=0$, $z+c=0$, $BF\equiv x+a=0$, $z-c=0$, $HG\equiv x-a=0$, $y+b=0$, y sean los vértices $C(a,b,c)$ y $E(-a,-b,-c)$. La ecuación de la superficie que pasa por las tres aristas y por los dos vértices, es: $\left(\frac{x}{a}-1\right)\left(\frac{z}{c}+1\right)\left(\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}\right)\left(\dfrac{y}{b}-\dfrac{x}{a}\right)+\left(\dfrac{y^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)^2=0$, que es el lugar pedido. 2º) Las rectas reales contenidas, son la diagonal CE, que es recta doble, las tres aristas dadas, y las aristas que pasan por C y E.

G 25- Formar la ecuación general de las cuádricas Q que son equiláteras y que contienen a las rectas $r\equiv y=mx, z=h$ y $r'\equiv y=-mx, z=-h$. Demostrar que las generatrices de las cuádricas Q de igual sistema que r y r', y que pasan por (x_0,y_0,z_0), permanecen en un plano P.

Solución: La ecuación de las cuádricas que contienen a las dos rectas dadas, viene dada por la expresión: $(y-mx)[y+mx+\alpha(z+h)]+(z-h)[\beta(y+mx)+\gamma(z+h)]=0$. Operando y simplificando, se tiene que: $-m^2x^2+y^2+\gamma z^2+m(\beta-\alpha)xz+(\alpha+\beta)yz-mh(\alpha+\beta)x+h(\alpha-\beta)y-\gamma h^2=0$. Por ser la cuádrica equilátera, su cono asintótico ha de ser capaz de infinitos triedros trirrectángulos, para lo que es necesario y suficiente que la suma de los coeficientes de x^2,y^2,z^2 sea nula, es decir: $1-m^2+\gamma=0$. Introduciendo en la ecuación de Q, los siguientes valores: $\alpha+\beta=2\lambda$, $\alpha-\beta=2\mu$, $\gamma=m^2-1$, se tiene: $Q\equiv -m^2x^2+y^2+(m^2-1)z^2-2m\mu xz+2\lambda yz-2hm\lambda x+2h\mu y-h^2(m^2-1)=0$. Las ecuaciones de las rectas que pasan por (x_0,y_0,z_0) son: $x=a\rho+x_0$, $y=b\rho+y_0$, $z=\rho+z_0$. Como están contenidas en la cuádrica Q, se tiene el sistema: $-m^2ax_0+(m^2-1)z_0-m\mu az_0-m\mu x_0+b\lambda z_0+\lambda y_0-hm\lambda a+h\mu b=0$, $b^2-a^2m+(m^2-1)-2am\mu+2b\lambda=0$. De las ecuaciones de la generatriz se deduce que: $a=\dfrac{x-x_0}{z-z_0}$, $b=\dfrac{y-y_0}{z-z_0}$. Introduciendo estos valores en el sistema anterior, y eliminando λ, se obtiene una expresión que es el cuadrado de: $my_0x-mx_0y+h(m^2-1)z-h(m^2-1)z_0=0$, que es la ecuación de un plano, con lo que queda demostrado que las generatrices permanecen en este plano.

G 26- Hallar el plano diametral de la cuádrica $12x^2+15y^2+20z^2+120x-60y-120z+7=0$, conjugado con la dirección $(5,4,3)$.

Solución: Se tiene: $f'_x=24x+120$, $f'_y=30y-60$, $f'_z=40z-120$. Luego el plano diametral pedido es: $5(24x+120)+4(30y-60)+3(40z-120)=0$, que simplificado es: $x+y+z=0$.

G 27- Dada la cuádrica $x^2+77y^2+7z^2-28xy+14xz-56yz-56x+84y+28z+14=0$, hallar el plano diametral conjugado con la dirección $(7,3,5)$.

Solución: Se tiene: $f'_x=2x-28y+14z-56$, $f'_y=-28x+a54y-56z+84$, $f'_z=14x-56y+14z+28$. El plano pedido es: $7(2x-28y+14z-56)+3(-28x+a54y-56z+84)+5(14x-56y+14z+28)$, que simplificado es: $y=0$.

G 28- Hallar el diámetro de la cuádrica $2x^2+y^2+2z^2-1=0$, conjugado con el plano $2x+y-4z=0$.

Solución: Se tiene: $f'_x=4x$, $f'_y=2y$, $f'_z=4z$. Luego el diámetro pedido es: $\frac{4x}{2}=\frac{2y}{1}=\frac{4z}{-4}$, o bien: $2x=2y=-z$.

G 29- Hallar el diámetro de la cuádrica $x^2+y^2+3z^2+2xy+2xz+4yz+2x+4y+8z+3=0$, conjugado con el plano $3x+6y+12z+1=0$.

Solución: Se tiene: $f'_x=2x+2y+2z+2$, $f'_y=2x+2y+4z+4$, $f'_z=2x+4y+6z+8$. Luego el diámetro pedido es: $\frac{x+y+z+1}{3}=\frac{x+y+2z+2}{6}=\frac{x+2y+3z+4}{12}$. Operando: $x+y=0$, $x+z=0$.

G 30- Dado el paraboloide elíptico $x^2+y^2+z^2+2xz+6x+4y+2z+13=0$, hallar sus planos principales, ejes y vértices.

Solución: Ecuación en S: $\begin{vmatrix}1-S & 0 & 1\\ 0 & 1-S & 0\\ 1 & 0 & 1-S\end{vmatrix}=S(S-1)(S-2)=0$. Siendo (l,m,n) la dirección buscada, se tiene el sistema: $(1-S)l+n=0$, $(1-S)m=0$, $l+(1-S)n=0$, cuyas soluciones son: para $S=0$, $(1,0,-1)$; para $S=1$, $(0,1,0)$; para $S=2$, $(1,0,1)$. Siendo $f'_x=2x+2z+6$, $f'_y=2y+4$, $f'_z=2x+2z+2$, el plano principal para $S=0$, es: $2x+2z+6-2x-2z-2=0$, es decir: $t=0$. Para $S=1$, el plano principal es: $2y+4=0$, es decir: $y+2=0$. Para $S=2$, el plano principal es: $2x+2z+6+2x+2z+2=0$, es decir: $x+z+2=0$. Los ejes son: $t=0$, $y+2=0$; $t=0$, $x+z+2=0$; $y+2=0$, $x+z+2=0$, luego solo tiene un eje propio. La cuádrica tiene dos vértices impropios y uno propio: $\left(\frac{-9}{4},-2,\frac{1}{4}\right)$.

G 31- Hallar los planos principales, ejes y vértices de la cuádrica $12x^2+15y^2+20z^2+24x+40z-28=0$.

Solución: La ecuación en S es: $\begin{vmatrix}12-S & 0 & 0\\ 0 & 15-S & 0\\ 0 & 0 & 20-S\end{vmatrix}=(12-S)(15-S)(20-S)=0$. Para $S=12$, la dirección es $(1,0,0)$; para $S=15$, es $(0,1,0)$; para $S=20$, es $(0,0,1)$. Como $f'_x=24x+24$, $f'_y=30y$, $f'_z=40z+40$, el plano principal para $S=12$, es: $x+1=0$; para $S=15$, el plano principal es: $y=0$; para $S=20$, el plano es: $z+1=0$. Los ejes son: $x+1=0$, $y=0$; $x+1=0$, $z+1=0$; $y=0$, $z+1=0$. Los vértices (intersección de los ejes con la cuádrica) son: $\left(-1,0,-1\pm\sqrt{3}\right)$, $(-1,\pm2,-1)$, $\left(-1\pm\sqrt{5},0,-1\right)$.

G 32- Dada la cuádrica $2xy+2xz+2yz-1=0$, hallar sus planos principales.

Solución: La ecuación en S es: $\begin{vmatrix}-S & 1 & 1\\ 1 & -S & 1\\ 1 & 1 & -S\end{vmatrix}=(S+1)^2(S-2)=0$. El sistema para determinar las direcciones es: $-Sl+m+n=0$, $l-Sm+n=0$, $l+m-Sn=0$. Para $S=2$, la dirección es: $(1,1,1)$. Para la raíz doble $S=-1$, se tiene: $\frac{m}{n}(x-y)+x-z=0$, luego la cuádrica es de revolución, de eje: $x-y=0$, $x-z=0$.

G 33- Dada la cuádrica $3x^2+5y^2+3z^2+2xy+2xz+2yz+2x+12y+10z+20=0$, hallar sus planos principales.

Solución: La ecuación en S es $\begin{vmatrix}3-S & 1 & 1\\ 1 & 5-S & 1\\ 1 & 1 & 3-S\end{vmatrix}=-(S-2)(S-3)(S-6)=0$. El sistema para determinar las direcciones es: $(3-S)l+m+n=0$, $l+(5-S)m+n=0$, $l+m+(3-S)n=0$. Para $S=2$, la dirección es: $(-1,0,1)$; para $S=3$, es: $(1,-1,1)$; para $S=6$, es: $(1,2,1)$. Siendo $f'_x=6x+2y+2z+2$, $f'_y=2x+10y+2z+12$, $f'_z=2x+2y+6z+10$, el plano principal para $S=2$, es:

$x-z-2=0$; para $S=3$, el plano es: $x-y+z=0$; para $S=6$, es: $x+2y+z+3=0$.

G 34- Dada la cuádrica $x^2+2y^2+3z^2+4xy+xz+2yz+3tx+2ty+4tz+7t^2=0$, en coordenadas homogéneas, hallar el plano polar del punto $(3,1,2,1)$. Hallado el plano polar, comprobar que su polo es el punto dado.

Solución: Derivando: $f'_x(3,1,2,1)=2x+4y+z+3t=15$; $f'_y(3,1,2,1)=4x+4y+2z+2t=22$; $f'_z(3,1,2,1)=x+2y+6z+4t=21$; $f'_t(3,1,2,1)=3x+2y+4z+14t=33$. El plano polar de $(3,1,2,1)$ es: $15x+22y+21z+33=0$. Para realizar la comprobación del polo de este plano, se tiene: $\frac{2x+4y+z+3}{15}=\frac{4x+4y+2z+2}{22}=\frac{x+2y+6z+4}{21}=\frac{3x+2y+4z+14}{33}$. De donde se deduce el sistema: $9x+18y-23z=-1$, $6x+8y-2z=22$, $7x+34y-9z=37$, cuya solución es $(3,1,2)$.

G 35- Dada la cuádrica $x^2+y^2-2z^2-xy+3xz-2yz-x+y+z+5=0$, y la recta $x=2-2\lambda$, $y=3-3\lambda$, $z=-1+\lambda$, $t=1+\lambda$, hallar la ecuación de la involución que la cuádrica subordina en la recta, y sus puntos dobles.

Solución: Sean λ_1 y λ_2 dos puntos de la recta, que para que sean conjugados deben verificar la ecuación $x_1f'_{x_2}+y_1f'_{y_2}+z_1f'_{z_2}+t_1f'_{t_2}=0$. Como $f'_x=2x-y+3z-1$, $f'_y=-x+2y-2z+1$, $f'_z=3x-2y-4z+1$, $f'_t=-x+y+z+10$, se tiene que: $x_1f'_{x_2}=(2-2\lambda_1)[2(2-2\lambda_2)-(3-3\lambda_2)+3(-1+\lambda_2)-(1+\lambda_2)]=$ $=(2-2\lambda_1)(-3+\lambda_2)$, y procediendo de la misma forma, se obtienen: $y_1f'_{y_2}=(3-3\lambda_1)(7-5\lambda_2)$, $z_1f'_{z_2}=(-1+\lambda_1)(5-3\lambda_2)$, $t_1f'_{t_2}=(1+\lambda_1)(10+10\lambda_2)$. Sumando estas ecuaciones y operando, se obtiene: $20+20\lambda_1\lambda_2=0$, es decir: $\lambda_1\lambda_2+1=0$, que es la ecuación de la involución. Los puntos dobles corresponden a: $\lambda^2+1=0$, $\lambda=\pm i$, es decir en coordenadas homogéneas: $(2-2i,3-3i,-1+i,1+i)$ y $(2+2i,3+3i,-1-i,1-i)$, o lo que es lo mismo, para $t=1$, $(\mp 2i,\mp 3i,\pm i)$.

G 36- Dada la cuádrica $x^2+y^2-xy+3xz-x+2z+1=0$, y la recta $7x-z-2=0$, $y=1$, hallar la ecuación de la involución que la cuádrica subordina en la recta, así como los planos tangentes a la cuádrica definidos por dicha involución.

Solución: Se tiene: $f'_x=2x-y+3z-1$, $f'_y=-x+2y$, $f'_z=3x+2$, $f'_t=-x+2z+2$. El haz de planos que pasan por la recta dada, es: $7x-z-2+\lambda(y-1)=7x+\lambda y-z-2-\lambda=0$. Sean λ_1 y λ_2 los valores del parámetro que hacen que los dos planos que determinan, sean conjugados. Ha de cumplirse que el determinante A de la cuádrica, orlado con los coeficientes de los dos planos, sea nulo. Es decir: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 & 7 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & -2-\lambda_1 \\ 7 & \lambda_2 & -1 & -2-\lambda_2 & 0 \end{vmatrix}=0$. Operando y simplificando, se obtiene la ecuación de la involución: $17\lambda_1\lambda_2+41(\lambda_1+\lambda_2)+137=0$. Los valores dobles de λ son: $\frac{-41\pm 18\sqrt{2}\,i}{17}$. Sustituyendo estos valores en el haz de planos definido, se obtienen las ecuaciones de los planos tangentes pedidos: $7x+\frac{-41\pm 18\sqrt{2}\,i}{17}y-z-2-\frac{-41\pm 18\sqrt{2}\,i}{17}=0$.

G 37- Dada la ecuación $\lambda(\lambda+1)x-\lambda y+(\lambda+1)z-(\lambda^2+2)a=0$, hallar la de su envolvente referida a su centro, así como la relación existente entre esta envolvente y su cono asintótico.

Solución: Se tiene: $f'_\lambda=(\lambda+1)x+\lambda x-y+z-2\lambda a=0$, de donde: $\lambda=\frac{-x+y-z}{2(x-a)}$. Sustituyendo este valor en la ecuación dada, operando y dividiendo por $(x-a)$, se tiene la ecuación de la cuádrica envolvente: $x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz+8ax+4az-8a^2=0$. Siendo la ecuación referida a su centro: $\varphi(x,y,z)+\frac{A}{A_{44}}=0$, como $A=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 4a \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 2a \\ 4a & 0 & 2a & -8a^2 \end{vmatrix}=0$, $A_{44}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-4$, la ecuación es: $x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz=0$. Luego la cuádrica es un cono, por lo que su cono asintótico es ella misma.

G 38- Hallar los planos asintóticos del paraboloide elíptico $x^2+y^2+z^2+2xz+6x+4y+2z+13=0$.

Solución: $\varphi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2xz=(x+z)^2+y^2$. Las direcciones de los planos asintóticos son: $x+z=\pm iy$, es decir: $(1,\pm i,1)$. La ecuación en S es: $\begin{vmatrix} 1-S & 0 & 1 \\ 0 & 1-S & 0 \\ 1 & 0 & 1-S \end{vmatrix}=-S(S-1)(S-2)=0$. El plano principal para $S=0$ es: $t=0$ (plano impropio); para $S=1$, es: $y+2=0$; para $S=2$, es: $x+z+2=0$. El eje es: $y+2=0, x+z+2=0$. Los planos que pasan por el eje son: $x+z+2+\lambda(y+2)=0$. Como han de ser paralelos a $(1,\pm i,1)$, se tiene: $\frac{1}{1}=\frac{\lambda}{\pm i}=\frac{1}{1}$, de donde: $\lambda=\pm i$. Los planos asintóticos son: $x\pm iy+z+2\pm 2i=0$.

G 39- Hallar el cono asintótico del cilindro hiperbólico $4x^2-18y^2-6xy+6xz+9yz-2x+9y-4z-4=0$.

Solución: Se tiene que $\varphi(x,y,z)=4x^2-18y^2-6xy+6xz+9yz=(4x-3y+3z)^2-(3z-9y)^2=0$. Luego los planos asintóticos son paralelos a los planos: $4x-3y+3z\pm(3z-9y)=0$, es decir, simplificando, son paralelos a los planos: $2x-6y+3z=0$, $2x+3y=0$. Siendo: $f'_x=8x-6y+6z-2$, $f'_y=-6x-36y+9z+9$, $f'_z=6x+9y-4$, $A_{44}=\begin{vmatrix} 8 & -6 & 6 \\ -6 & -36 & 9 \\ 6 & 9 & 0 \end{vmatrix}=0$, el eje es: $4x-3y+3z-1=0$, $6x+9y-4=0$. . Los planos que contienen al eje son: $4x-3y+3z-1+\lambda(6x+9y-4)=0$. De estos, el paralelo a: $2x-6y+3z=0$, verifica la relación: $\frac{4+6\lambda}{2}=\frac{-3+9\lambda}{-6}=\frac{3}{3}$, luego: $\lambda=\frac{-1}{3}$, siendo el plano: $6x-18y+9z+1=0$. Procediendo análogamente con el segundo plano, se tiene que: $\frac{4+6\lambda}{2}=\frac{-3+9\lambda}{3}=\frac{3z}{0}$. De donde: $\lambda=\infty$, siendo el plano: $6x+9y-4=0$. El cono asintótico ha degenerado en los planos asintóticos calculados.

G 40- Dada la cuádrica $f(x,y,z)=0$, hallar el lugar geométrico de los vértices de los triedros trirrectángulos tales que sus tres aristas sean tangentes a la cuádrica. Aplicarlo a los casos del elipsoide, hiperboloide y paraboloide.

Solución: Sea (α,β,γ) un punto del lugar. La ecuación del cono cuyo vértice es (α,β,γ) y está circunscrito a $f(x,y,z)=0$, es: $(xf'_\alpha+yf'_\beta+zf'_\gamma+tf'_t)^2-4f(x,y,z)f(\alpha,\beta,\gamma)=0$. Por ser capaz de un triedro trirrectángulo, ha de cumplirse que: $a_{11}+a_{22}+a_{33}=0$, luego la ecuación pedida es: $f'^2_x-4a_{11}f(x,y,z)+f'^2_y-4a_{22}f(x,y,z)+f'^2_z-4a_{33}f(x,y,z)=0$. Aplicando este resultado al elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, como $f'_x=\frac{2x}{a^2}$, $f'_y=\frac{2y}{b^2}$, $f'_z=\frac{2z}{c^2}$, $a_{11}=\frac{1}{a^2}$, $a_{22}=\frac{1}{b^2}$, $a_{33}=\frac{1}{c^2}$, se tiene: $\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\frac{y^2}{b^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\frac{z^2}{c^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$, que es un elipsoide. Aplicado el resultado al hiperboloide $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, y procediendo de forma análoga al caso anterior, se tiene: $\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\pm\frac{y^2}{b^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)-\frac{z^2}{c^2}\left(\frac{1}{a^2}\pm\frac{1}{b^2}\right)=\frac{1}{a^2}\pm\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}$, que es un hiperboloide. Aplicado el resultado al paraboloide $\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}-2x=0$, se tiene: $\frac{y^2+z^2}{pq}-2x\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)-1=0$, que es un paraboloide.

G 41- Hallar el lugar geométrico de los vértices de los triedros trirrectángulos cuyas caras son tangentes al elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Solución: En el problema G 40, se ha hallado la ecuación del cono circunscrito al elipsoide. La ecuación del cono suplementario a este, es: $(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2-(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)=0$. Como ha de ser capaz de un triedro trirrectángulo inscrito, ha de verificarse que: $\alpha^2-a^2+\beta^2-b^2+\gamma^2-c^2=0$. Por tanto el lugar es la esfera de Monge: $x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2$.

Nota: En el caso del paraboloide $\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}-2x=0$, el lugar es el plano de Monge de ecuación: $x+\frac{p+q}{2}=0$.

G 42- Dada la elipse de ecuaciones $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=0$, hallar el lugar geométrico de los vértices de los

triedros trirrectángulos cuyas aristas encuentran a la elipse dada.

Solución: En el problema G 40, se ha hallado el lugar pedido referido a un elipsoide canónico, cuya ecuación es: $\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\frac{y^2}{b^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\frac{z^2}{c^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$. Operando, se tiene: $(b^2+c^2)x^2+(a^2+c^2)y^2+(a^2+b^2)z^2=b^2c^2+a^2b^2+a^2c^2$. Haciendo $c=0$, se tiene el lugar pedido: $b^2x^2+a^2y^2+(a^2+b^2)z^2=a^2b^2$, o bien: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})z^2-1=0$, que corresponde a un elipsoide.

G 43- Hallar la ecuación reducida de $5x^2+14y^2-z^2-28xy+32xz+4yz+32x+4y-2z-10=0$.

Solución: $A=\begin{vmatrix} 5 & -14 & 16 & 16 \\ -14 & 14 & 2 & 2 \\ 16 & 2 & -1 & -1 \\ 16 & 2 & -1 & -10 \end{vmatrix}=39366$, $A_{44}=-4374$, $\frac{A}{A_{44}}=-9$. Por ser A y A_{44} no nulos, la cuádrica tiene centro único propio. La correspondiente ecuación en S es: $\begin{vmatrix} 5-S & -14 & 16 \\ -14 & 14-S & 2 \\ 16 & 2 & -1-S \end{vmatrix}=0$, cuyas raíces son: 9, −18, 27. Por tanto, la ecuación reducida es: $9x^2-18y^2+27z^2-9=0$, es decir: $x^2-2y^2+3z^2-1=0$, que es un hiperboloide de una hoja.

G 44- Hallar la ecuación reducida de la cuádrica $5x^2+5y^2+8z^2+8xy-4xz+4yz-12x+12y-6z=0$.

Solución: $I_4=A=\begin{vmatrix} 5 & 4 & -2 & -6 \\ 4 & 5 & 2 & 6 \\ -2 & 2 & 8 & -3 \\ -6 & 6 & -3 & 0 \end{vmatrix}=-6561$, $I_3=A_{44}=0$. La cuádrica es un paraboloide elíptico.

La ecuación reducida es: $S_2y^2+S_3z^2\pm 2\sqrt{\frac{-I_4}{I_2}}\,x=0$. La correspondiente ecuación en S es:

$\begin{vmatrix} 5-S & 4 & -2 \\ 4 & 5-S & 2 \\ -2 & 2 & 8-S \end{vmatrix}=-S(S-9)^2=0$. $I_2=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=81$, $\frac{I_4}{I_2}=-81$.

Luego la ecuación reducida es: $9y^2+9z^2\pm 2\cdot 9x=0$, es decir: $y^2+z^2\pm 2x=0$. Por ser paraboloide elíptico, el signo a tomar es el negativo, quedando la ecuación: $y^2+z^2-2x=0$.

G 45- Hallar la ecuación reducida de la cuádrica $4x^2+4y^2+5z^2-4xz-8yz-8x-16y+20z+4=0$.

Solución: Los invariantes son: $I_4=A=\begin{vmatrix} 4 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & -4 & -8 \\ -2 & -4 & 5 & 10 \\ -4 & -8 & 10 & 4 \end{vmatrix}=0$, $I_3=A_{44}=\begin{vmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{vmatrix}=0$,

$I_2=\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33}=\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}=4+16+16=36$,

$I_3'=\begin{vmatrix} 4 & -4 & -8 \\ -4 & 5 & 10 \\ -8 & 10 & 4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 5 & 10 \\ -4 & 10 & 4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -8 \\ -4 & -8 & 4 \end{vmatrix}=-576$, $\frac{I_3'}{I_2}=-16$. La correspondiente

ecuación en S es: $\begin{vmatrix} 4-S & 0 & -2 \\ 0 & 4-S & -4 \\ -2 & -4 & 5-S \end{vmatrix} = -S(S-4)(S-9) = 0$. Dados los resultados anteriores, como la ecuación reducida es: $S_1x^2 + S_2y^2 + \dfrac{I_3'}{I_2} = 0$, se tiene: $4x^2 + 9y^2 - 16 = 0$, que es un cilindro elíptico.

G 46- Hallar la ecuación reducida de la cuádrica $4x^2 + y^2 + 4z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 6x - 12y - 12z = 0$.

Solución: $I_4 = A = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -4 & -3 \\ 2 & 1 & -2 & -6 \\ -4 & -2 & 4 & -6 \\ -3 & -6 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad I_3 = A_{44} = 0, \quad I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 4+1+4 = 9,$

$I_3' = A_{11} + A_{22} + A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -2 & 4 & -6 \\ -6 & -6 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -4 & -3 \\ -4 & 4 & -6 \\ -3 & -6 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -3 & -6 & -6 \end{vmatrix} = -729, \ \sqrt{\dfrac{-I_3'}{I_1}} = 9.$

La ecuación en S es: $\begin{vmatrix} 4-S & 2 & -4 \\ 2 & 1-S & -2 \\ -4 & -2 & 4-S \end{vmatrix} = -S^2(S-9) = 0$. La ecuación reducida es: $Sy^2 \pm 2\sqrt{\dfrac{-I_3'}{I_1}}\, x = 0$, luego: $9y^2 \pm 18x = 0$, es decir: $y^2 \pm 2x = 0$, que es un cilindro parabólico.

G 47- Hallar la ecuación reducida de la cuádrica $x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy + 2xz - 4yz - 2x + 4y - 2z - 3 = 0$.

Solución: Los invariantes son: $I_4 = A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$, $I_3 = A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$

$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 6, \quad I_2' = \alpha_{11}' + \alpha_{22}' + \alpha_{33}' = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -24,$

$I_3' = A_{11} + A_{22} + A_{33} = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$, La ecuación en S es: $\begin{vmatrix} 1-S & -2 & 1 \\ -2 & 4-S & -2 \\ 1 & -2 & 1-S \end{vmatrix} = -S^2(S-6) = 0$. Siendo la ecuación reducida: $Sz^2 + \dfrac{I_2'}{I_1} = 0$, se tiene: $6z^2 - 4 = 0$, es decir: $3z^2 - 2 = 0$, que corresponde a dos planos paralelos.

G 48- Hallar los planos cíclicos de la cuádrica $3x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 2xz - 4 = 0$.

Solución: La ecuación en S es: $\begin{vmatrix} 3-S & 0 & 1 \\ 0 & 5-S & 0 \\ 1 & 0 & 3-S \end{vmatrix} = -(S-2)(S-4)(S-5) = 0$. Se toma el valor absoluto intermedio $S = 4$. Luego: $\varphi(x,y,z) - S(x^2+y^2+z^2) = -x^2 + y^2 - z^2 + 2xz = y^2 - (x-z)^2 = 0$. Las dos direcciones cíclicas vienen dadas por: $x + y - z = \lambda$, $x - y - z = \mu$.

G 49- Hallar los puntos umbilicales (umbílicos) de la cuádrica $-5xy + 5xz + 4yz + 8 = 0$.

Solución: La ecuación en S es: $\begin{vmatrix} 0-S & \frac{-5}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{-5}{2} & 0-S & 2 \\ \frac{5}{2} & 2 & 0-S \end{vmatrix} = 0$. Sus raíces son: 2 y $\frac{-2\pm 3\sqrt{6}}{2}$. Se escoge la de valor absoluto intermedio $S = 2$. La ecuación de los planos cíclicos viene dada por: $\varphi(x,y,z) - S(x^2+y^2+z^2) = 0$. Como $\varphi = -2x^2-2y^2-2z^2-5xy+5xz+4yz$, estos planos son: $-(x+2y-2z)(2x+y-z) = 0$. Los planos paralelos son: $x+2y-2z = \lambda$, $2x+y-z = \mu$. Las direcciones cíclicas son: $\frac{f'_x}{1} = \frac{f'_y}{2} = \frac{f'_z}{-2}$ y $\frac{f'_x}{2} = \frac{f'_y}{1} = \frac{f'_z}{-1}$, es decir: $\frac{-5y+5z}{1} = \frac{-5x+4z}{2} = \frac{5x+4y}{-2}$ y $\frac{-5y+5z}{2} = \frac{-5x+4z}{1} = \frac{5x+4y}{-1}$. Resolviendo los dos sistemas formados por la ecuación de la cuádrica con cada una de las dos direcciones cíclicas, se obtienen los puntos umbilicales: $\pm\left(\frac{32\sqrt{3}}{15}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{-2\sqrt{3}}{3}\right), \pm\left(\frac{2\sqrt{3}}{15}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{-2\sqrt{3}}{3}\right)$.

G 50- Hallar un sistema de generatrices de la cuádrica $4x^2-18y^2-6xy+6xz+9yz-2x+9y-4z-4 = 0$.

Solución: Se trata de un cilindro hiperbólico. Su eje es: $4x-3y+3z-1 = 0$, $6x+9y-4 = 0$, cuya dirección es $(-3,2,6)$. La sección por $y = 0$ es: $2x^2+3xz-x-2z-2 = 0$, $y = 0$. Siendo (α,β,γ) un punto de esta cónica sección, hay que eliminar dos de estos tres parámetros, entre las ecuaciones $2\alpha^2+3\alpha\gamma-\alpha-2\gamma-2 = 0$, $\beta = 0$, $\frac{x-\alpha}{-3} = \frac{y-\beta}{2} = \frac{z-\gamma}{6}$. Eliminando β y γ, se tiene: $3x+3y = 2\alpha$, $3y-z = \frac{2+\alpha-2\alpha^2}{3\alpha-2}$, que son las ecuaciones del sistema de generatrices pedido.

G 51- Comprobar si la cuádrica $16y^2-9z^2-288x = 0$, admite generatrices rectilíneas. En caso afirmativo, hallar las que pasan por el punto $A(2,3,4)$.

Solución: Se trata de un paraboloide hiperbólico que sí admite generatrices. Se tiene: $\frac{y}{3}-\frac{z}{4} = 2\lambda x$, $\frac{y}{3}+\frac{z}{4} = \frac{1}{\lambda}$ (por pasar por A, $\lambda = \frac{1}{2}$), $\frac{y}{3}+\frac{z}{4} = 2\mu x$, $\frac{y}{3}-\frac{z}{4} = \frac{1}{\mu}$ (por pasar por A, $\mu = \infty$). Las generatrices del primer sistema son: $\frac{y}{3}-\frac{z}{4} = x$, $\frac{y}{3}+\frac{z}{4} = 2$. Y las del segundo sistema son: $x = 0$, $\frac{y}{3}-\frac{z}{4} = 0$.

G 52- Demostrar que la cuádrica $3x^2+6y^2+3z^2+4xy-2xz-4yz+2x-6y+10z+8 = 0$, es de revolución y hallar su eje.

Solución: Como $a_{12}\cdot a_{13}\cdot a_{23} = 2(-1)(-2) = 4 \neq 0$, se pueden emplear los números de Jacobi: $N = a_{11}-\frac{a_{13}a_{12}}{a_{23}} = 2$, $N' = a_{22}-\frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}} = 2$, $N'' = a_{33}-\frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}} = 2$. Los tres números son iguales, luego la cuádrica es de revolución. También se puede resolver el problema por medio de la ecuación en S: $\begin{vmatrix} 3-S & 2 & -1 \\ 2 & 6-S & -2 \\ -1 & -2 & 3-S \end{vmatrix} = -(S-2)^2(S-8) = 0$. Al tener una raíz doble, la cuádrica es de revolución. Las ecuaciones del eje vienen dadas por: $\frac{x+\frac{a_{14}}{S}}{a_{12}a_{13}} = \frac{y+\frac{a_{24}}{S}}{a_{12}a_{23}} = \frac{z+\frac{a_{34}}{S}}{a_{13}a_{23}}$ (siendo S la raíz doble), es decir: $\frac{x+\frac{1}{2}}{-2} = \frac{y+\frac{-3}{2}}{-4} = \frac{z+\frac{5}{2}}{2}$, o bien: $\frac{2x+1}{-1} = \frac{2y-3}{-2} = \frac{2z+5}{1}$.

G 53- Demostrar, utilizando la teoría de los invariantes, que en ejes rectangulares, la superficie representada por la ecuación $F \equiv (ax+by+cz)^2+(a'x+b'y+c'z)^2+(a''x+b''y+c''z)^2 = 1$, es igual a la representada por la ecuación $G \equiv (ax+a'y+a''z)^2+(bx+b'y+b''z)^2+(cx+c'y+c''z)^2 = 1$.

Solución: Las dos expresiones corresponden a cuádricas. Los cuatro invariantes que se han de comparar son: $I_1 = a_{11}+a_{22}+a_{33}$, $I_2 = \alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33}$, ($\alpha_{11}$, etc. son los menores de A_{44}), $I_3 = A_{44}$, $I_4 = A$. Desarrollando las ecuaciones dadas, se tiene:
$F \equiv x^2(a^2+a'^2+a''^2)+y^2(b^2+b'^2+b''^2)+z^2(c^2+c'^2+c''^2)+2xy(ab+a'b'+a''b'')+$
$+2xz(ac+a'c'+a''c'')+2yz(bc+b'c'+b''c'') = 1$.

$G \equiv x^2(a^2+b^2+c^2)+y^2(a'^2+b'^2+c'^2)+z^2\left(a''^2+b''^2+c''^2\right)+2xy(aa'+bb'+cc')+$
$+2xz(aa''+bb''+cc'')+2yz(a'a''+b'b''+c'c'')=1.$
$I_1(F)=a^2+a'^2+a''^2+b^2+b'^2+b''^2+c^2+c'^2+c''^2;$
$I_1(G)=a^2+b^2+c^2+a'^2+b'^2+c'^2+a''^2+b''^2+c''^2$, luego $I_1(F)=I_1(G)$.

$$I_2(F)=\begin{vmatrix} a^2+a'^2+a''^2 & ac+a'c'+a''c'' \\ ac+a'c'+a''c'' & c^2+c'^2+c''^2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b^2+b'^2+b''^2 & bc+b'c'+b''c'' \\ bc+b'c'+b''c'' & c^2+c'^2+c''^2 \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} a^2+a'^2+a''^2 & ab+a'b'+s''b'' \\ ab+a'b'+a''b'' & b^2+b'^2+b''^2 \end{vmatrix}=2(a^2c'^2+a^2c''^2+a'^2c^2+a'^2c''^2+a''^2c^2+a''^2c'^2+b^2c'^2+$$

$+b^2c''^2+b'^2c^2+b'^2c''^2+b''^2c^2+b''^2c'^2+b^2a'^2+b^2a''^2+b'^2a^2+b'^2a''^2+b''^2a^2+b''^2a'^2-aa'cc'-$
$-aa''cc''-a'a''cc''-bb'cc'-bb''cc''-b'b''c'c''-aa'bb'-aa''bb''-a'a''bb'')=$

$$=\begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2 & aa'+bb'+cc' \\ aa'+bb'+cc' & a'^2+b'^2+c'^2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2 & aa''+bb''+cc'' \\ aa''+bb''+cc'' & a''^2+b''^2+c''^2 \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} a'^2+b'^2+c'^2 & a'a''+b'b''+c'c'' \\ a'a''+b'b''+c'c'' & a''^2+b''^2+c''^2 \end{vmatrix}=I_2(G).$$

$$I_3(F)=\begin{vmatrix} a^2+a'^2+a''^2 & ab+a'b'+a''b'' & ac+a'c'+a''c'' \\ ab+a'b'+a''b'' & b^2+b'^2+b''^2 & bc+b'c'+b''c'' \\ ac+a'c'+a''c'' & bc+b'c'+b''c'' & c^2+c'^2c''^2 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}[a(b'c''-b''c')+a'(b''c-cb'')+a''(bc'-b'c)]=$$

$$=\begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2 & aa'+bb'+cc' & aa''+bb''+cc'' \\ aa'+bb'+cc' & a'^2+b'^2+c'^2 & a'a''+b'b''+c'c'' \\ aa''+bb''+cc'' & a'a''+b'b''+c'c'' & a''^2+b''^2+c''^2 \end{vmatrix}=I_3(G).$$

Como también $I_4(F)=I_4(G)$, las dos cuádricas son idénticas.

G 54- Hallar las ecuaciones de los conos que proyectan la cuártica definida por la intersección de las dos cuádricas $3y^2+3z^2+4x-4=0$, $2x^2+y^2-5z^2-4x+4=0$.

Solución: La ecuación del haz de cuádricas que pasan por la intersección de las cuádricas dadas, es: $2x^2+y^2-5z^2-4x+4+\lambda(3y^2+3z^2+4x-4)=0$. Su correspondiente ecuación característica es:

$$C(\lambda)=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -2+2\lambda \\ 0 & 1+3\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5+3\lambda & 0 \\ -2+2\lambda & 0 & 0 & 4-4\lambda \end{vmatrix}=0,$$ cuyas raíces son: $1, -1, \frac{-1}{3}, \frac{5}{3}$. Introduciendo en la ecuación del haz estos cuatro valores obtenidos para λ, se tiene: para $\lambda=1$, el cono de vértice el origen: $x^2+2y^2-z^2=0$; para $\lambda=-1$, el cono: $(x-2)^2-y^2-4z^2=0$; para $\lambda=\frac{-1}{3}$, el cilindro: $3x^2-9z^2-8x+8=0$; para $\lambda=\frac{5}{3}$, el cilindro: $3x^2+9y^2+4x-4=0$. Las ecuaciones pedidas son: $x^2+2y^2-z^2=0$, $(x-2)^2-y^2-4z^2=0$.

G 55- Hallar los conos proyectantes de la cuártica $x^2+y^2+z^2-2z=0$, $2x^2-y^2+2z^2-2z=0$, demostrando que la curva es crunodal (tiene un punto doble).

Solución: Las cuádricas del haz: $2x^2-y^2+2z^2-2z+\lambda(x^2+y^2+z^2-2z)=0$, pasan por la cuártica

dada. Su ecuación característica es: $C(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1+\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+\lambda & -1-\lambda \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \end{vmatrix} = 0$, cuyas raíces son: 1, -1 (doble) y -2. Para $\lambda = 1$, se tiene el cilindro: $3x^2+3z^2-4z = 0$. Para $\lambda = -1$, se tiene el cono de vértice el origen: $x^2-2y^2+z^2 = 0$. Para $\lambda = -2$, se tiene el cilindro: $3y^2-2z = 0$. Como el vértice está en el origen, no hay que trasladar los ejes, siendo $z = 0$, el plano tangente en el vértice. La intersección de este plano con el cono, es: $x^2-2y^2 = 0$, $z = 0$. Su discriminante es $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 < 0$. La curva es crunodal, siendo el punto doble el origen $(0,0,0)$. Las tangentes a la curva en ese punto, son: $x^2-2y^2 = 0$, es decir: $z = 0$, $x = \pm\sqrt{2}\,y$.

G 56- Demostrar que las cuádricas $2y^2+2xy+4xz+2yz+2z = 0$, $y^2+z^2-2xy+6xz-4yz+2z = 0$, tienen en común una recta y hallarla.

Solución: El haz correspondiente es: $2y^2+2xy+4xz+2yz+2z+\lambda(y^2+z^2-2xy+6xz-4yz+2z) = 0$. La ecuación característica es $C(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda & 2+3\lambda & 0 \\ 1-\lambda & 2+\lambda & 1-2\lambda & 0 \\ 2+3\lambda & 1-2\lambda & \lambda & 1+\lambda \\ 0 & 0 & 1+\lambda & 0 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2 = 0$. Para $\lambda = -1$, se tiene el cono de vértice el origen: $y^2-z^2+4xy-2xz+6yz = 0$. Para $\lambda = 1$, se tiene el cono de vértice $\left(\frac{-2}{5},0,0\right)$: $3y^2+z^2+10xz-2yz+4z = 0$. Al haber raíces dobles, las cuádricas tienen en común la recta V_1V_2, que es: $y = 0$, $z = 0$, que forma parte de la cuártica.

G 57- Demostrar que las cuádricas $2x^2+y^2+z^2+4xz-2yz-4z = 0$, $x^2+2y^2+2z^2-4xz+2yz-2z = 0$, definen en su intersección una cuártica cuspidal (tiene un punto de retroceso).

Solución: El haz: $2x^2+y^2+z^2+4xz-2yz-4z+\lambda(x^2+2y^2+2z^2-4xz+2yz-2z) = 0$, pasa por las cuádricas dadas. Su ecuación característica es: $C(\lambda) = \begin{vmatrix} 2+\lambda & 0 & 2-2\lambda & 0 \\ 0 & 1+2\lambda & -1+\lambda & 0 \\ 2-2\lambda & -1+\lambda & 1+2\lambda & -2-\lambda \\ 0 & 0 & -2-\lambda & 0 \end{vmatrix} = 0$, siendo sus raícas: -2 (triple) y -1. Para $\lambda = -2$, se tiene el cono de vértice el origen: $3y^2+3z^2-12xz+6yz = 0$, es decir: $y^2+z^2-4xz+2yz = 0$. Para $\lambda = \frac{-1}{2}$, se tiene el cono: $3x^2+12xz-6yz-6z = 0$, es decir: $x^2+4xz-2yz-2z = 0$, cuyo vértice es $(0,-1,0)$, El plano tangente a las cuádricas en el origen, es $z = 0$. El primer cono $(\lambda = -2)$ es tangente al plano $z = 0$ a lo largo de OY. Como la raíz triple corresponde a este cono, su vértice $(0,0,0)$ es de retroceso en la cuártica, siendo su tangente doble el eje OX. La cuártica es, por tanto, cuspidal.

G 58- Dadas las cuádricas $x^2+3y^2+4z-4 = 0$, $x^2+5y^2-2z^2+4z-4 = 0$, hallar la naturaleza de la cuártica intersección de ambas.

Solución: El haz correspondiente es: $x^2+3y^2+4z-4+\lambda(x^2+5y^2-2z^2+4z-4) = 0$. La ecuación característica es $C(\lambda) = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3+5\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda & 2+2\lambda \\ 0 & 0 & 2+2\lambda & -4-4\lambda \end{vmatrix} = 4(\lambda+1)^2(\lambda-1)(3+5\lambda) = 0$. Para $\lambda = -1$ (raíz doble), se tiene $(y+z)(y-z) = 0$, dos planos, siendo la característica del determinante $C(-1)$, $k = 2$. Para $\lambda = 1$, se tiene el cono: $x^2+4y^2-(z-2)^2 = 0$. Para $\lambda = \frac{-3}{5}$, se tiene el cilindro: $x^2+3z^2+4z-4 = 0$. Para estos dos últimos valores de λ, la característica del determinante $C(\lambda)$ es

$k = 3$. Los dos planos, junto con el cono y el cilindro, definen las dos cónicas intersección de las dos cuádricas dadas.

G 59- Dadas las cuádricas $y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2x - 4 = 0$, $2x^2 - y^2 - z^2 + 2xy + 2xz - 6x + 4 = 0$, hallar la naturaleza de la cuártica intersección de ambas.

Solución: El haz: $y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2x - 4 + \lambda(2x^2 - y^2 - z^2 + 2xy + 2xz - 6x + 4) = 0$, pasa por las cuádricas dadas. La ecuación característica $C(\lambda) = \begin{vmatrix} 2\lambda & \lambda+1 & \lambda+1 & 1-3\lambda \\ \lambda+1 & -\lambda+1 & 0 & 0 \\ \lambda+1 & 0 & -\lambda+1 & 0 \\ 1-3\lambda & 0 & 0 & 4\lambda-4 \end{vmatrix} = 0$, tiene dos raíces dobles: 1 y -1. Para $\lambda = 1$, se tiene el cono: $(x-2)^2 - y^2 - z^2 = 0$. Para $\lambda = -1$, se tienen los dos planos: $x(x + 2y + 2z - 2) = 0$. Luego la cuártica se compone de una cónica contenida en el plano $x = 0$, y dos rectas que pasan por el punto $(2,0,0)$ y están contenidas en el plano $x + 2y + 2z - 2 = 0$.

G 60- Dadas las cuádricas $5x^2 - y^2 - z^2 + 2xz - 8x + 4 = 0$, $3x^2 + y^2 + z^2 + 2xz - 4 = 0$, hallar la naturaleza de la cuártica intersección de ambas.

Solución: El haz de cuádricas es: $5x^2 - y^2 - z^2 + 2xz - 8x + 4 + \lambda(3x^2 + y^2 + z^2 + 2xz - 4) = 0$. La ecuación característica $C(\lambda) = \begin{vmatrix} 5+3\lambda & 0 & 1+\lambda & -4 \\ 0 & -1+\lambda & 0 & 0 \\ 1+\lambda & 0 & -1+\lambda & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4-4\lambda \end{vmatrix} = -8(\lambda-1)^3(\lambda+1) = 0$, tiene una raíz triple. Para $\lambda = 1$, se tienen los planos: $x(2x + z - 2) = 0$. Para $\lambda = -1$, se tiene el cono: $(x-2)^2 - y^2 - z^2 = 0$. Luego la cuártica se compone de una circunferencia en el plano $x = 0$, y de una elipse en el plano $2x + z - 2 = 0$, siendo tangentes la circunferencia y la elipse.

G 61- Dadas las cuádricas $9x^2 + 8y^2 - 6yz - 18x = 0$, $9x^2 + 8y^2 + 6yz + 18x = 0$, hallar la naturaleza de la cuártica intersección de ambas.

Solución: El haz de cuádricas es: $9x^2 + 8y^2 - 6yz - 18x + \lambda(9x^2 + 8y^2 + 6yz + 18x) = 0$. La ecuación característica $C(\lambda) = \begin{vmatrix} 9+9\lambda & 0 & 0 & -9+9\lambda \\ 0 & 8+8\lambda & -3+3\lambda & 0 \\ 0 & -3+3\lambda & 0 & 0 \\ -9+9\lambda & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 729(\lambda-1)^4 = 0$, tiene una raíz cuádruple. Para este valor, $\lambda = 1$, se tienen dos planos imaginarios: $9x^2 + 8y^2 = 0$. Las dos cuádricas son hiperboloides de revolución, tangentes a lo largo del eje OZ, y además tienen comunes otras dos generatrices imaginarias en los dos planos imaginarios $3x \pm 2\sqrt{2}\,iy = 0$.

G 62- Dadas las cuádricas $2x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy - 4x + 2 = 0$, $x^2 + y^2 - z^2 - 4x + 2 = 0$, hallar la naturaleza de la cuártica intersección de ambas.

Solución: El haz de cuádricas es: $2x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy - 4x + 2 + \lambda(x^2 + y^2 - z^2 - 4x + 2) = 0$. La ecuación característica $C(\lambda) = \begin{vmatrix} 2+\lambda & -1 & 0 & -2-2\lambda \\ -1 & 2+\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ -2-2\lambda & 0 & 0 & 2+2\lambda \end{vmatrix} = 2(\lambda+1)^4 = 0$, tiene una raíz cuádruple, para la que se tiene un plano doble: $(x-y)^2 = 0$. Las dos cuádricas son tangentes al plano doble $x = y$, y no tienen otros puntos comunes que las dos generatrices dobles en las que este plano las corta.

G 63- Dada la esfera $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 8z = 0$, hallar: 1º) Planos tangentes paralelos al plano $2x + 3y + 4z = 0$. 2º) Cilindro circunscrito de generatrices paralelas a $x = y = z$. 3º) Centro y radio.

Solución: 1º) Homogeneizando la ecuación dada, se tiene: $f(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 - 4xt - 6yt - 8zt$, obteniéndose: $f'_x = 2x - 4t$, $f'_y = 2y - 6t$, $f'_z = 2z - 8t$, $f'_t = -4x - 6y - 8z$. Resolviendo el sistema: $\frac{2x-4t}{2} = \frac{2y-6t}{3} = \frac{2z-8t}{4}$, junto con la ecuación de la esfera, se tiene $(0,0,0,1)$ y $(4,6,8,1)$. Luego los planos paralelos al dado y que pasan por estos puntos, son: $2x + 3y + 4z = 0$, $2x + 3y + 4z - 58 = 0$. 2º) La dirección definida es $(1,1,1,0)$, para la que: $f(1,1,1,0) = 3$, $f'_x = 2$, $f'_y = 2$, $f'_z = 2$, $f'_t = -18$. La ecuación del cilindro circunscrito es: $(xf'_\alpha + yf'_\beta + zf'_\gamma + tf'_\delta)^2 - 4f(\alpha,\beta,\gamma,\delta)f(x,y,z,t) = 0$, es decir: $(2x + 2y + 2z - 18)^2 - 4 \cdot 3(x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 8z) = 0$. Operando y simplificando, se obtiene: $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz + 6x - 6z - 81 = 0$. 3º) Centro $(2,3,4)$. Radio $\sqrt{29}$.

G 64- Dados los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0.0.1)$, hallar: 1º) Esfera que pasa por dichos tres puntos y el origen. 2º) Esfera ortogonal a la anterior pasando por A, B y C. 3º) Recta polar de $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-1} = z$, en relación a la segunda esfera.

Solución: 1º) La ecuación de la esfera que pasa por el origen es: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz = 0$. Particularizándola para los tres puntos dados, se tiene la ecuación: $x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z = 0$, cuyo centro es $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y radio $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 2º) La ecuación de la esfera de centro (a,b,c) y radio R, es: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - R^2 = 0$. Particularizándola para los puntos A,B,C, se tiene: $a = b = c$, $R^2 = 3a^2 - 2a + 1$. La condición de ortogonalidad es: $3\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 = 3a^2 - 2a + 1 + \frac{3}{4}$, de donde se tiene que $a = -1$. Luego la ecuación de la esfera ortogonal es: $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 - 6 = 0$, o bien: $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z - 3 = 0$. 3º) Dos puntos de la recta dada son $(1,2,0,1),(4,1,1,1)$. Siendo: $f'_x = 2x + 2$, $f'_y = 2y + 2$, $f'_z = 2z + 2$, $f'_t = 2x + 2y + 2z - 6$, el plano polar de $(1,2,0,1)$ es: $4x + 6y + 2z = 0$, es decir: $2x + 3y + z = 0$. Y el de $(4,1,1,1)$ es: $10x + 4y + 4z + 6 = 0$, o bien: $5x + 2y + 2z + 3 = 0$. La recta polar pedida es: $2x + 3y + z = 0$, $5x + 2y + 2z + 3 = 0$.

G 65- Dada la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2ay - 2az + 2a^2 = 0$, se considera un plano tangente variable, que corta a los ejes OX, OY, OZ, en los puntos A, B, C, respectivamente. Por A, B y C se trazan planos paralelos a los planos YZ, XZ, XY. Hallar el lugar geométrico de los puntos de intersección de estos planos.

Solución: Sea el plano variable $mx + ny + pz - 1 = 0$, que por ser tangente a la esfera, dista a del centro (a,a,a), por lo que: $\frac{ma + na + pa - 1}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} = a$. Las coordenadas de los puntos de corte con los ejes, son: $A\left(\frac{1}{m},0,0\right)$, $B\left(0,\frac{1}{n},0\right)$, $C\left(0,0,\frac{1}{p}\right)$. La intersección de los tres planos, es: $\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n},\frac{1}{p}\right)$. Siendo (x,y,z) un punto del lugar, se tiene: $x = \frac{1}{m}$, $y = \frac{1}{n}$, $z = \frac{1}{p}$, es decir: $m = \frac{1}{x}$, $n = \frac{1}{y}$, $p = \frac{1}{z}$. Por tanto: $\frac{\frac{a}{x} + \frac{a}{y} + \frac{a}{z} - 1}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{y}\right)^2 + \left(\frac{1}{z}\right)^2}} = a$. Operando: $xyz - 2a(xy + xz + yz) + 2a^2(x + y + z) = 0$, que es la ecuación del lugar.

G 66- Un plano pasa por el punto (p,q,r) y corta a los ejes en los puntos A, B, C. Hallar el lugar geométrico de los centros de las esferas que pasan por el origen y por dichos tres puntos.

Solución: Sean $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$. La ecuación de las esferas que pasan por el origen, es: $x^2 + y^2 + z^2 + \lambda x + \mu y + \nu z = 0$. Por pasar por A,B,C, se tiene: $x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz = 0$, siendo el centro de la esfera $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$. El plano que pasa por A,B,C es: $bcx + acy + abz - abc = 0$. Como pasa por (p,q,r), se tiene: $bcp + acq + abr - abc = 0$. Sustituyendo en esta ecuación: $a = 2x$, $b = 2y$, $c = 2z$, se tiene el lugar pedido: $2xyz - -rxy - qxz - pyz = 0$.

G 67- Se dan dos esferas fijas $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax + b$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2cx + d$. Demostrar que las esferas que cortan a ambas según arcos de círculo máximo pasan por dos puntos fijos. Hallarlos para $a = b = 1$, $c = d = 2$.

Solución: Las esferas dadas tienen de centro y radio, respectivamente: $(a,0,0)$, $r_1^2 = a^2+b$, y $(c,0,0)$, $r_2^2 = c^2+d$. Las esferas variables son: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2-R^2=0$. Siendo d_1 la distancia de (α,β,γ) a $(a,0,0)$, se tiene: $d_1^2 = R^2-r_1^2 = (\alpha-a)^2+\beta^2+\gamma^2 = R^2-a^2-b$. Análogamente, siendo d_2 la distancia de (α,β,γ) a $(c,0,0)$, se tiene: $d_2^2 = R^2-r_2^2 = (\alpha-c)^2+\beta^2+\gamma^2 = R^2-c^2-d$. Restando ambas ecuaciones, se tiene que: $\alpha = \frac{2a^2+b-2c^2-d}{2(a-c)}$. Siendo: $R^2 = (\alpha-a)^2+\beta^2+\gamma^2+a^2+b$, la ecuación de las esferas variables queda como sigue: $x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z+2a\alpha-2a^2-b=0$. Esta ecuación depende de β y γ, pues α es fija según la igualdad anterior. Para que no dependa de β y γ, ha de ser: $y=z=0$, quedando la ecuación: $x^2-2\alpha x+2a\alpha-2a^2-b=0$ Esta ecuación tiene dos raíces: $x=\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+2a^2+b-2a\alpha}$. Luego queda demostrado que las esferas pasan por dos puntos fijos $\left(\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+2a^2+b-2a\alpha},0,0\right)$. Para el caso: $a=b=1$, $c=d=2$, $\alpha=\frac{7}{2}$, los puntos fijos son: $\left(\frac{7\pm\sqrt{33}}{2},0,0\right)$

G 68- Dado el círculo de ecuaciones $x^2+y^2+z^2=4$, $x+2y-3z=1$, hallar las coordenadas de su centro y el radio.

Solución: El centro de la esfera es $(0,0,0)$. La perpendicular desde el centro al plano, es: $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-3}$, que corta al plano en $\left(\frac{1}{14},\frac{1}{7},\frac{-3}{14}\right)$, que son las coordenadas del centro del círculo. Un punto de la intersección de la esfera con el plano, es $\left(\frac{1+2\sqrt{19}}{5},\frac{2-\sqrt{19}}{5},0\right)$. El radio viene dado por la distancia de este punto al centro: $\sqrt{\left(\frac{1+2\sqrt{19}}{5}-\frac{1}{14}\right)^2+\left(\frac{2-\sqrt{19}}{5}-\frac{1}{7}\right)^2+\left(\frac{3}{14}\right)^2} = \frac{\sqrt{770}}{14}$.

G 69- Hallar la ecuación general de las esferas tangentes a los ejes *OX* y *OY*, y al plano $x+y=3$. Hallar el lugar geométrico de sus centros.

Solución: Sea la esfera: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2-R^2=0$. Por ser tangente a *OX*, se tiene: $R^2=\beta^2+\gamma^2$. Por serlo a *OY*, se tiene: $R^2=\alpha^2+\gamma^2$. Luego $\alpha^2=\beta^2$, de donde $\alpha=\pm\beta$. 1º) Para $\alpha=\beta$, el centro es (β,β,γ). Las ecuaciones de la perpendicular al plano trazada por el centro, son: $\frac{x-\beta}{1}=\frac{y-\beta}{1}=\frac{z-\gamma}{0}$, siendo la intersección con el plano el punto: $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\gamma\right)$. Como la distancia del centro a este punto es R, se tiene que: $2\left(\beta-\frac{3}{2}\right)^2=\beta^2+\gamma^2$. Por tanto, el lugar del centro de las esferas es: $x=y$, $2y^2-2z^2-12y+9=0$, y la ecuación general de las esferas es: $x^2+y^2+z^2-2\beta x-2\beta y\pm$ $\pm2\sqrt{\beta^2-6\beta+\frac{9}{2}}\,z+\beta^2=0$. 2º) Para $\alpha=-\beta$, el centro es $(-\beta,\beta,\gamma)$. Las ecuaciones de la recta perpendicular al plano trazada por el centro, son: $\frac{x+\beta}{1}=\frac{y-\beta}{1}=\frac{z-\gamma}{0}$, siendo la intersección con el plano el punto: $\left[\left(\frac{3}{2}-\beta\right),\left(\frac{3}{2}+\beta\right),\gamma\right]$. Como la distancia del centro a este punto es R, se tiene que: $\left(\frac{3}{2}-\beta+\beta\right)^2+\left(\frac{3}{2}+\beta-\beta\right)^2=\beta^2+\gamma^2$. Por tanto, la ecuación del lugar geométrico del centro de las esferas en este caso, es: $x=-y$, $y^2+z^2-\frac{9}{2}=0$, siendo la ecuación general de las esferas la siguiente: $x^2+y^2+z^2-2\beta x-2\beta y\pm2\sqrt{\frac{9}{2}-\beta^2}\,z+\beta^2=0$

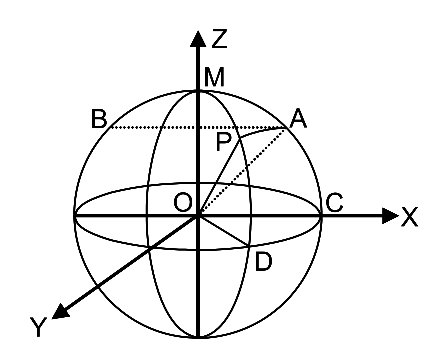
G 70- Hallar el centro de una esfera de radio 7, que pasa por los puntos $(2,4,-4)$ y $(3,-1,-4)$, y es tangente al plano $3x-6y+2z+51=0$.

Solución: Sea la ecuación de la esfera: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=49$. Por pasar por los puntos dados: $(2-a)^2+(4-b)^2+(-4-c)^2=49$, $(3-a)^2+(-1-b)^2+(-4-c)^2=49$. Restando las dos ecuaciones, se tiene: $a=5b-5$. Además, $\frac{3a-6b+2c+51}{\sqrt{9+36+4}}=7$, es decir: $3a-6b+2c+51=49$, de donde: $c=\frac{13-9b}{2}$. Aplicando estos valores en una de las ecuaciones particularizadas de la esfera, se tiene: $b=\frac{69\pm\sqrt{1024}}{37}$, obteniéndose dos soluciones: $(0,1,2)$, $\left(\frac{320}{37},\frac{101}{37},\frac{-214}{37}\right)$.

G 71- En una esfera de radio R se marcan los puntos A y B simétricos respecto al eje Z (los ejes coordenados pasan por su centro), situados en la circunferencia intersección con el plano XZ, siendo $2c$ el arco AMB de esta circunferencia. Se desea obtener la curva lugar geométrico de los puntos P situados en la esfera que cumplen con la condición de que arco PA +arco $PB=2a$, medidos estos arcos sobre círculos máximos.

Obtener la proyección del lugar sobre el plano XZ.

Solución:



Sean λ y φ las coordenadas geográficas de P, es decir: $\lambda = \widehat{COD}$, $\varphi = \widehat{DOP}$. Y sea M la intersección de OZ con la esfera. En el triángulo esférico AMP (sus lados son arcos de círculo máximo) se tiene: $\cos(\text{arco } PA) = \cos AM \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \sin AM \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \cdot \cos\lambda$. Teniendo en cuenta que: arco $AM = c$, se tiene: $\cos(\text{arco } PA) = \cos c \cdot \sin\varphi + \sin c \cdot \cos\varphi \cdot \cos\lambda$. Análogamente en el triángulo BMP (en la figura no se ha dibujado el arco PB): $\cos(\text{arco } PB) = \cos c \cdot \sin\varphi - \sin c \cdot \cos\varphi \cdot \cos\lambda$. Sumando y restando las dos igualdades, transformando los primeros miembros en productos, y teniendo en cuenta que: arco $PA +$arco $PB = 2a$, se obtiene la siguiente igualdad: $\cos\left(\text{arco } PA\right) + \cos\left(\text{arco } PB\right) = 2\cos c \cdot \sin\varphi =$ $= 2\cos\dfrac{\text{arco } PA + \text{arco } PB}{2} \cdot \cos\dfrac{\text{arco } PA - \text{arco } PB}{2}$. Luego se tiene: $\cos a \cdot \cos\dfrac{\text{arco } PA - \text{arco } PB}{2} =$ $= \cos c \cdot \sin\varphi$. Análogamente se obtiene la siguiente igualdad: $\cos\left(\text{arco } PA\right) - \cos\left(\text{arco } PB\right) =$ $= 2\sin c \cdot \cos\varphi \cdot \cos\lambda = -2\sin\dfrac{\text{arco } PA + \text{arco } PB}{2} \cdot \sin\dfrac{\text{arco } PA - \text{arco } PB}{2}$. De donde se obtiene que: $\sin a \cdot \sin\dfrac{\text{arco } PA - \text{arco } PB}{2} = -\sin c \cdot \cos\varphi \cdot \cos\lambda$. Elevando al cuadrado y sumando, se obtiene que: $\left(\dfrac{\cos c \cdot \sin\varphi}{\cos a}\right)^2 + \left(\dfrac{\sin c \cdot \cos\varphi \cdot \cos\lambda}{\cos a}\right)^2 = 1$, que es la ecuación del lugar en coordenadas esféricas. Pasando a cartesianas, como: $\sin\varphi = \dfrac{z}{R}$, $x = R\cos\varphi \cdot \cos\lambda$, se tiene: $\dfrac{\cos^2 c \cdot z^2}{\cos^2 a} + \dfrac{\sin^2 c \cdot x^2}{\sin^2 a} = R^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, que son las ecuaciones de una elipse esférica. La proyección sobre el plano XZ es: $\dfrac{\sin^2 c}{\sin^2 a}x^2 + \dfrac{\cos^2 c}{\cos^2 a}z^2 = R^2$.

G 72- Se considera la cúbica $x = \dfrac{1}{t-a}$, $y = \dfrac{1}{t-b}$, $z = \dfrac{1}{t-c}$. Un plano cualquiera la encuentra en tres puntos. Se considera el círculo que pasa por ellos. Hallar el lugar geométrico engendrado por este círculo cuando el plano se desplaza paralelamente a sí mismo.

Solución: Sea el plano: $ux + vy + wz + r = 0$. Este plano encuentra a la curva en tres puntos, cuyos valores de t son raíces de la ecuación $f(t) = \dfrac{u}{t-a} + \dfrac{v}{t-b} + \dfrac{w}{t-c} + r = 0$. Se considera una esfera que pasa por estos tres puntos. Su ecuación tendrá la forma: $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$. Esta esfera encuentra a la curva dada en seis puntos, cuyos valores de t son raíces de la ecuación $F(t) = \dfrac{1}{(t-a)^2} + \dfrac{1}{(t-b)^2} + \dfrac{1}{(t-c)^2} + \dfrac{A}{t-a} + \dfrac{B}{t-b} + \dfrac{C}{t-c} + D = 0$. Tres de estos seis valores, son raíces de $f(t)$. Luego $F(t) \equiv \left(\dfrac{u}{t-a} + \dfrac{v}{t-b} + \dfrac{w}{t-c} + r\right)\left(\dfrac{1}{u(t-a)} + \dfrac{1}{v(t-b)} + \dfrac{1}{w(t-c)} + \lambda\right) = 0$. Identificando esta ecuación con la anterior, se obtiene: $A = \dfrac{r}{u} + \lambda u$, $B = \dfrac{r}{v} + \lambda v$, $C = \dfrac{r}{w} + \lambda w$, $D = r\lambda$, siendo $r = -ux - vy - wz$. Luego, introduciendo estos valores en la ecuación de la esfera, se tiene que: $x^2 + y^2 + z^2 - \dfrac{ux + vy + wz}{u}x - \dfrac{ux + vy + wz}{v}y - \dfrac{ux + vy + wz}{w}z + \lambda(ux + vy + wz + r) = 0$. Como $ux + vy + wz + r = 0$, se tiene la ecuación del lugar: $xy(-\frac{v}{u} - \frac{u}{v}) + xz(-\frac{w}{u} - \frac{u}{w}) + +yz(-\frac{w}{v} - \frac{v}{w}) = 0$, es decir: $\dfrac{u^2 + v^2}{uv}xy + \dfrac{u^2 + w^2}{uw}xz + \dfrac{v^2 + w^2}{vw}yz = 0$, que es una cuádrica.

G 73- Hallar el lugar geométrico de los centros de las esferas de radio nulo bitangentes a un elipsoide.

Solución: La ecuación del haz de cuádricas que pasan por la cuártica intersección de dos cuádricas dadas: $f = 0$, $g = 0$, es: $f + \lambda g = 0$. Para que estas cuádricas sean bitangentes a las cuádricas dadas, es necesario y suficiente que exista un valor de λ para el que $f + \lambda g = 0$ represente dos planos, es decir, que se verifiquen que los cuatro planos siguientes: $f'_x + \lambda f'_x = 0$, $f'_y + \lambda f'_y = 0$, $f'_z + \lambda f'_z = 0$, $f'_t + \lambda f'_t = 0$, pasen

por una misma recta, o bien, que haya una infinidad de puntos dobles en línea recta. Siendo $f \equiv (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2 = 0$, $g \equiv \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1 = 0$, el haz de cuádricas que pasan por f y g, es: $\varphi = (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right) = 0$. Como los tres planos: $\varphi'_x = 0$, $\varphi'_y = 0$, $\varphi'_z = 0$, han de pasar por una recta, uno de ellos he de ser idénticamente nulo. Para $\varphi'_x \equiv 0$, es decir, para: $2(x-\alpha)+2\lambda\frac{x}{a^2} \equiv 0$, se ha de tener: $\frac{\lambda}{a^2}+1 = 0$, $\alpha = 0$, obteniéndose la cónica: $\frac{\beta^2}{b^2-a^2}+\frac{\gamma^2}{c^2-a^2}-1 = 0$, $\alpha = 0$. Análogamente, para $\varphi'_y \equiv 0$, se tiene: $\frac{\alpha^2}{a^2-b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2-b^2}-1 = 0$, $\beta = 0$. Y para $\varphi'_z \equiv 0$, se tiene: $\frac{\alpha^2}{a^2-c^2}+\frac{\beta^2}{b^2-c^2}-1 = 0$, $\gamma = 0$. El lugar pedido se compone de tres cónicas (elipse imaginaria, hipérbola, elipse real). Están situadas en los planos principales del elipsoide y tienen los mismos focos que las cónicas principales situadas en estos planos. Las cónicas halladas, llamadas focales de la cuádrica, constituyen también el lugar geométrico de los vértices de los conos de revolución circunscritos a la cuádrica.

G 74- Se dan tres ejes rectangulares y la recta $x = a$, $y = b$. Desde un punto M de ella se bajan las perpendiculares sobre los planos coordenados y se considera el círculo que pasa por los pies de estas perpendiculares. Hallar la superficie engendrada por este círculo, cuando M describe la recta dada.

Solución: Sea $M(a,b,\lambda)$ y sus proyecciones $A(a,b,0), B(a,0,\lambda), C(0,b,\lambda)$. La ecuación del plano ABC es: $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a & b & 0 & 1 \\ a & o & \lambda & 1 \\ 0 & b & \lambda & 1 \end{vmatrix} = b\lambda x+a\lambda y+abz-2ab\lambda = 0$, de donde: $\lambda = \frac{abz}{2ab-bx-ay}$. La ecuación de la esfera que pasa por A,B,C,M, es: $\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ a^2+b^2 & a & b & 0 & 1 \\ a^2+\lambda^2 & a & 0 & \lambda & 1 \\ b^2+\lambda^2 & 0 & b & \lambda & 1 \\ a^2+b^2+\lambda^2 & a & b & \lambda & 1 \end{vmatrix} = x^2+y^2+z^2-ax-by-\lambda z = 0$, de donde: $\lambda = \frac{x^2+y^2+z^2-ax-by}{z}$. Luego, $\frac{abz}{2ab-bx-ay} = \frac{x^2+y^2+z^2-ax-by}{z}$. La ecuación de la superficie engendrada por M, es: $(x^2+y^2+z^2-ax-by)(2ab-bx-ay)-abz^2 = 0$.

G 75- Dado el cono $\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C} = 0$, hallar el lugar geométrico de los centros de las esferas de radio nulo bitangentes a dicho cono.

Solución: Siendo: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2 = 0$, la ecuación de las esferas de radio nulo, el haz de cuádricas es: $\varphi = (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2+\lambda\left(\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}\right) = 0$. Para $\varphi'_x \equiv 0$ (ver más arriba el problema G 73), se tiene: $\frac{\beta^2}{B-A}+\frac{\gamma^2}{C-A} = 0$, $\alpha = 0$. Para $\varphi'_y \equiv 0$, se tiene: $\frac{\alpha^2}{A-B}+\frac{\gamma^2}{C-B} = 0$, $\beta = 0$. Y para $\varphi'_z \equiv 0$, se tiene: $\frac{\alpha^2}{A-C}+\frac{\beta^2}{B-C} = 0$, $\gamma = 0$.

G 76- Hallar la ecuación de la superficie polar recíproca de la esfera $S \equiv x^2+y^2+z^2-2x = 0$, respecto a la esfera $\Sigma \equiv x^2+y^2+z^2-1 = 0$.

Solución: Sea $P(\alpha,\beta,\gamma)$ un punto de S. El plano tangente en P a S, es: $(\alpha-1)x+\beta y+\gamma z-\alpha = 0$. El plano polar de un punto cualquiera $M(\lambda,\mu,\nu)$ respecto a la esfera Σ, es: $\lambda x+\mu y+\nu z-1 = 0$. Identificando ambas ecuaciones, se tienen las igualdades: $\frac{\alpha-1}{\lambda} = \frac{\beta}{\mu} = \frac{\gamma}{\nu} = \frac{-\alpha}{-1}$, de donde: $\alpha = \frac{1}{1-\lambda}$, $\beta = \alpha\mu = \frac{\mu}{1-\lambda}$, $\gamma = \alpha\nu = \frac{\nu}{1-\lambda}$. Como el punto P está en la esfera S, se tiene que: $\frac{1}{(1-\lambda)^2}+\frac{\mu^2}{(1-\lambda)^2}+\frac{\nu^2}{(1-\lambda)^2}-\frac{2}{1-\lambda} = 0$, es decir, operando y sustituyendo (λ,μ,ν) por (x,y,z): $1+y^2+z^2-2(1-x) = 0$. Se trata del paraboloide elíptico: $y^2+z^2+2x-1 = 0$.

G 77- Hallar la superficie podaria del elipsoide canónico respecto a su centro.

Solución: El punto $P(\alpha,\beta,\gamma)$ del elipsoide, verifica la ecuación: $\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}-1=0$. El plano tangente en P, es: $\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\gamma z}{c^2}-1=0$. La perpendicular trazada desde el origen a este plano, es: $\frac{a^2x}{\alpha}=\frac{b^2y}{\beta}=\frac{c^2z}{\gamma}$. Luego: $\alpha=\frac{a^2\gamma x}{c^2z}$, $\beta=\frac{b^2\gamma y}{c^2z}$, $\frac{\gamma x^2}{c^2z}+\frac{\gamma y^2}{c^2z}+\frac{\gamma z^2}{c^2z}-1=0$, $\gamma=\frac{c^2z}{x^2+y^2+z^2}$. Por tanto: $\frac{a^2\gamma^2x^2}{c^4z^2}+\frac{b^2\gamma^2y^2}{c^4z^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}-1=0$, $\gamma^2(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)=c^4z^2$. La ecuación de la superficia podaria, es: $a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2-(x^2+y^2+z^2)^2=0$.

G 78- Hallar la envolvente de los planos que pasan por los extremos de tres semidiámetros conjugados de un elipsoide.

Solución: Sea el elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, al que se le aplica la afinidad definida por: $\frac{x}{a}=X$, $\frac{y}{b}=Y$, $\frac{z}{c}=Z$, transformándose en la esfera: $X^2+Y^2+Z^2=1$. En esta esfera, la envolvente de los planos que pasan por los extremos de tres diámetros conjugados es la esfera concéntrica: $X^2+Y^2+Z^2=\frac{1}{3}$. Deshaciendo la transformación, se tiene como solución el elipsoide, concéntrico con el dado: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{1}{3}$.

G 79- 1º) Demostrar que en un elipsoide la suma de los cuadrados de tres semidiámetros conjugados es constante. 2º) Demostrar que el volumen del paralelepípedo construido sobre tres semidiámetros conjugados es constante. 3º) Hallar el lugar geométrico de los extremos de los semidiámetros conjugados iguales entre sí.

Solución: 1º) Sea: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, la ecuación del elipsoide referida a sus ejes. Se consideran tres semidiámetros conjugados: a',b',c'. Tomándolos como nuevos ejes coordenados, la ecuación del elipsoide es: $\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}+\frac{z'^2}{c'^2}=1$. Y por tanto: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}+\frac{z'^2}{c'^2}$. Se considera la cuádrica: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\lambda(x^2+y^2+z^2)=0$. Tomando como ejes coordenados los formados por los tres diámetros conjugados, y siendo α,β,γ, los ángulos que forman entre sí estos diámetros, la ecuación de esta cuádrica es: $\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}+\frac{z'^2}{c'^2}+\lambda\left(x'^2+y'^2+z'^2+2y'z'\cos\alpha+2x'z'\cos\beta+2x'y'\cos\gamma\right)=0$.

Obligando a que la cuádrica degenere en cada uno de los dos sistemas de ejes coordenados, se obtendrán los mismos valores del parámetro λ. En el sistema formado por los ejes del elipsoide, los valores de λ vienen dados por la ecuación: $\begin{vmatrix}\frac{1}{a^2}+\lambda & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{b^2}+\lambda & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2}+\lambda\end{vmatrix}=0$, de donde operando, se obtiene: $\lambda^3+\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\lambda^2+\left(\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2c^2}+\frac{1}{b^2c^2}\right)\lambda+\frac{1}{a^2b^2c^2}=0$. Y en el sistema formado por los tres diámetros conjugados, la ecuación es: $\begin{vmatrix}\frac{1}{a'^2}+\lambda & \lambda\cos\gamma & \lambda\cos\beta\\ \lambda\cos\gamma & \frac{1}{b'^2}+\lambda & \lambda\cos\alpha\\ \lambda\cos\beta & \lambda\cos\alpha & \frac{1}{c'^2}+\lambda\end{vmatrix}=0$, de donde operando: $2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\lambda^3+\left(\frac{\sin^2\alpha}{a'^2}+\frac{\sin^2\beta}{b'^2}+\frac{\sin^2\gamma}{c'^2}\right)\lambda^2+\left(\frac{1}{a'^2b'^2}+\frac{1}{a'^2c'^2}+\frac{1}{b'^2c'^2}\right)\lambda+\frac{1}{a'^2b'^2c'^2}=0$.

Por tanto, identificando los coeficientes de estas dos ecuaciones, se obtienen las igualdades:

$$\frac{1}{2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} = \frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}{\frac{\sin^2\alpha}{a'^2}+\frac{\sin^2\beta}{b'^2}+\frac{\sin^2\gamma}{c'^2}} = \frac{\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2c^2}+\frac{1}{b^2c^2}}{\frac{1}{a'^2b'^2}+\frac{1}{a'^2c'^2}+\frac{1}{b'^2c'^2}} = \frac{\frac{1}{a^2b^2c^2}}{\frac{1}{a'^2b'^2c'^2}}.$$ Operando, se obtienen las fórmulas de Apolonio: $a^2b^2c^2 = 2a'^2b'^2c'^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$, $a^2+b^2+c^2 = a'^2+b'^2+c'^2$, con lo que queda demostrado el primer punto del enunciado. 2º) Como el volumen del paralelepípedo es: $V = abc = a'b'c'\sqrt{2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} = V'$, queda demostrado el segundo. 3º) Siendo $a' = b' = c' = \rho$, se tiene que $\rho^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$, por lo que los extremos de estos semidiámetros se encuentran en la esfera: $x^2+y^2+z^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$ y en el elipsoide. Las ecuaciones del lugar pedido son: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$, $x^2+y^2+z^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$.

G 80- Hallar una ecuación que tenga por raíces las magnitudes de los semiejes de la sección producida en el elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$, por el plano $Ax+By+Cz = 0$. Hallar el área de la sección.

Solución: Sea $f = x^2+y^2+z^2$, la ecuación que determina el cuadrado de la longitud de un semieje. Se constituye la función: $F = x^2+y^2+z^2+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)+\mu(Ax+By+Cz) = 0$. Se obtiene que: $F'_x = 2x+\frac{2\lambda x}{a^2}+\mu A = 0$, y sus análogas F'_y y F'_z. Por tanto, se tiene que: $xF'_x+yF'_y+zF'_z =$ $= 2(x^2+y^2+z^2)+2\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)+\mu(Ax+By+Cz) = 2f+2\lambda = 0$, de donde $\lambda = -f$. Por tanto: $F'_x = 2x+\frac{2\lambda x}{a^2}+\mu A = 2x\left(1-\frac{f}{a^2}\right)+\mu A = 0$, de donde: $Ax = \frac{-\mu A^2}{1-\frac{f}{a^2}}$, y sus análogas. Luego: $Ax+By+Cz = \frac{-\mu A^2}{1-\frac{f}{a^2}}+\frac{-\mu B^2}{1-\frac{f}{b^2}}+\frac{-\mu C^2}{1-\frac{f}{a^2}} = 0$. Es decir: $\frac{a^2A^2}{a^2-f}+\frac{b^2B^2}{b^2-f}+\frac{c^2C^2}{c^2-f} = 0$. Haciendo la sustitución: $f = x^2+y^2+z^2 = \rho^2$, se tiene la ecuación en ρ que da las magnitudes de los semiejes: $\frac{a^2A^2}{a^2-\rho^2}+\frac{b^2B^2}{b^2-\rho^2}+\frac{c^2C^2}{c^2-\rho^2} = 0$. Desarrollando esta ecuación, se obtiene: $\rho^4(a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2)-$ $-\rho^2[a^2A^2(b^2+c^2)+b^2B^2(a^2+c^2)+c^2C^2(a^2+b^2)]+a^2b^2c^2(A^2+B^2+C^2) = 0$. De esta ecuación se obtiene que el producto de los semiejes es: $\sqrt{\frac{a^2b^2c^2(A^2+B^2+C^2)}{a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2}}$, por lo que el área de la elipse es: $S = \pi abc\sqrt{\frac{A^2+B^2+C^2}{a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2}}$.

G 81- Un elipsoide de revolución E' de magnitud constante, se desplaza sin deformarse y sin dejar de cortar a un elipsoide dado E, según un círculo. Hallar el lugar geométrico del centro del elipsoide E'.

Solución: Sea $E \equiv x^2+y^2-r^2+az^2-2bxz = 0$, tal que los planos $z-k = 0$ son cíclicos. Sea $E' \equiv (x-\alpha)^2+y^2+a'(z-\gamma)^2-r'^2 = 0$, cuyos planos cíclicos son también de la forma $z-k = 0$, siendo su centro $(\alpha,0,\gamma)$. Para que ambos elipsoides se corten según un círculo, es preciso que en el haz que definen, haya un par de planos que determinen una cuádrica degenerada de la forma $(z-k)(Ax+By+Cz+D) = 0$. Es decir: $(x-\alpha)^2+y^2+a'(z-\gamma)^2-r'^2+\lambda(x^2+y^2-r^2+az^2-2bxz) \equiv$ $\equiv (z-k)(Ax+By+Cz+D)$. De donde: $\lambda = -1$, $a' = a+C$, $2b = A$, $-2a'\gamma = D-kC$, $-2\alpha = -kA$, $\alpha^2+a'\gamma^2-r'^2+r^2 = -kD$, $B = 0$. Eliminando entre estas igualdades los valores de k, A, C, D, y sustituyendo α,γ por x,z, se tienen las ecuaciones del lugar geométrico pedido, que corresponden a la hipérbola: $y = 0$, $x^2(a'+b^2-a)-2a'bxz+a'b^2z^2+b^2(r^2-r'^2) = 0$.

G 82- Desde un punto P se trazan las normales a un elipsoide dado. 1º) Demostrar que se puede hacer pasar por los pies de estas normales, una infinidad de cuádricas concéntricas con el elipsoide. 2º) Hallar el lugar geométrico de P para que dichas cuádricas sean de revolución.

Solución: 1º) Sea el elipsoide dado $E \equiv \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1 = 0$, y sea $P(\alpha,\beta,\gamma)$. Los pies de las normales trazadas desde P, son los puntos de encuentro de E con la cúbica: $\frac{\alpha-x}{\frac{x}{a^2}} = \frac{\beta-y}{\frac{y}{b^2}} = \frac{\gamma-z}{\frac{z}{c^2}}$. Las ecuaciones de los tres cilindros, A, B, C, que proyectan la cúbica sobre los planos coordenados, son:

A: $(b^2-c^2)yz+c^2\gamma y-b^2\beta z=0$, B: $(c^2-a^2)zx+a^2\alpha z-c^2\gamma x=0$, C: $(a^2-b^2)xy+b^2\beta x-a^2\alpha y=0$. Las cuádricas que pasan por E, A, B y C, son: $F=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1+\lambda[(b^2-c^2)yz+c^2\gamma y-b^2\beta z]+$ $+\mu[(c^2-a^2)zx+a^2\alpha z-c^2\gamma x]+\nu[(a^2-b^2)xy+b^2\beta x-a^2\alpha y]=0$. Para que su centro sea $(0,0,0)$, ha de verificarse que el sistema: $F'_x=0$, $F'_y=0$, $F'_z=0$, ha de admitir dicha raíz. Luego: $\nu b^2\beta-\mu c^2\gamma=0$, $\lambda c^2\gamma-\nu a^2\alpha=0$, $\mu a^2\alpha-\lambda b^2\beta=0$, de donde: $\mu=\frac{b^2\beta}{a^2\alpha}\lambda$, $\nu=\frac{c^2\gamma}{a^2\alpha}$. Introduciendo estos valores en F, se obtiene la siguiente ecuación en función del parámetro λ, con lo que queda demostrado el primer punto del enunciado: $F=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1+2\lambda a^2\alpha(b^2-c^2)yz+2\lambda b^2\beta(c^2-a^2)zx+2\lambda c^2\gamma(a^2-b^2)xy=0$. 2º) Para que la cuádrica F sea de revolución, el lugar de P es un cono de cuarto grado, cuya ecuación es: $\frac{y^2z^2}{a^2(b^2-c^2)}+\frac{z^2x^2}{b^2(c^2-a^2)}+\frac{x^2y^2}{c^2(a^2-b^2)}=0$.

G 83- Dados un elipsoide E y un plano P que pasa por su centro. Se pide: 1º) Hallar el lugar geométrico del vértice V del cono circunscrito a E, y que corta a P según un círculo C. 2º) Demostrar que este lugar se compone de dos cónicas que se cortan en dos puntos. 3º) Hallar la ecuación del haz de cuádricas Q que pasan por dichas dos cónicas. 4º) Halla el lugar geométrico de los vértices de Q si P es un plano principal de E.

Solución: 1º) Sea la ecuación del plano P: $z=0$. Sobre él se toman como ejes XX', YY', los ejes de la elipse sección, y como eje ZZ' el diámetro de E conjugado con P. La ecuación de E, es: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$. La ecuación del cono circunscrito a E, con vértice $V(\alpha,\beta,\gamma)$, es: $\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\gamma z}{c^2}-1\right)^2-\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}-1\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)=0$. Cortando por $z=0$, se tiene: $\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-1\right)^2-\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}-1\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)=0$, que ha de ser un círculo. Desarrollando esta ecuación, se tiene: $\left(-\frac{\beta^2}{b^2a^2}-\frac{\gamma^2}{a^2c^2}+\frac{1}{a^2}\right)x^2+\left(-\frac{\alpha^2}{a^2b^2}-\frac{\gamma^2}{b^2c^2}+\frac{1}{b^2}\right)y^2+$ $+\frac{2\alpha\beta}{a^2b^2}xy-\frac{2\alpha}{a^2}x-\frac{2\beta}{b^2}y+\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}=0$. Igualando los coeficientes de x^2 e y^2, anulando el de xy, y cambiando α, β, γ por x, y, z, se tiene la ecuación del lugar pedido: $-\frac{y^2}{b^2a^2}-\frac{z^2}{a^2c^2}+\frac{1}{a^2}=$ $=-\frac{x^2}{a^2b^2}-\frac{z^2}{b^2c^2}+\frac{1}{b^2}$, $xy=0$. 2º) Para $x=0$, operando, se tiene la ecuación de la cónica: $\Gamma_1\equiv\frac{y^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$, $x=0$. Para $y=0$, se tiene la cónica: $\Gamma_2\equiv\frac{x^2}{a^2-b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$, $y=0$. Ambas cónicas pasan por los puntos $(0,0,\pm c)$. 3º) La ecuación del haz de cuádricas que pasan por Γ_1, es: $\frac{y^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1+x(\lambda x+\mu y+\nu z+\rho)=0$. Cortando por $y=0$, se tiene la ecuación de la cónica: $\frac{-z^2}{c^2}+1+x(\lambda x+\nu z+\rho)=0$. Identificando esta ecuación con la de la cónica Γ_2, se tiene que: $\frac{\lambda}{1/(a^2-b^2)}=\frac{-1/c^2}{1/c^2}=\frac{\nu}{0}=\frac{\rho}{0}=\frac{1}{-1}$. De donde: $\nu=\rho=0$, $\lambda=\frac{-1}{a^2-b^2}$. Introduciendo estos valores en la ecuación de Q, se tiene que $Q\equiv\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{y^2}{a^2-b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\mu xy-1=0$. 4º) Siendo el plano $z=0$, plano principal, el eje es: $x=0$, $y=0$, que corta a Q en los vértices $(0,0,\pm c)$. Los otros vértices están situados en el plano $z=0$, que corta al haz de cuádricas Q según la cónica: $x^2-y^2+\mu(a^2-b^2)xy-a^2+b^2=0$, cuyo centro es el origen. La ecuación de los coeficientes angulares de sus ejes, es: $a_{12}m^2+(a_{11}-a_{22})m-a_{12}=0$. Luego, $\frac{\mu(a^2-b^2)}{2}m^2+2m-\frac{\mu(a^2-b^2)}{2}=0$, $\mu=\frac{4m}{(a^2-b^2)(1-m^2)}$. Como, $m=\frac{y}{x}$, $\mu=\frac{4xy}{(a^2-b^2)(x^2-y^2)}$. Introduciendo este valor en la ecuación de la cónica, se tiene que: $\frac{4xy}{(a^2-b^2)(x^2-y^2)}=\frac{a^2-b^2-x^2+y^2}{(a^2-b^2)xy}$. Operando, se obtiene la ecuación de la lemniscata: $(x^2+y^2)^2-(a^2-b^2)(x^2-y^2)=0$, $z=0$.

G 84- Obtener las generatrices rectilíneas de la cuádrica $xy - xz - z = 0$.

Solución: Sea la recta de ecuaciones: $x = az + b$, $y = cz + d$. Sustituyendo estos valores en la ecuación dada: $(az+b)(cz+d) - (az+b)z - z = (ac-a)z^2 + (ad+bc-b-1)z + bd \equiv 0$. De donde se obtiene: $a(c-1) = 0$, $ad + bc - b - 1 = 0$, $bd = 0$. Para $b = 0$, $c = 1$, $d = \frac{1}{a}$. Para $d = 0$, $a = 0$, $c = \frac{b+1}{b}$. Luego las generatrices son: $x = az, y = z + \frac{1}{a}$; $x = b, y = \frac{b+1}{b}z$.

G 85- Obtener la ecuación del hiperboloide engendrado por una recta que se apoya en las directrices $D_1 \equiv x = z, y = -2z+1$, $D_2 \equiv x = -z+1, y = z-1$, $D_3 \equiv x = 2z-1, y = -x+1$.

Solución: Las ecuaciones de los planos que contienen las rectas D_1 y D_2, son, respectivamente: $x - z + \lambda(y + 2z - 1) = 0$, $x + z - 1 + \mu(y - z + 1) = 0$. Eliminando λ y μ entre estas dos ecuaciones y las ecuaciones de D_3, se tiene: $x = \frac{2\mu - \lambda}{\lambda + 2\mu - 2}$, $y = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 2\mu - 2}$, $z = \frac{2\mu - 1}{\lambda + 2\mu - 2}$. Sustituyendo estos valores en la ecuación del primer plano, por ejemplo, se tiene: $2\lambda\mu - 2\lambda + 1 = 0$. Como $\lambda = \frac{-x+z}{y+2z-1}$, $\mu = \frac{-x-z+1}{y-z+1}$, la ecuación de la cuádrica es: $2 \cdot \frac{-x+z}{y+2z-1} \cdot \frac{-x-z+1}{y-z+1} - 2 \cdot \frac{-x+z}{y+2z-1} + 1 = 0$. Operando, la ecuación pedida es: $2x^2 + y^2 - 2z^2 + 2xy - 2xz - yz + 3z - 1 = 0$.

G 86- Obtener la ecuación de la cuádrica que contiene a las tres rectas: $x = z$, $y = -2z + 1$; $x = -z + 1$, $y = z - 1$; $x = 2z - 1$, $y = -x + 1$.

Solución: La ecuación general de las cuádricas que contienen a las dos primeras rectas, es:
$(x-z)[(x+z-1) + \lambda(y-z+1)] + (y+2z-1)[\mu(x+z-1) + \nu(y-z+1)] = 0$.
La ecuación general de las cuádricas que contienen a la primera recta y a la tercera, viene dada por:
$(x-z)[(x-2z+1) + l(x+y-1)] + (y+2z-1)[m(x-2z+1) + n(x+y-1)] = 0$.
Desarrollando e identificando coeficientes, se tiene: $\frac{1}{1+l} = \frac{\nu}{n} = \frac{\lambda + 2\mu - 2\nu - 1}{2-4m} = \frac{\lambda+\mu}{l+m+n} =$
$= \frac{2\mu - \lambda}{-3 - l + 2m + 2n} = \frac{\mu - \lambda + \nu}{-l - 2m + 2n} = \frac{\lambda - \mu - 1}{1 - l - m - n} = \frac{-\mu}{m - 2n} = \frac{-3\mu + 2\nu - \lambda + 1}{-1 + l + 4m - 2n} = \frac{\mu - \nu}{-m + n} = k$.
Resolviendo estas ecuaciones, se obtienen los siguientes valores: $l = 2$, $m = \frac{2}{3}$, $n = \frac{1}{3}$, $\lambda = 1$, $\mu = 0$, $\nu = \frac{1}{6}$, $k = \frac{1}{2}$. La ecuación de la cuádrica es: $6x^2 + y^2 - 2z^2 + 6xy - 6xz - 5yz + 3z - 1 = 0$.

G 87- Obtener la ecuación de la superficie reglada engendrada por una recta que se apoya en las rectas $R_1(x = 0, z = t)$, $R_2(y = 0, x = t)$, $R_3(z = 0, y = t)$.

Solución: El haz de planos que pasan por R_1 es: $z - t + mx = 0$. Y el definido por R_2 es: $x - t + ny = 0$. Para que la recta definida por ambas ecuaciones, se apoye en R_3, ha de verificarse que: $-t + mx = 0$, $x - t + nt = 0$. Luego: $x = \frac{t}{m} = t - nt$. De donde se tiene: $m(1-n) = 0$, es decir: $\frac{t-z}{x}\left(1 - \frac{t-x}{y}\right) = 0$. Operando: $xz + yz - tx - ty - tz + t^2 = 0$.

G 88- Dado el hiperboloide $4x^2 + 6y^2 - z^2 = 1$, hallar la envolvente de las proyecciones de sus generatrices en el plano XY.

Solución: Siendo la ecuación del hiperboloide: $4x^2 - z^2 = 1 - 6y^2$, se obtiene que: $(2x+z)(2x-z) = = \left(1 + \sqrt{6}y\right)\left(1 - \sqrt{6}y\right)$, obteniéndose las generatrices: $2x + z = \lambda\left(1 + \sqrt{6}y\right)$, $2x - z = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \sqrt{6}y\right)$; $2x + z = \mu\left(1 - \sqrt{6}y\right)$, $2x - z = \frac{1}{\mu}\left(1 + \sqrt{6}y\right)$. De la primera generatriz se obtiene la siguiente ecuación: $2x + z - \lambda\left(1 + \sqrt{6}y\right) + \alpha\left[2x - z - \frac{1}{\lambda}\left(1 - \sqrt{6}y\right)\right] = 0$. Haciendo $\alpha = 1$, se anula el coeficiente de z, obteniéndose su proyección en el plano $z = 0$: $4x + y\left(-\sqrt{6}\lambda + \frac{\sqrt{6}}{\lambda}\right) - \lambda - \frac{1}{\lambda} = 0$, de donde se tiene que: $4x\lambda - y\sqrt{6}\lambda^2 + \sqrt{6}y - \lambda^2 - 1 = 0$. Derivando respecto a λ, se tiene: $4x - 2y\sqrt{6}\lambda - 2\lambda = 0$, de donde $\lambda = \frac{2x}{\sqrt{6}y + 1}$. Sustituyendo este valor, se tiene la ecuación pedida: $4x^2 + 6y^2 - 1 = 0$, $z = 0$. Procediendo análogamente con la segunda generatriz, se obtiene la misma envolvente.

G 89- Las ecuaciones: $y - \lambda z + \lambda + 1 = 0$, $(\lambda + 1)x + y + \lambda = 0$, representan las generatrices de un sistema de

un hiperboloide. Hallar las ecuaciones generales del otro sistema en función de λ.

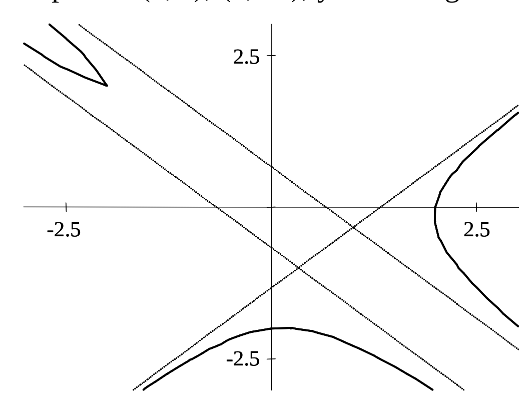
Solución: $\lambda = \dfrac{y+1}{z-1} = \dfrac{x+y}{-x-1}$. Luego, $xy+xz+yz+1=0$, que es un hiperboloide de una hoja. Un sistema de generatrices es: $y+1=\lambda(z-1)$, $\lambda(-x-1)=x+y$, y el otro sistema es: $y+1=\mu(x+y)$, $-x-1=\dfrac{1}{\mu}(z-1)$.

G 90- En el hiperboloide $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$, se consideran dos generatrices del mismo sistema que pasan por los vértices A y A' del eje mayor de la elipse de garganta. Demostrar que una generatriz cualquiera encuentra a estas dos dadas, en M y M', verificándose que $AM \cdot A'M' = b^2+c^2$.

Solución: La elipse de garganta es: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $z=0$, siendo sus vértices: $A(a,0,0)$, $A'(-a,0,0)$. Las generatrices que pasan por A son: $x=a$, $cy+bz=0$, y las que pasan por A' son: $x=-a$, $cy-bz=0$. Una generatriz cualquiera es: $\dfrac{x}{a}=\cos\theta-\dfrac{z}{c}\sin\theta$, $\dfrac{y}{b}=\sin\theta+\dfrac{z}{c}\cos\theta$. Operando se obtienen las coordenadas de los puntos de intersección, que son: $M\left[a, \dfrac{-b}{\sin\theta}(-1+\cos\theta), \dfrac{c}{\sin\theta}(\cos\theta-1)\right]$ y $M'\left[-a, \dfrac{b}{\sin\theta}(1+\cos\theta), \dfrac{c}{\sin\theta}(\cos\theta+1)\right]$. Por tanto, el producto de las distancias $AM \cdot A'M'$, viene dado por: $\sqrt{\dfrac{b^2}{\sin^2\theta}(-1+\cos\theta)^2+\dfrac{c^2}{\sin^2\theta}(\cos\theta-1)^2} \cdot \sqrt{\dfrac{b^2}{\sin^2\theta}(1+\cos\theta)^2+\dfrac{c^2}{\sin^2\theta}(\cos\theta+1)^2} =$
$= \dfrac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)(b^2+c^2)}{\sin^2\theta} = b^2+c^2$.

G 91- Se dan las rectas: $R \equiv x=y=z$, $R_1 \equiv y=-1$, $z=1$, $R_2 \equiv x=1$, $z=-1$. La recta R engendra, al girar alrededor de R_1, un hiperboloide H_1, y al girar alrededor de R_2, un hiperboloide H_2. La intersección de H_1 y H_2 comprende la recta R y una cúbica C. Hallar y dibujar la proyección de C sobre el plano XOY.

Solución: Con relación a H_1, se tiene, siendo $(\lambda,-1,1)$ un punto genérico de R_1, que: $x=y=z=\lambda$. Luego: $(x-\lambda)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=(\lambda+1)^2+(\lambda-1)^2$. De donde, teniendo en cuenta que $\lambda=x$, se obtiene: $H_1 \equiv 2x^2-y^2-z^2-2y+2z=0$. Análogamente, $H_2 \equiv x^2-2y^2+z^2-2x+2z=0$. Eliminando z entre las dos ecuaciones, y dividiendo por $(x-y)$, se tiene la proyección de C sobre XOY, que es: $9(x-y)(x+y)^2-12(x+y)^2-4(x-y)-16=0$. Esta curva tiene las asíntotas: $y=-x\pm\dfrac{2}{3}$, $y=x-\dfrac{4}{3}$. Su intersección con los ejes da los puntos $(2,0)$, $(0,-2)$, y con la segunda bisectriz, el punto $(-2,2)$.



G 92- Sobre cada generatriz de un hiperboloide, y a partir de la elipse de garganta, se lleva una longitud constante. Hallar el lugar geométrico de los puntos obtenidos.

Solución: Sea $H \equiv \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}-1=0$, siendo la generatriz de un sistema: $\dfrac{x}{a}=\dfrac{z}{c}\cos\theta-\sin\theta$, $\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}\sin\theta+\cos\theta$. Un punto genérico de la generatriz es: $\left(\dfrac{a}{c}z\cos\theta-a\sin\theta, \dfrac{b}{c}z\sin\theta+b\cos\theta, z\right)$. Las coordenadas del correspondiente punto de la elipse de garganta, son: $(-a\sin\theta, b\cos\theta, 0)$. Luego se cumple: $\left(\dfrac{a}{c}z\cos\theta\right)^2+\left(\dfrac{b}{c}z\sin\theta\right)^2+z^2=d^2$. De donde se tiene que: $z^2=\dfrac{c^2d^2}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta+c^2}$. Como: $\sin\theta=\dfrac{acyz-bc^2x}{abz^2+abc^2}=\dfrac{c}{ab}\dfrac{ayz-bcx}{z^2+c^2}$, $\cos\theta=\dfrac{c}{ab}\dfrac{bxz+acy}{z^2+c^2}$, las ecuaciones del lugar pedido son: $z^2\left[\dfrac{(bxz+acy)^2}{b^2(z^2+c^2)^2}+\dfrac{(ayz-bcx)^2}{a^2(z^2+c^2)^2}+1\right]=d^2$, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}-1=0$.

G 93- Formar la ecuación de un hiperboloide H engendrado al girar el eje Z alrededor de la recta $x = lz + p$, $y = mz + q$. Determinar l, p, q en función de m, de forma que H sea tangente al paraboloide P de ecuación $yz - ax = 0$, en todos los puntos del eje OZ. Si en la ecuación de H se reemplazan l, p, q, por los valores obtenidos, se tiene un hiperboloide H_m que depende de m. Determinar la intersección de P y H_m.

Solución: La recta es: $\frac{x-p}{l} = \frac{y-q}{m} = \frac{z}{1}$, teniéndose: $(x-p)^2 + (y-q)^2 + z^2 = \lambda^2$, $lx + my + z = \mu$. De donde, para $x = y = 0$, $\lambda^2 - \mu^2 = p^2 + q^2$. Luego, $H \equiv (x-p)^2 + (y-q)^2 + z^2 - (lx + my + z)^2 = p^2 + q^2$. Desarrollando, se tiene: $H \equiv (1-l^2)x^2 + (1-m^2)y^2 - 2lxz - 2myz - 2lmxy - 2px - 2qy = 0$, cuyas respectivas derivadas son: $H'_x = 2(x-p) - 2l(lx + my + z)$, $H'_y = 2(y-q) - 2m(lx + my + z)$, $H'_z = -2(lx + my)$, $H'_t = -2(px + qy)$. Las respectivas derivadas de P, son: $P'_x = -at$, $P'_y = z$, $P'_z = y$, $P'_t = -ax$. Expresando que los planos tangentes a H y a P, en los puntos $(0,0,0,1), (0,0,1,0), (0,0,1,1)$, son los mismos, lo serán en todos los puntos. Luego: $-2px - 2qy \equiv -ax = 0$, $-2lx - 2my \equiv y = 0$, $-(2p + 2l)x - (q + m)y \equiv -ax + y = 0$. Es decir: $q = l = 0$, $\frac{p}{a} = -m$. Las condiciones pedidas son: $q = l = 0$, $p = -am$. En consecuencia, la ecuación de los hiperboloides H_m, que depende de m, es: $x^2 + (1-m^2)y^2 - 2myz + 2amx = 0$. La intersección de los hiperboloides H_m y del paraboloide P viene dada por: $x^2 + (1-m^2)y^2 - 2myz + 2amx = 0$, $yz - ax = 0$, o bien: .$x^2 + (1-m^2)y^2 = 0$, $yz - ax = 0$, que está formada por las dos rectas: $x = \pm\sqrt{m^2-1}\,y$, $z = \pm a\sqrt{m^2-1}$, y la recta doble: $x = 0$, $y = 0$.

G 94- Hallar las dos generatrices del hiperboloide $yz - xz + xy - 2y = 0$, que pasan por el punto $(2,2,1)$.

Solución: La ecuación general de las rectas que pasan por $(2,2,1)$, es: $\frac{x-2}{a-2} = \frac{y-2}{b-2} = \frac{z-1}{c-1}$, de donde: $x = \frac{a-2}{c-1}(z-1) + 2$, $y = \frac{b-2}{c-1}(z-1) + 2$, o bien: $x = \lambda z + 2 - \lambda$, $y = \mu z + 2 - \mu$. Esta recta está contenida en la cuádrica, luego sustituyendo los valores obtenidos para x e y, en la ecuación del hiperboloide, se tiene que: $(\mu z + 2 - \mu)z - (\lambda z + 2 - \lambda)z + (\lambda z + 2 - \lambda)(\mu z + 2 - \mu) - 2(\mu z + 2 - \mu) = 0$, es decir: $(\mu - \lambda + \lambda\mu)z^2 + (3\lambda - \mu - 2\lambda\mu)z + \lambda\mu - 2\lambda \equiv 0$. Por tanto: $\mu - \lambda + \lambda\mu = 0$, $3\lambda - \mu - 2\lambda\mu = 0$, $\lambda(\mu - 2) = 0$. De donde: $\lambda = 0$, $\mu = 0$; $\mu = 2$, $\lambda = -2$. Las dos generatrices son: $x = 2$, $y = 2$; $x = -2z + 4$, $y = 2z$.

G 95- Hallar el lugar geométrico de los puntos de un hiperboloide de una hoja, en los que las generatrices que pasan por ellos, se cortan perpendicularmente.

Solución: Sea el hiperboloide de una hoja: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$. Las ecuaciones de las generatrices de un sistema, son: $\frac{x}{a} = \cos\theta + \frac{z}{c}\sin\theta$, $\frac{y}{b} = \sin\theta - \frac{z}{c}\cos\theta$. Y las de las generatrices del segundo sistema, son: $\frac{x}{a} = \cos\varphi - \frac{z}{c}\sin\varphi$, $\frac{y}{b} = \sin\varphi + \frac{z}{c}\cos\varphi$. La condición de perpendicularidad de ambas generatrices, es: $a^2\sin\theta\sin\varphi + b^2\cos\theta\cos\varphi - c^2 = 0$. Como de las ecuaciones de las generatrices, se obtiene que: $\left(\frac{x}{a} - \cos\theta\right)^2 = \frac{z^2}{c^2}\sin^2\theta = \frac{z^2}{c^2}(1 - \cos^2\theta)$, $\left(\frac{x}{a} - \cos\varphi\right)^2 = \frac{z^2}{c^2}\sin^2\varphi = \frac{z^2}{c^2}(1 - \cos^2\varphi)$, se deduce que $\cos\theta$ y $\cos\varphi$, son las raíces de la ecuación: $\left(\frac{x}{a} - \cos V\right)^2 = \frac{z^2}{c^2}(1 - \cos^2 V)$, o bien, desarrollando, de: $\left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right)\cos^2 V - \frac{2x}{a}\cos V + \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$. Por tanto: $\cos\theta \cdot \cos\varphi = \dfrac{\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}}{1 + \frac{z^2}{c^2}}$. Procediendo de forma similar con las otras dos ecuaciones de las generatrices, se tiene que: $\sin\theta \cdot \sin\varphi = \dfrac{\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}{1 + \frac{z^2}{c^2}}$. Introduciendo estos dos valores en la condición de perpendicularidad, se tiene: $a^2\dfrac{\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}{1 + \frac{z^2}{c^2}} + b^2\dfrac{\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}}{1 + \frac{z^2}{c^2}} - c^2 = 0$. Operando y simplificando, se obtiene la ecuación de la esfera: $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2 + c^2 = 0$. Luego la ecuación del lugar geométrico de los puntos de un hiperboloide de una hoja en los que las generatrices que pasan por ellos, se cortan perpendicularmente, es: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2 + c^2 = 0$.

G 96- Hallar la ecuación de la superficie podaria del paraboloide hiperbólico $P \equiv \frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} - 2x = 0$, respecto de su vértice.

Solución: Las derivadas parciales primeras son: $P'_x = -2$, $P'_y = \frac{2y}{p}$, $P'_z = \frac{-2z}{q}$. Por tanto, la ecuación del plano tangente genérico es: $-2(X-x) + \frac{2y}{p}(Y-y) - \frac{2z}{q}(Z-z) = 0$, de donde operando, se obtiene: $-X + x + \frac{Yy}{p} - \frac{Zz}{q} - \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 0$, o bien: $-X - x + \frac{Yy}{p} - \frac{Zz}{q} = 0$. La recta perpendicular desde el vértice $(0,0,0)$ a este plano, es: $\frac{X-0}{-2} = \frac{Y-0}{\frac{2y}{p}} = \frac{Z-0}{-\frac{2z}{q}}$, es decir: $y = \frac{-pY}{X}$, $z = \frac{qZ}{X}$. Por tanto, $x = \frac{1}{2}\left(\frac{pY^2}{X^2} - \frac{qZ^2}{X^2}\right)$. Introduciendo estos valores en la ecuación del plano, se obtiene la ecuación de la superficie podaria: $pY^2 - qZ^2 + 2X(X^2+Y^2+Z^2) = 0$.

G 97- Se consideran las secciones planas $ux + vy + z = 0$ en el paraboloide $x^2 + y^2 = 2z$, tales que la suma de los cuadrados de los semiejes es igual a $4(u^2+v^2)$. Hallar la envolvente de los planos.

Solución: Siendo la ecuación de la cónica en su plano $C \equiv x^2 + y^2 - 2(ux+vy) = 0$, su centro viene dado por el sistema: $C'_x = 2x - 2u = 0$, $C'_y = 2y - 2v = 0$, luego su centro es $(u, v, -u^2-v^2)$. Las ecuaciones de la cónica, trasladadas a su centro, son: $ux + vy + z = 0$, $x^2 + y^2 - u^2 - v^2 = 0$. Sea $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, la ecuación que da la suma de los cuadrados de los semiejes de C. Definiendo $F \equiv x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(ux + vy + z) + \mu(x^2 + y^2 - u^2 - v^2) = 0$, sus derivadas parciales primeras son: $F'_x = 2x + \lambda u + 2\mu x$, $F'_y = 2y + \lambda v + 2\mu y$, $F'_z = 2z + \lambda$. Luego, $xF'_x + yF'_y + zF'_z = 2(x^2+y^2+z^2) + {}$ $+\lambda(ux + vy + z) + 2\mu(x^2+y^2) = 2\rho^2 + 2\mu(x^2+y^2) = 0$, de donde $\mu = \frac{-\rho^2}{x^2+y^2} = \frac{-\rho^2}{u^2+v^2}$. Por tanto, $F'_x = 2\left(1 - \frac{\rho^2}{u^2+v^2}\right)x + \lambda u = 0$, $F'_y = 2\left(1 - \frac{\rho^2}{u^2+v^2}\right)y + \lambda v = 0$, $F'_z = 2z + \lambda = 0$. Para que estas ecuaciones sean compatibles con la ecuación del plano, se tiene que verificar que el determinante

$$\begin{vmatrix} 2\left(1 - \frac{\rho^2}{u^2+v^2}\right) & 0 & 0 & \lambda u \\ 0 & 2\left(1 - \frac{\rho^2}{u^2+v^2}\right) & 0 & \lambda v \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \\ u & v & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Desarrollando el determinante, se tiene que: $\frac{-4\lambda}{(u^2+v^2)^2}(u^2+v^2-\rho^2)[u^2+v^2+(u^2+v^2)^2-\rho^2] = 0$. Luego la suma de los cuadrados de los ejes es: $2(u^2+v^2) + (u^2+v^2)^2$. Como esta suma ha de ser igual a $4(u^2+v^2)$, se tiene que: $u^2+v^2 = 2$. Por tanto, el plano es: $ux + \sqrt{2-u^2}\,y + z = 0$. Derivando respecto a u y operando, se obtiene: $u = \frac{-xz}{x^2+y^2}$. Sustituyendo este valor en la ecuación del plano, se tiene su envolvente: $2(x^2+y^2) - z^2 = 0$.

G 98- Se da una parábola P y un punto M, cuya proyección ortogonal sobre el plano de la parábola es el vértice de esta. Se pide: 1º) Ecuación de las cuádricas de revolución que pasan por P y H. 2º) Determinar el número de superficies cuyo eje pasa por un punto A dado, situado en el plano Q definido por el eje de la parábola y el punto M.

Solución: 1º) Sea la parábola $P \equiv y^2 - 2px = 0$, $z = 0$, y sea $M(0,0,h)$. La ecuación de las cuádricas que pasan por P y M, es: $y^2 - 2px + 2z(ux + vy + wz - wh) = 0$. Para que sea de revolución: $v = 0$, $2w = 1 - u^2$, quedando la ecuación: $P \equiv y^2 + (1-u^2)z^2 + 2uxz - 2px - h(1-u^2)z = 0$. 2º) El eje viene dado por $P'_y = 0$, $P'_x + P'_z = 0$, es decir: $y = 0$, $2ux + 2(1 + u - u^2)z - 2p - h(1-u^2) = 0$. La ecuación del plano Q es: $y = 0$, por lo que: $A(\alpha.0.\gamma)$. Obligando a que el eje pase por $(\alpha, 0, \gamma)$, se tiene una ecuación de segundo grado en u, luego hay dos superficies cuyos ejes pasan por un punto A dado.

G 99- Se da la esfera $E \equiv x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ y un paraboloide P de plano director XY y de directrices el eje Z y la recta AB, siendo $A(R,0,R)$, $B(a,b,c)$. 1º) Obtener la ecuación del paraboloide. 2º) Se toma un punto

M sobre OZ, y los planos polares de M respecto a E y a P. Hallar el lugar geométrico de la intersección de los dos planos cuando el punto M describe OZ, y hallar la parte del lugar geométrico que está sobre el paraboloide. 3º) Suponiendo que AB forma un ángulo de 45º con OZ y que es tangente a E en B, calcular las coordenadas de B en función de R y determinar las generatrices de P que son tangentes a E.

Solución: 1º) $AB \equiv \frac{x-a}{R-a} = \frac{y-b}{-b} = \frac{z-c}{R-c}$, o bien: $bx+(R-a)y-bR = 0$, $bz+(R-c)y-bR = 0$. Además, $z = k$, $y = px$, luego: $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & k \\ p & -1 & 0 & 0 \\ b & R-a & 0 & bR \\ 0 & R-c & b & bR \end{vmatrix} = 0$. Sustituyendo $k = z$, $p = \frac{y}{x}$, se tiene que: $P \equiv bxz+(R-a)yz-bRx+R(a-c)y = 0$. 2º) Sea $M(0,0,m)$. Las primeras derivadas parciales de E, particularizadas para M, son: $E'_x(M) = 2x = 0$, $E'_y(M) = 2y = 0$, $E'_z(M) = 2z = 2m$, $E'_t(M) = -2R^2$. Luego el plano polar de M respecto a E, es: $mz-R^2 = 0$. Las derivadas correspondientes a P, particularizadas para M, son: $P'_x(M) = bz-bR = bm-bR$, $P'_y(M) = (R-a)z+R(a-c) = (R-a)m+$ $+R(a-c)$, $P'_z(M) = bx+(R-a)y = 0$, $P'_t(M) = -bRx+R(a-c)y = 0$. Luego el plano polar de M respecto a P, es: $x(bm-bR)+y[(R-a)m+R(a-c)] = 0$. Sustituyendo en esta ecuación, m por $\frac{R^2}{z}$ (valor obtenido del plano polar respecto a E), se tiene: $bxz+(c-a)yz-bRx+R(a-R)y = 0$, que es el lugar pedido. Restando a esta ecuación la de P, se tiene: $y(z+R) = 0$. Luego la parte del lugar que está sobre el paraboloide está formada por las cónicas intersección de P con los planos $y = 0$, $z = -R$, es decir, $y = 0$, $x(z-R) = 0$; $z = -R$, $2bx+(R+c-2a)y = 0$. 3º) Por estar M en E, se tiene: $a^2+b^2+c^2 = R^2$. Por ser AB tangente en B a E, se tiene: $a+c = R$. Por ser de 45º el ángulo formado por AB y OZ, se tiene: $\cos 45º = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{R-c}{\sqrt{(R-a)^2+b^2+(R-c)^2}}$. De estas tres ecuaciones, se tiene: $c = \frac{\left(2-\sqrt{2}\right)R}{2}$, $a = R-c = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, $b^2 = R^2-\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)R}{2}\right)^2 = R^2\left(\sqrt{2}-1\right)$. Por tanto, el punto B es: $\left[\frac{R\sqrt{2}}{2}, \pm R\sqrt{\sqrt{2}-1}, \frac{R\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}\right]$. Las generatrices de P tangentes a E, son: $z = R$, $y = 0$; $z = -R$, $(2a-R-c)y-2bx = 0$.

G 100- Dadas las rectas: $x = 0$, $y = 0$; $x = h$, $z = 0$, se consideran los paraboloides hiperbólicos que las contienen. Hallar el lugar geométrico de los puntos de contacto de los planos tangentes paralelos al plano $ax+by+cz = 0$.

Solución: La ecuación general de las cuádricas que pasan por las dos rectas dadas, es: $(x-h)(x+\lambda y)+z(\mu x+\nu y) = x^2+\lambda xy+\mu xz+\nu yz-hx-h\lambda y = 0$. Se tiene que su determinante $A = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\lambda}{2} & \frac{\mu}{2} & \frac{-h}{2} \\ \frac{\lambda}{2} & 0 & \frac{\nu}{2} & \frac{-h\lambda}{2} \\ \frac{\mu}{2} & \frac{\nu}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-h}{2} & \frac{-h\lambda}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{16}h^2(\nu-\lambda\mu)$, y $A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\lambda}{2} & \frac{\mu}{2} \\ \frac{\lambda}{2} & 0 & \frac{\nu}{2} \\ \frac{\mu}{2} & \frac{\nu}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\nu(\nu-\lambda\mu)$. De $A_{44} = 0$, se tiene, o bien: $\nu = \lambda\mu$, o bien: $\nu = 0$. Para $\nu = \lambda\mu$, el determinante A se anula, luego esa raíz no es válida. Por tanto, la raíz válida es $\nu = 0$, con lo que la ecuación del paraboloide es: $P \equiv x^2+\lambda xy+\mu xz-hx-h\lambda y = 0$. Sus derivadas son: $P'_x = 2x+\lambda y+\mu z-h$, $P'_y = \lambda(x-h)$, $P'_z = \mu x$, de donde: $\frac{2x+\lambda y+\mu z-h}{a} = \frac{\lambda(x-h)}{b} = \frac{\mu x}{c}$. Eliminando λ y μ entre estas ecuaciones y la de P, se tiene el lugar pedido: $ax^2+bxy+cxz-ahx-bhy = 0$.

G 101- Hallar el lugar geométrico de los focos de las secciones hechas en un paraboloide por planos que pasan por una recta fija paralela al eje.

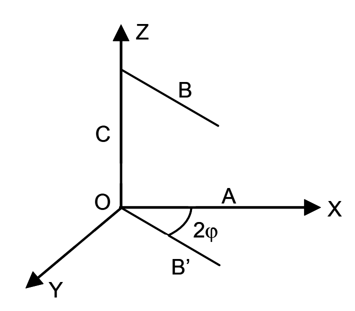
Solución: Sea el paraboloide $P = \frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}-2x = 0$. La recta paralela al eje es: $y = b$, $z = a$. Los planos que pasan por esta recta, son: $y-b+\lambda(z-a) = y+\lambda z-b-\lambda a = y+\lambda z+A = 0$. La ecuación de la

cónica intersección, en paramétricas, es: $x=\frac{1}{2}\left[\frac{(A+\lambda v)^2}{p}+\frac{v^2}{q}\right]$, $y=-A-\lambda v$, $z=v$, siendo los parámetros v, λ, $A=-b-\lambda a$, y siendo el plano de la cónica, $y+\lambda z+A=0$. Siendo (α,β) el foco, obligando a que la recta $y-\beta=m(x-\alpha)$, sea tangente a la cónica, se tiene que: $m^2\left(\frac{2\alpha\lambda^2}{p}-\frac{A^2}{pq}+\frac{2\alpha}{q}\right)-m\left(\frac{A}{q}+\frac{\beta\lambda^2}{p}+\frac{\beta}{q}\right)+\lambda^2=0$. Como se ha de tener que: $m^2+1=0$, se debe cumplir que: $\frac{2\alpha\lambda^2}{p}-\frac{A^2}{pq}+\frac{2\alpha}{q}=\lambda^2$, $\frac{A}{q}+\frac{\beta\lambda^2}{p}+\frac{\beta}{q}=0$. De donde, sustituyendo α, β por x, y, se obtiene la ecuación en paramétricas del lugar geométrico de los focos:

$$x=\frac{pq\lambda^2+A^2}{2q\lambda^2+2p}=\frac{(pq+a^2)\lambda^2+2ab\lambda+b^2}{2q\lambda^2+2p},\ y=\frac{-Ap}{q\lambda^2+p}=\frac{ap\lambda+bp}{q\lambda^2+p},\ z=\frac{-y-A}{\lambda}=\frac{aq\lambda^2+bq\lambda}{q\lambda^2+p}.$$

G 102- Hallar la ecuación de la superficie engendrada por una recta *C* que se desliza sobre otras dos, *A* y *B*, de tal modo que en todas sus posiciones el ángulo que forma con *A* sea igual al que forma con *B*.

Solución:



Sea el plano *XOY* el que pasa por la recta *A* y es paralelo a la recta *B*, siendo $OX\equiv A$. Sea *OZ* la perpendicular común a *A* y *B*. Y sea 2φ el ángulo que forman *A* y *B*. Sea *d* la mínima distancia entre *A* y *B*. Si se traza por *O* la paralela a la recta que se apoya en *A* y *B*, formará ángulos iguales con *A* y B' (B' es la recta paralela a *B* en el plano *XOY*), luego estará situada en el plano: $y=x\tan\varphi$. Las ecuaciones de *A* son: $y=0$, $z=0$, siendo un punto genérico $(\alpha,0,0)$. Las ecuaciones de *B* son: $y=x\tan2\varphi$, $z=d$, siendo un punto genérico $(\lambda,\lambda\tan2\varphi,d)$. Las ecuaciones de *C* son: $\frac{x-\alpha}{\lambda-\alpha}=\frac{y}{\lambda\tan2\varphi}=\frac{z}{d}$. Como la recta *C* está situada en el plano $y=x\tan\varphi$, se tiene que $\lambda=\frac{\alpha\tan\varphi}{\tan\varphi-\tan2\varphi}$, siendo, por tanto, las ecuaciones de *C*: $\frac{(x-\alpha)(\tan\varphi-\tan2\varphi)}{\alpha\tan2\varphi}=\frac{y(\tan\varphi-\tan2\varphi)}{\alpha\tan\varphi\tan2\varphi}=\frac{z}{d}$. Eliminando α, se tiene la ecuación pedida: $xz\tan\varphi\tan2\varphi-yz\tan2\varphi+d(\tan2\varphi-\tan\varphi)=0$. Se trata de un paraboloide hiperbólico, si las rectas *A* y *B* no son paralelas. Si lo son, el lugar es la hipérbola: $x=0, yz=\frac{d}{2}$.

G 103- Hallar el lugar geométrico de los vértices de los paraboloides equiláteros que contienen a la hipérbola equilátera $xy=a^2$, $z=0$.

Solución: La ecuación general de las cuádricas que contienen a la hipérbola dada, es: $xy-a^2+z(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)=0$, es decir: $\gamma z^2+xy+\alpha xz+\beta yz+\delta z-a^2=0$. Para que sea paraboloide, ha de cumplirse que: $A_{44}=\begin{vmatrix}0 & 1/2 & \alpha/2\\ 1/2 & 0 & \beta/2\\ \alpha/2 & \beta/2 & \gamma\end{vmatrix}=\frac{\alpha\beta}{4}-\frac{\gamma}{4}=0$. Luego: $\gamma=\alpha\beta$. Para que el paraboloide sea equilátero: $\gamma=0$. Luego, $\alpha\beta=0$. Para $\alpha=0$, la ecuación del paraboloide es: $xy+\beta yz+\delta z-a^2=0$, siendo su eje: $\frac{y}{\beta}=\frac{x+\beta z}{0}=\frac{\beta y+\delta}{-1}$. La intersección del eje con el paraboloide, corresponde al vértice, cuyo lugar es: $x^2y+yz^2-a^2x=0$. Para $\beta=0$, la ecuación del paraboloide es: $xy+\alpha xz+\delta z-a^2=0$, siendo su eje: $\frac{y+\alpha z}{0}=\frac{x}{\alpha}=\frac{\alpha x+\delta}{-1}$. El lugar del vértice, es: $xy^2+xz^2-a^2y=0$.

G 104- Hallar el lugar geométrico de los puntos de un paraboloide hiperbólico, en los que las generatrices rectilíneas que pasan por ellos, se cortan perpendicularmente.

Solución: Sea el paraboloide hiperbólico $\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}=2x$. Las ecuaciones de las generatrices de un sistema, son: $x=\frac{\alpha}{\sqrt{pq}}z+\beta$, $y=\sqrt{\frac{p}{q}}z+\alpha$. Las ecuaciones de las generatrices del segundo sistema, son: $x=\frac{-\gamma}{\sqrt{pq}}z+\delta$, $y=-\sqrt{\frac{p}{q}}z+\gamma$. De donde, la condición de perpendicularidad de ambas generatrices, es: $\frac{\alpha\gamma}{pq}+\frac{p}{q}-1=0$, es decir: $\alpha\gamma+p^2-pq=0$. Como $\alpha=y-\sqrt{\frac{p}{q}}z$, $\gamma=y+\sqrt{\frac{p}{q}}z$, se tiene que: $\left(y-\sqrt{\frac{p}{q}}z\right)\left(y+\sqrt{\frac{p}{q}}z\right)+p^2-pq=0$. Es decir: $y^2-\frac{p}{q}z^2+p^2-pq=0$, o bien, dividiendo por p: $\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}+p-q=0$. De donde, teniendo en cuenta la ecuación del paraboloide, se tiene que: $2x+p-q=0$. La ecuación pedida es: $\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}-2x=0$, $2x+p-q=0$.

G 105- Hallar el lugar geométrico de los vértices de los paraboloides de revolución que contienen a la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$, $z=0$, siendo $a>b$.

Solución: La ecuación general de las cuádricas que contienen a la elipse dada, viene dada por: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1+z(2\alpha x+2\beta y+\gamma z+2\delta)=0$. Para que sea paraboloide, ha de verificarse que: $A_{44}=\begin{vmatrix}1/a^2 & 0 & \alpha\\ 0 & 1/b^2 & \beta\\ \alpha & \beta & \gamma\end{vmatrix}=\frac{\gamma}{a^2b^2}-\frac{a^2}{b^2}-\frac{\beta^2}{a^2}=0$. Luego: $\gamma=a^2\alpha^2+b^2\beta^2$. Por tanto, la ecuación del paraboloide es: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+(a^2\alpha^2+b^2\beta^2)z^2+2\alpha xz+2\beta yz+2\delta z-1=0$. Para que sea de revolución, como $a_{12}=0$, ha de tenerse que, o bien $a_{13}=0$, o bien $a_{23}=0$. Para $a_{13}=\alpha=0$, la condición de revolución es: $(a_{22}-a_{11})(a_{33}-a_{11})=a_{23}^2$. Luego: $\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)\left(b^2\beta^2-\frac{1}{a^2}\right)-\beta^2=0$. De donde: $\beta^2=\frac{-(a^2-b^2)}{a^2b^4}$, por lo que al ser $a>b$, β no es real, no siendo válida esta solución. Para $a_{23}=\beta=0$, la condición de revolución es: $(a_{11}-a_{22})(a_{33}-a_{22})=a_{13}^2$. Luego: $\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\left(a^2\alpha^2-\frac{1}{b^2}\right)-\alpha^2=0$, de donde, operando, se obtiene que: $\alpha^2=\frac{a^2-b^2}{a^4b^2}$. Introduciendo este valor, la ecuación del paraboloide es: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}z^2\pm\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{a^2b}xz+2\delta z-1=0$. La fórmula de la ecuación del eje, siendo $a_{23}=0$, es: $\frac{x+\frac{a_{14}}{a_{22}}}{a_{13}}=\frac{y+\frac{a_{24}}{a_{22}}}{0}=\frac{z+\frac{a_{34}}{a_{22}}}{a_{33}-a_{22}}$. Es decir: $y=0$, $\frac{\pm a^2bx}{\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{z+b^2\delta}{\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}-\frac{1}{b^2}}$. De aquí se obtiene: $\delta=\frac{\pm x}{b\sqrt{a^2-b^2}}-\frac{z}{b^2}$, que introducido en la ecuación del paraboloide, da el lugar pedido: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}z^2\pm\frac{2b}{a^2\sqrt{a^2-b^2}}xz-1=0$, $y=0$ (se trata de dos hipérbolas situadas en el plano $y=0$).

G 106- Dada la ecuación $x^2+y^2+2z^2-2xz-2yz-x+z+1=0$, comprobar que se trata de una superficie cilíndrica.

Solución: Homogeneizando la ecuación, se tiene: $x^2+y^2+2z^2-2xz-2yz-xt+zt+t^2=0$, que cortada por el plano impropio $t=0$, da: $x^2+y^2+2z^2-2xz-2yz=0$, $t=0$. Dividiendo por z^2, se tiene: $(\frac{x}{z})^2+\left(\frac{y}{z}\right)^2-2(\frac{x}{z})-2\left(\frac{y}{z}\right)+2=0$, $t=0$, es decir: $(\frac{x}{z}-1)^2+\left(\frac{y}{z}-1\right)^2=0$, $t=0$. Luego, $\frac{x}{z}=\frac{y}{z}=1$, $t=0$, siendo $(z,z,z,0)$, es decir $(1,1,1,0)$, las coordenadas del punto impropio. Por tanto, la superficie es cilíndrica. Para obtener la naturaleza de la cuádrica, se tiene que el sistema formado por; $f'_x=2x-2z-1=0$, $f'_y=2y-2z=0$, $f'_z=4z-2x-2y+1=0$, tiene como solución la recta: $2x-2z-1=0$, $y=z$, por lo que la cuádrica tiene una recta propia de centros. El valor del determinante de los coeficientes, es: $A=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}=0$. Operando en la ecuación dada se obtiene que es igual a: $\left(x-z-\frac{1}{2}\right)^2+(y-z)^2+\frac{3}{4}=0$. Se trata de un cilindro elíptico imaginario.

G 107- Obtener la ecuación del cilindro parabólico de eje paralelo a la recta: $x-2y+1=0$, $2y-z-5=0$, siendo la directriz la curva $y^2=4x$, $z=1$.

Solución: La ecuación de la generatriz es: $x-2y+1=\lambda$, $2y-z-5=\mu$. En el plano $z=1$, se tiene: $x-2y+1=\lambda$, $2y-6=\mu$, es decir: $y=\frac{\mu+6}{2}$, $x=\lambda+\mu+5$. Sustituyendo estos valores en la ecuación de la directriz, se tiene: $\left(\frac{\mu+6}{2}\right)^2=4(\lambda+\mu+5)$. Introduciendo en esta ecuación los valores de λ y μ: $\left(\frac{2y-z+1}{2}\right)^2=4(x-2y+1+2y-z-5+5)$, es decir: $(2y-z+1)^2=16(x-z+1)$. Simplificando y ordenando: $4y^2+z^2-4yz-16x+4y+14z-15=0$.

G 108- Dada la esfera $x^2+y^2+z^2=4$, hallar la ecuación del cono circunscrito a la esfera, cuyo vértice es el punto $(1,2,3)$, así como la ecuación del cilindro circunscrito cuyas generatrices son paralelas a la dirección $(1,2,3)$.

Solución: Ecuación del cono circunscrito: $(xf'_\alpha+yf'_\beta+zf'_\gamma+tf'_\delta)^2-4f(\alpha,\beta,\gamma,\delta)f(x,y,z)=0$. Como $f'_x=2x$, $f'_y=2y$, $f'_z=2z$, $f'_t=-8t$, $f'_\alpha=2$, $f'_\beta=4$, $f'_\gamma=6$, $f'_\delta=-8$, se tiene que la ecuación del cono es: $(2x+4y+6z-8)^2-4(1+4+9-4)(x^2+y^2+z^2-4)=0$. Operando y simplificando, se obtiene: $(x+2y+3z-4)^2-10(x^2+y^2+z^2-4)=0$. Procediendo de forma similar, la ecuación del cilindro circunscrito, paralelo a la dirección $(\alpha,\beta,\gamma,0)$, es: $(xf'_\alpha+yf'_\beta+zf'_\gamma)^2-4f(\alpha,\beta,\gamma,0)f(x,y,z)=0$. Por tanto, particularizando para la dirección $(1,2,3)$, la ecuación del cilindro es: $(2x+4y+6z-8)^2-$ $-4(1+4+9)(x^2+y^2+z^2-4)=0$, o bien: $(x+2y+3z-4)^2-14(x^2+y^2+z^2-4)=0$

G 109- Obtener la ecuación del cono de vértice $(0,0,5)$ y directriz la curva: $z=x^2+y^2$, $x+y+z=1$.

Solución: La ecuación de las rectas que pasan por $(0,0,5)$ es: $\frac{x}{\lambda}=\frac{y}{\mu}=\frac{z-5}{1}$. Los valores de x,y obtenidos de estas ecuaciones, se introducen en la ecuación de la directriz, obteniéndose que: $z=\lambda^2(z-5)^2+\mu^2(z-5)^2$, $\lambda(z-5)+\mu(z-5)+z=1$. De esta última ecuación se obtiene: $z=\frac{1+5\lambda+5\mu}{1+\lambda+\mu}$. Por tanto: $x=\lambda\left(\frac{1+5\lambda+5\mu}{1+\lambda+\mu}-5\right)=\frac{-4\lambda}{1+\lambda+\mu}$, $y=\frac{-4\mu}{1+\lambda+\mu}$. Sustituyendo estos valores en la ecuación de la directriz, se tiene: $\frac{1+5\lambda+5\mu}{1+\lambda+\mu}=(\lambda^2+\mu^2)\left(\frac{-4}{1+\lambda+\mu}\right)^2$. Es decir, operando y simplificando: $16(\lambda^2+\mu^2)=(1+5\lambda+5\mu)(\lambda+\mu+1)$. Sustituyendo en esta ecuación los valores de $\lambda=\frac{x}{z-5}$, $\mu=\frac{y}{z-5}$, obtenidos de la ecuación de las rectas que pasan por $(0,0,5)$, se tiene la ecuación pedida: $11(x^2+y^2)-10xy-6(z-5)(x+y)-(x-5)^2=0$.

G 110- Dada la ecuación $x^2+\lambda y^2+\lambda z^2+2xz+2\lambda yz+2\lambda x+2\lambda z+\lambda^2=0$, comprobar que se trata de una superficie cónica.

Solución: El cono asintótico es: $x^2+\lambda y^2+\lambda z^2+2xz+2\lambda yz=0$. Al cortarlo por $z=1$, se tiene la cónica $x^2+\lambda y^2+2x+2\lambda y+\lambda=0$, que es una cónica real. El determinante de los coeficientes de la cuádrica, es: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & \lambda & 0 \\ 1 & \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & 0 & \lambda & \lambda^2 \end{vmatrix}=0$. Luego la cuádrica es degenerada, siendo un cono real de vértice $(-\lambda,0,0)$. Para $\lambda=0$, la cuádrica degenera en los planos: $x(x+z)=0$.

G 111- Obtener la ecuación del cono de vértice $(0,0,0)$, circunscrito a la cuádrica $x^2+y^2+z^2-2x-1=0$.

Solución: La ecuación del cono de vértice $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$, circunscrito a la cuádrica $f(x,y,z,t)=0$, es: $(xf'_\alpha+yf'_\beta+zf'_\gamma+tf'_\delta)^2-4f(\alpha,\beta,\gamma,\delta)f(x,y,z,t)=0$. Como las derivadas parciales de f, son: $f'_x=2x-2$, $f'_y=2y$, $f'_z=2z$, $f'_t=-2x-2t$, la ecuación del cono de vértice $(0,0,0,1)$, circunscrito a la cuádrica dada, es: $(-2x-2)^2+4(x^2+y^2+z^2-2x-1)=0$. Operando: $2x^2+y^2+z^2=0$.

G 112- Hallar la ecuación de la superficie cónica de vértice $(2,1,0)$ y directriz: $x+y=z$, $x^2-xy-z^2=0$.

Solución: Operando en la ecuación de la directriz, se tiene: $x^2-xy-(x+y)^2=-y^2-3xy=0$, es decir: $y=0$, $y+3x=0$. Para $y=0$, $z=x$; para $y=-3x$, $z=-2x$. La superficie pedida está formada por dos planos que pasan por $(2,1,0)$ y cada uno de ellos por una de las dos rectas anteriores, es decir: $(2y-x+z)(2x-4y+7z)=0$.

G 113- Determinar la ecuación de la superficie de revolución engendrada por la recta: $z=0$, $y=x+1$, al girar alrededor de la recta: $y=0$, $x=z$.

Solución: Se parte de la esfera $x^2+y^2+z^2=\lambda^2$, cuyo centro está en el eje de revolución, y que es cortada por el plano $x+z=\mu$, perpendicular a dicho eje. Como $z=0$, $y=x+1$, sustituyendo estos valores en las ecuaciones de la esfera y del plano, se tiene: $x^2+(x+1)^2=\lambda^2$, $x=\mu$. Luego $\mu^2+(\mu+1)^2=\lambda^2$. Introduciendo en esta ecuación los valores encontrados de λ y μ, se tiene: $(x+z)^2+(x+z+1)^2=x^2+y^2+z^2$. Operando, se tiene la ecuación de la superficie de revolución pedida: $x^2-y^2+z^2+4xz+2x+2z+1=0$.

G 114- Determinar la ecuación de la superficie de revolución engendrada por la recta: $x=z+1$, $y=2z-3$, al girar alrededor de la recta: $x=y=z$.

Solución: Se parte de la esfera $x^2+y^2+z^2=\lambda^2$, cuyo centro está en el eje de revolución, y que es cortada por el plano $x+y+z=\mu$, perpendicular a dicho eje. Como $x=z+1$, $y=2z-3$, se tiene que: $z+1+2z-3+z=4z-2=\mu$, $z=\dfrac{\mu+2}{4}$, $x=\dfrac{\mu+6}{4}$, $y=\dfrac{\mu-4}{2}$. Introduciendo estos valores en la ecuación de la esfera, se tiene: $\left(\dfrac{\mu+6}{4}\right)^2+\left(\dfrac{\mu-4}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\mu+2}{4}\right)^2=\lambda^2$. De donde operando, se obtiene: $3\mu^2-8\mu+52-8\lambda^2=0$. Sustituyendo en esta ecuación los valores encontrados de λ y μ, se tiene: $3(x+y+z)^2-8(x+y+z)+52-8(x^2+y^2+z^2)=0$. Operando, se tiene la ecuación de la superficie de revolución: $5x^2+5y^2+5z^2-6xy-6xz-6yz+8x+8y+8z-52=0$.

G 115- Hallar la ecuación del cilindro de revolución cuyo eje es la recta: $x=2y=-z$, y cuyo radio es 4. Hallar el área de su sección por el plano XY.

Solución: Siendo $(2\lambda,\lambda,-2\lambda)$ un punto genérico del eje, se parte de la esfera: $(x-2\lambda)^2+(y-\lambda)^2+(z+2\lambda)^2=16$, cortada por el plano perpendicular al eje y que pasa por el centro de la esfera, de ecuación $2(x-2\lambda)+(y-\lambda)-2(z+2\lambda)=0$, es decir: $2x+y-2z-9\lambda=0$. De donde $\lambda=\dfrac{2x+y-2z}{9}$. Introduciendo este valor en la ecuación de la esfera, se tiene la ecuación del cilindro de revolución: $5x^2+8y^2+5z^2-4xy+8xz+4yz-144=0$. Cortando por $z=0$, se tiene una elipse de ecuación: $5x^2+8y^2-4xy-144=0$, cuyo centro es $(0,0)$, sus ejes son: $y=\dfrac{x}{2}$, $y=-2x$, sus vértices son $\left(\dfrac{\pm12}{\sqrt5},\dfrac{\pm6}{\sqrt5}\right)$ y $\left(\dfrac{\pm4}{\sqrt5},\dfrac{\pm8}{\sqrt5}\right)$, luego sus semiejes son 6 y 4, siendo su área 24π.

G 116- Hallar el lugar geométrico de los vértices de los triedros trirrectángulos cuyas aristas cortan a la cónica $x^2+2xy+y^2-2x-4y=0,\ z=0$.

Solución: Sea (α,β,γ) el vértice del cono de generatriz: $\frac{x-\alpha}{a}=\frac{y-\beta}{b}=\frac{z-\gamma}{c}$. Cortando por $z=0$, se tiene: $x=\frac{-a\gamma}{c}+\alpha,\ y=\frac{-b\gamma}{c}+\beta$. Como ha de coincidir con la parábola, se tiene que verificar que: $\left(\frac{-a\gamma}{c}+\alpha\right)^2+2\left(\frac{-a\gamma}{c}+\alpha\right)\left(\frac{-b\gamma}{c}+\beta\right)+\left(\frac{-b\gamma}{c}+\beta\right)^2-2\left(\frac{-a\gamma}{c}+\alpha\right)-4\left(\frac{-b\gamma}{c}+\beta\right)=0$, siendo: $a=\frac{x-\alpha}{\lambda},\ b=\frac{y-\beta}{\lambda},\ c=\frac{z-\gamma}{\lambda}$. Operando, se tiene que los coeficientes de los términos en $x^2,\ y^2,\ z^2$, son: $a_{11}=\frac{\gamma^2}{c^2\lambda^2},\ a_{22}=\frac{\gamma^2}{c^2\lambda^2},\ a_{33}=\frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-2\alpha-4\beta}{c^2\lambda^2}$. La condición para que un cono sea capaz de un triedro trirrectángulo inscrito, es: $a_{11}+a_{22}+a_{33}=0$. Luego, aplicándola, se tiene: $2\gamma^2+\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-2\alpha-4\beta=0$, es decir: $x^2+y^2+2z^2+2xy-2x-4y=0$, que es la ecuación pedida.

G 117- Hallar el lugar geométrico de los vértices de los conos de revolución cicunscritos a un paraboloide.

Solución: Sea el paraboloide $\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}-2xt=0$, y sea (a,b,c,d) un punto del lugar. La ecuación del cono de vértice (a,b,c,d) circunscrito a la cuádrica $f(x,y,z,t)=0$, es: $(xf'_a+yf'_b+zf'_c+tf'_d)^2-$ $-4f(a,b,c,d)f(x,y,z,t)=0$. Como $f'_x=-2t,\ f'_y=\frac{2y}{p},\ f'_z=\frac{2z}{q},\ f'_t=-2x$, la ecuación del cono es: $\left(-2x+\frac{2b}{p}y+\frac{2c}{q}z-2a\right)^2-4\left(\frac{b^2}{p}+\frac{c^2}{q}-2a\right)\left(\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}-2x\right)=0$. Los términos de segundo grado de esta ecuación son: $x^2+\left(\frac{2a}{p}-\frac{c^2}{pq}\right)y^2+\left(\frac{2a}{q}-\frac{b^2}{pq}\right)z^2-\frac{2b}{p}xy-\frac{2c}{q}xz+\frac{2bc}{pq}yz$, o bien: $pqx^2+(2aq-c^2)y^2+(2ap-b^2)z^2-2qbxy-2pcxz+2bcyz$. Por ser de revolución, los números de Jacobi han de ser iguales, es decir: $a_{11}-\frac{a_{12}a_{13}}{a_{23}}=a_{22}-\frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}=a_{33}-\frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}}$. Por tanto: $pq-\frac{qbpc}{bc}=2aq-c^2-\frac{qbbc}{pc}=2ap-b^2-\frac{pcbc}{qb}$. Operando y simplificando, se obtiene que: $0=\frac{2apq-pc^2-qb^2}{p}=\frac{2apq-qb^2-pc^2}{q}$. De donde: $2apq-qb^2-pc^2=0$. Sustituyendo (a,b,c) por (x,y,z), se tiene el lugar pedido: $qy^2+pz^2-2pqx=0$.

G 118- Hallar el lugar geométrico de los vértices de un cono de revolución que pasa por la parábola $y^2=2px,\ z=0$. Demostrar que siendo M un punto del lugar, el eje del cono de vértice M, es la tangente en M a la curva del lugar.

Solución: La ecuación del cono de vértice (a,b,c) circunscrito a la parábola, es: $c^2y^2+(b^2-2pa)z^2+2pcxz-2bcyz-2pc^2x+2pacz=0$. Para que sea de revolución, como $a_{12}=0$, o bien, $a_{13}=pc=0$, $c=0$, lo que no es posible, o bien, $a_{23}=-bc=0$, es decir $b=0$, y $(a_{11}-a_{22})(a_{33}-a_{22})=a_{13}^2$. Luego: $c^2(2pa+c^2)=p^2c^2$, es decir: $2pa+c^2-p^2=0$, siendo el lugar pedido: $y=0,\ 2px+z^2-p^2=0$. La ecuación del eje es: $y=0,\ \frac{x-p}{p}=\frac{cz+pa}{-c^2-2pa}$, es decir: $y=0$, $px+cz+pa-p^2=0$. La ecuación de la tangente en M a la cónica de ecuación $y=0,\ 2px+z^2-p^2=0$, es: $xf'_x+yf'_y+zf'_z=px+cz-p^2+pa=0,\ y=0$, que es la misma ecuación que la del eje.

G 119- Se da un cono de vértice O, de ecuación $\varphi(x,y,z)=0$, y un plano P que pasa por el origen, $P\equiv ux+vy+wz=0$, que corta al cono según dos generatrices g_1 y g_2. Encontrar la condición para que g_1 y g_2 sean perpendiculares.

Solución: Sea $\varphi(x,y,z)\equiv Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy=0$. Eliminando z entre esta ecuación y la de P, se tienen las ecuaciones de las proyecciones g'_1,g'_2 sobre $z=0$, de las generatrices g_1,g_2: $(Aw^2+A''u''-2B'uw)x^2+(2A''uv-2Buw-2B'vw+2B''w^2)xy+(A'w^2+A''v^2-2Bvw)y^2=0$.
De donde, haciendo $x=1,\ y=m$, se obtienen los coeficientes angulares m_1 y m_2, de g'_1,g'_2, siendo $m_1m_2=\frac{Aw^2+A''u^2-2B'uw}{A'w^2+A''v^2-2Bvw},\ m_1+m_2=\frac{2A''uv-2Buw-2B'vw+2B''w^2}{A'w^2+A''v^2-2Bvw}$. Como las ecuaciones de g_1 y de g_2, son respectivamente: $g_1\equiv\frac{x}{w}=\frac{y}{wm_1}=\frac{z}{-(u+vm_1)},\ g_2\equiv\frac{x}{w}=\frac{y}{wm_2}=\frac{z}{-(u+vm_2)}$, para que sean perpendiculares ha de verificarse que $w^2+w^2m_1m_2+(u+vm_1)(u+vm_2)=0$, es decir: $(v^2+w^2)m_1m_2+uv(m_1+m_2)+u^2+w^2=0$. Sustituyendo en esta ecuación los valores de m_1m_2 y de m_1+m_2 hallados más arriba, se tiene la condición: $\varphi(u,v,w)-(A+A'+A'')(u^2+v^2+w^2)=0$.

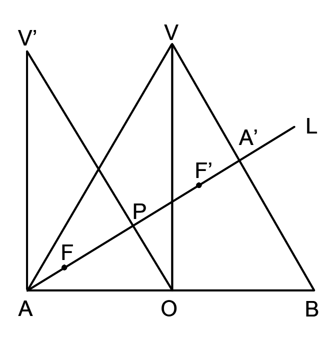
G 120- Se considera el hiperboloide $H \equiv \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, y el cono C envolvente de los planos que pasando por $M(x_0,y_0,z_0)$ son normales a las generatrices de H. 1º) Hallar los vértices del tetraedro conjugado con relación a todas las cuádricas que pasan por la intersección de H y C. 2º) Hallar el lugar geométrico Γ de estos vértices cuando siendo fijo M, varía el hiperboloide H, quedando concéntrico y homotético a un hiperboloide dado. 3º) Hallar la superficie engendrada por Γ, cuando M describe la recta $\frac{x-x_1}{\alpha}=\frac{y-y_1}{\beta}=\frac{z-z_1}{\gamma}$. 4º) Hallar las posiciones de esta recta para que dicha superficie sea de revolución.

Solución: 1º) Las ecuaciones de las generatrices son: $\frac{x}{a}=\frac{z}{c}\sin\theta+\cos\theta$, $\frac{y}{b}=-\frac{z}{c}\cos\theta+\sin\theta$. Los planos normales a las generatrices, pasando por M, son: $a\sin\theta(x-x_0)-b\cos\theta(y-y_0)+c(z-z_0)=0$. La ecuación del cono envolvente de estos planos, es: $C\equiv a^2(x-x_0)^2+b^2(y-y_0)^2-c^2(z-z_0)^2=0$. La ecuación de las cuádricas que pasan por la intersección de H y C, es: $a^2(x-x_0)^2+b^2(y-y_0)^2-$ $-c^2(z-z_0)^2+\mu\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1\right)=0$. Los vértices del tetraedro conjugado con dichas cuádricas, verifican el sistema: $\frac{a^2(x-x_0)}{\frac{x}{a^2}}=\frac{b^2(y-y_0)}{\frac{y}{b^2}}=\frac{c^2(z-z_0)}{\frac{z}{c^2}}=\frac{a^2(x-x_0)+b^2(y-y_0)-c^2(z-z_0)}{1}$.

Es decir: $\frac{a^4(x-x_0)}{x}=\frac{b^4(y-y_0)}{y}=\frac{c^4(z-z_0)}{z}=a^2(x-x_0)+b^2(y-y_0)-c^2(z-z_0)$. Por tanto, se tiene el sistema: $a^4(x-x_0)y=b^4(y-y_0)x$, $a^4(x-x_0)z=c^4(y-y_0)x$, $\frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}-\frac{z}{c^2}=1$, cuyas raíces son los vértices del tetraedro. 2º) La ecuación del hiperboloide será: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\lambda$. Introduciendo este valor de λ en las ecuaciones anteriores, se tienen las ecuaciones del lugar Γ de dichos vértices: $a^4(x-x_0)y=b^4(y-y_0)x$, $a^4(x-x_0)z=c^4(y-y_0)x$, con $\lambda=\frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}-\frac{z}{c^2}$. 3º) La recta dada es: $\frac{x_0-x_1}{\alpha}=\frac{y_0-y_1}{\beta}=\frac{z_0-z_1}{\gamma}=\rho$. Luego: $x_0=x_1+\rho\alpha$, $y_0=y_1+\rho\beta$, $z_0=z_1+\rho\gamma$. Entrando con estos valores en las ecuaciones de Γ, eliminando ρ, operando y simplificando, se tiene la ecuación de la superficie Σ, engendrada por Γ cuando el punto M describe la recta dada: $b^4c^4x[\beta(z-z_1)-\gamma(y-y_1)]+$ $+a^4c^4y[\gamma(x-x_1)-\alpha(z-z_1)]+a^4b^4z[\alpha(y-y_1)-\beta(x-x_1)]=0$, que es una cuádrica. 4º) Los términos de mayor grado de la ecuación de la cuádrica Σ, son: $c^4xy(a^4-b^4)\gamma+b^4xz(c^4-a^4)\beta+a^4yz(b^4-c^4)\alpha$. Para que sea de revolución, los correspondientes números de Jacobi han de ser iguales, luego: $\frac{c^4b^4\beta\gamma(a^4-b^4)(c^4-a^4)}{a^4\alpha(b^4-c^4)}=\frac{c^4a^4\alpha\gamma(b^4-c^4)(a^4-b^4)}{b^4\beta(c^4-a^4)}=\frac{b^4a^4\alpha\beta(c^4-a^4)(b^4-c^4)}{c^4\gamma(a^4-b^4)}$. De donde se obtiene: $b^8(c^4-a^4)^2\beta^2=a^8(b^4-c^4)^2\alpha^2$, $c^8(a^4-b^4)^2\gamma^2=a^8(b^4-c^4)^2\alpha^2$. Es decir, extrayendo las raíces cuadradas: $b^4(c^4-a^4)\beta=\pm a^4(b^4-c^4)\alpha$, $c(a^4-b^4)\gamma=\pm a^4(b^4-c^4)\alpha$. Las posiciones de la recta son: $a^4(b^4-c^4)(x-x_1)=\pm b^4(c^4-a^4)(y-y_1)=\pm c^4(a^4-b^4)(z-z_1)$.

G 121- En un cono de revolución se toma un punto A de la superficie. Por A se traza la perpendicular al plano meridiano que pasa por A, y por esta recta se hace pivotar un plano que corta al cono según una cónica. Hallar el lugar geométrico de los focos de esta.

Solución:



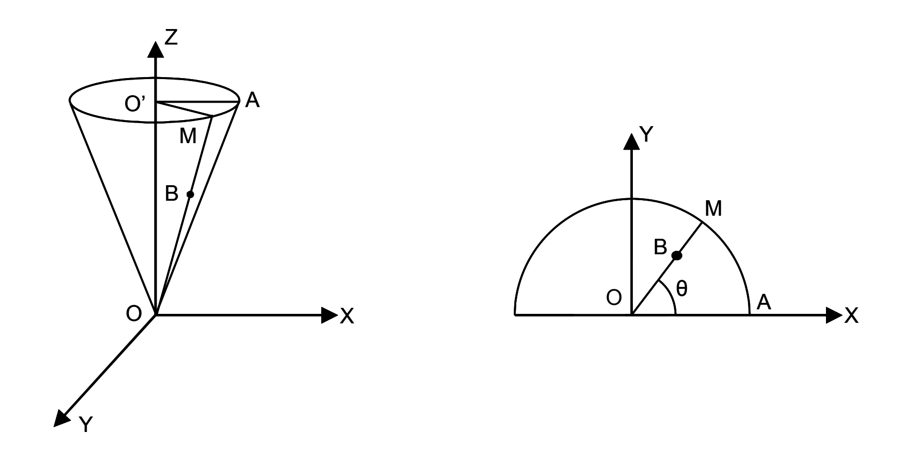
El lugar geométrico pedido es la estrofoide oblicua correspondiente a las rectas AO y OV'. El eje del cono es VO. La recta AO es la traza del plano perpendicular a VO por O, con el plano meridiano VAB. La recta OV' es la paralela a la generatriz VB, trazada por O. Al hacer pivotar el plano en A, la intersección AL con el plano meridiano, proporciona el eje mayor AA' de la cónica, y el punto P de intersección con OV'. Los puntos F y F', situados sobre AL, quedan determinados por $OP=PF=PF'$, y son los focos de la cónica

sección. La estrofoide pasa por F y F'. Su asíntota es la generatriz VB, a la que la estrofoide es tangente en V. El punto nodal es O.

Analíticamente: Sean: $A(0,0)$, $V(a,b)$, $O(a,0)$, $B(2a,0)$, $AL \equiv y - mx = 0$, $VB \equiv bx + ay - 2ab = 0$, $V'O \equiv y + \frac{b}{a}(x-a) = 0$, $P\left(\frac{ab}{am+b}, \frac{abm}{am+b}\right)$, $OP^2 = \frac{a^2m^2(a^2+b^2)}{(am+b)^2}$. Siendo las coordenadas de $F(x,mx)$, se tiene: $\left(x - \frac{ab}{am+b}\right)^2 + \left(mx - \frac{abm}{am+b}\right)^2 = \frac{a^2m^2(a^2+b^2)}{(am+b)^2}$. Operando y sustituyendo $m = \frac{y}{x}$, se tiene el lugar pedido: $x^2(ay+bx-ab)^2 + y^2\left[[x(ay+bx)-ab]^2 - a^2(a^2+b^2)\right] = 0$.

G 122- Dado el cono de revolución de la figura, en el que $OA = \sqrt{3}$ y $\widehat{O'OA} = 30º$, y siendo $\frac{\text{arco } AM}{MB} = \frac{1}{2}$, hallar: 1º) El lugar geométrico de B, cuando A está situado en el plano XOZ, y M recorre la circunferencia de la base del cono. 2º) El lugar geométrico de B al desarrollar el cono en el plano XOY. 3º) Área comprendida entre la primera vuelta de B y el vértice O.

Solución:



1º) En la figura de la izquierda, $OA = \sqrt{3}$, $\widehat{O'OA} = 30º$, $\widehat{AO'M} = \omega$, $OO' = \frac{3}{2}$, $O'A = O'M = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $M\left(\frac{\sqrt{3}\cos\omega}{2}, \frac{\sqrt{3}\sin\omega}{2}, \frac{3}{2}\right)$, arco $AM = \frac{\sqrt{3}\,\omega}{2}$, $MB = \sqrt{3}\,\omega$, $OB = \sqrt{3} - \sqrt{3}\,\omega = \sqrt{3}\,(1-\omega)$, siendo las coordenadas de B: $x = \frac{\sqrt{3}\,(1-\omega)\cos\omega}{2}$, $y = \frac{\sqrt{3}\,(1-\omega)\sin\omega}{2}$, $z = \frac{3(1-\omega)}{2}$. Por tanto, la ecuación del lugar geométrico de B es: $y = x\tan\frac{3-2z}{3}$. 2º) En la figura de la derecha se indica el desarrollo del cono, partiendo de una posición inicial de A sobre el eje OX, es decir $A\left(\sqrt{3}, 0\right)$. Se tiene que $OA \bullet \theta =$arco $AM = \frac{\sqrt{3}\,\omega}{2}$, luego $\theta = \frac{\omega}{2}$. Las coordenadas de B son: $(OB\cos\theta,\ OB\sin\theta)$, es decir: $x = \sqrt{3}\,(1-2\theta)\cos\theta$, $y = \sqrt{3}\,(1-2\theta)\sin\theta$. Por tanto, la ecuación implícita del lugar geométrico de B es: $x^2+y^2 = 3\left(1 - 2\arctan\frac{y}{x}\right)^2$. En coordenadas polares, la ecuación es: $\rho^2 = 3(1-2\theta)^2$. 3º) El área pedida es $\frac{1}{2}\int_0^\pi \rho^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi 3(1-2\theta)^2 d\theta = \frac{3}{2}\left(\pi - 2\pi^2 + \frac{4\pi^3}{3}\right)$.

G 123- A un elipsoide dado E se le circunscriben una serie de cuádricas Q, siendo la curva de contacto la intersección del elipsoide con un plano fijo P. Se circunscribe a cada cuádrica Q, un cono C de vértice A. Hallar el lugar geométrico de las curvas de contacto de los conos C y de las cuádricas Q.

Solución: Se toman como ejes OX, OY, dos diámetros conjugados de la elipse sección de E por P, y como eje OZ, el diámetro conjugado de P con relación a E. Luego, $E \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(z-h)^2}{c^2} - 1 = 0$, $Q \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(z-h)^2}{c^2} - 1 + \lambda z^2 = 0$. Siendo el vértice $A(\alpha,\beta,\gamma)$, la curva de contacto de C con Q, está definida por Q y por el plano polar Π de A. El lugar pedido se obtiene eliminando λ entre Q y Π: $\gamma\left[\frac{z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(z-h)^2}{c^2} - 1\right] - z\left[\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{(z-h)(\gamma-h)}{c^2} - 1\right] = 0$.

G 124- Se da la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=0$, y el punto $P(\alpha,\beta,0)$. Hallar el lugar geométrico de los vértices de los conos que pasan por la elipse, y uno de cuyos ejes pasa por P.

Solución: Sea $A(a\cos\theta, b\sin\theta, 0)$, un punto de la elipse. Sea el vértice del cono $V(m,n,p)$. Luego, $VA\equiv\frac{x-m}{a\cos\theta-m}=\frac{y-n}{b\sin\theta-n}=\frac{z-p}{-p}$, de donde se obtiene: $\cos\theta=\frac{mz-px}{a(z-p)}$, $\sin\theta=\frac{nz-py}{b(z-p)}$. Por tanto: $\frac{(mz-px)^2}{a^2}+\frac{(nz-py)^2}{b^2}=(z-p)^2$. Desarrollando esta ecuación y operando, se tiene que: $b^2p^2x^2+a^2p^2y^2+(b^2m^2+a^2n^2-a^2b^2)z^2-2b^2mpxz-2a^2npyz+2ab^2pz-a^2b^2p^2$. La ecuación del plano perpendicular a VP es: $(m-\alpha)x+(n-\beta)y+pz=0$. La ecuación del diámetro conjugado es: $\frac{b^2p^2x-b^2mpz}{m-\alpha}=\frac{a^2p^2y-a^2npz}{n-\beta}=\frac{(b^2m^2+a^2n^2-a^2b^2)z-b^2mpx-a^2npy}{p}$. Obligando a que pase por P: $\frac{b^2p^2\alpha}{m-\alpha}=\frac{a^2p^2\beta}{n-\beta}=\frac{-b^2mp\alpha-a^2np\beta}{p}$. Sustituyendo (m,n,p) por (x,y,z), se tiene la ecuación del lugar pedido: $\frac{b^2z^2\alpha}{x-\alpha}=\frac{a^2z^2\beta}{y-\beta}=-b^2x\alpha-a^2y\beta$. O bien, desarrollando las igualdades y operando: $b^2\alpha(y-\beta)-a^2\beta(x-\alpha)=0$, $b^2z^2\alpha+(x-\alpha)(b^2x\alpha+a^2y\beta)=0$.

G 125- Se da un elipsoide y uno de sus planos principales. Hallar el lugar geométrico del vértice del cono circunscrito al elipsoide que corta al plano principal considerado, según un círculo. Demostrar que este lugar se compone de dos cónicas C_1 y C_2, que tienen dos puntos comunes y por las cuales pasa un haz de hiperboloides de una hoja.

Solución: Sea el elipsoide $E\equiv\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$, y el plano principal $z=0$. La ecuación $\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\gamma z}{c^2}=1\right)^2-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}-1\right)=0$, corresponde a los conos de vértice (α,β,γ), circunscritos a E. Cortando por $z=0$, y obligando a que la cónica sea un círculo, ha de tenerse que los coeficientes de los términos en x^2 y en y^2, han de ser iguales, y nulo el coeficiente del término en xy. Por tanto: $c^2(\alpha^2-\beta^2)+(a^2-b^2)(\gamma^2-c^2)=0$, $\alpha\beta=0$. Para $\alpha=0$, se tiene la cónica $C_1\equiv x=0$, $c^2y^2+(b^2-a^2)z^2+c^2(a^2-b^2)=0$. Para $\beta=0$, se tiene la cónica $C_2\equiv y=0$, $c^2x^2+(a^2-b^2)z^2+c^2(b^2-a^2)=0$. Estas dos cónicas tienen comunes los puntos $(0,0,\pm c)$. Las dos cónicas resultan de la intersección de las cuádricas: $c^2x^2-c^2y^2+(a^2-b^2)z^2+c^2(b^2-a^2)=0$, $xy=0$. La ecuación de las cuádricas que pasan por la intersección de esta dos cuádricas, es: $c^2x^2-c^2y^2+(a^2-b^2)z^2+c^2(b^2-a^2)+2\lambda xy=0$, que es un hiperboloide de una hoja, pues tiene centro único propio $(0,0,0)$, cono asintótico real y sus puntos son hiperbólicos, pues el determinante $A=c^2(a^2-b^2)^2(\lambda^2+c^4)>0$.

G 126- Hallar el lugar geométrico de los triedros trirrectángulos cuyas caras son tangentes a tres cuádricas homofocales dadas.

Solución: Sean las ecuaciones de las tres cuádricas homofocales:

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda_1}+\frac{y^2}{b^2+\lambda_1}+\frac{z^2}{c^2+\lambda_1}-1=0,$$
$$\frac{x^2}{a^2+\lambda_2}+\frac{y^2}{b^2+\lambda_2}+\frac{z^2}{c^2+\lambda_2}-1=0,$$
$$\frac{x^2}{a^2+\lambda_3}+\frac{y^2}{b^2+\lambda_3}+\frac{z^2}{c^2+\lambda_3}-1=0.$$

Las ecuaciones de sus planos tangentes son:

$$x\cos\alpha_1+y\cos\beta_1+z\cos\gamma_1=\pm\sqrt{(a^2+\lambda_1)\cos^2\alpha_1+(b^2+\lambda_1)\cos^2\beta_1+(c^2+\lambda_1)\cos^2\gamma_1},$$
$$x\cos\alpha_2+y\cos\beta_2+z\cos\gamma_2=\pm\sqrt{(a^2+\lambda_2)\cos^2\alpha_2+(b^2+\lambda_2)\cos^2\beta_2+(c^2+\lambda_2)\cos^2\gamma_2},$$
$$x\cos\alpha_3+y\cos\beta_3+z\cos\gamma_3=\pm\sqrt{(a^2+\lambda_3)\cos^2\alpha_3+(b^2+\lambda_3)\cos^2\beta_3+(c^2+\lambda_3)\cos^2\gamma_3},$$

Elevando estas ecuaciones al cuadrado y sumándolas, y teniendo en cuenta las siguientes relaciones: $\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3=1$, $\cos\alpha_1\cos\beta_1+\cos\alpha_2\cos\beta_2+\cos\alpha_3\cos\beta_3=0$, y sus relaciones análogas, se tiene la ecuación del lugar pedido: $x^2+y^2+z^2=\Sigma a^2(\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3)+\lambda_i\sum_{i=1}^{i=3}\cos^2\alpha_i$.

Es decir: $x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$.

G 127- Dada la parábola Π de ecuación $x^2=2pz$, $y=0$, y el punto $B(0,b,0)$, hallar el lugar geométrico de las rectas perpendiculares tanto al eje OZ como a las generatrices del cono cuyo vértice es B y cuya

directriz es Π.

Solución: La ecuación general de las generatrices del cono, es: $\frac{x}{\sqrt{2pt}} = \frac{y-b}{-b} = \frac{z}{t}$. Las coordenadas de un punto genérico de las generatrices, son: $\left(\lambda\sqrt{2pt}, b-b\lambda, t\lambda\right)$. Las coordenadas de un punto genérico de OZ, son: $(0,0,\mu)$. La ecuación de la recta que pasa por ambos puntos genéricos, es: $\frac{x}{\lambda\sqrt{2pt}} = \frac{y}{b-b\lambda} = \frac{z-\mu}{t\lambda-\mu}$. Las condiciones de perpendicularidad de esta recta con las generatrices y con el eje OZ, son: $\lambda 2pt - b^2(1-\lambda) + t(t\lambda-\mu) = 0$, $\lambda 2pt - b^2(1-\lambda) = 0$. Luego se tiene el sistema: $\frac{x}{\lambda\sqrt{2pt}} = \frac{y}{b-b\lambda} = \frac{z-t\lambda}{0}$, $\lambda 2pt - b^2(1-\lambda) = 0$. Resolviéndolo, se obtienen los siguientes valores: $\lambda = \frac{bx}{bx+y\sqrt{2pt}} = \frac{b^2}{2pt+b^2}$, $x2pt = yb\sqrt{2pt}$, $\sqrt{2pt} = \frac{by}{x}$, $t = \frac{b^2y^2}{x^2 2p}$, $\lambda = \frac{bx}{bx+\frac{by^2}{x}} = \frac{x^2}{x^2+y^2}$, $\mu = \frac{b^2y^2}{2p(x^2+y^2)}$. La ecuación pedida es: $z = \frac{b^2y^2}{2p(x^2+y^2)}$, o bien: $2p(x^2+y^2)z - b^2y^2 = 0$.

G 128- Se considera la superficie de revolución engendrada por una cónica que gira alrededor de su eje focal. Se corta esta superficie por un plano y se toma esta sección como base de un cono que tiene por vértice uno de los focos de la cónica. Demostrar que este cono es de revolución.

Solución: Las distancias entre un punto de la superficie engendrada y, por un lado, el foco, y por otro, el plano que conteniendo a la directriz, es perpendicular al eje focal, están en la misma relación que las distancias entre un punto de la cónica y, por un lado, el foco, y por otro, la directriz. Por tanto, siendo el foco el origen de coordenadas, y el eje focal el eje XX', la ecuación del plano antes definido, es: $x-\lambda = 0$. La ecuación de la superficie de revolución, es: $x^2+y^2+z^2 = \theta(x-\lambda)^2$. El plano que corta a esta superficie, es: $Ax+By+Cz+D = 0$. Homogeneizando estas dos ecuaciones, se tiene: $x^2+y^2+z^2-\theta(x-\lambda t)^2 = 0$, $Ax+By+Cz+Dt = 0$. Eliminando t, se tiene la ecuación del cono: $x^2+y^2+z^2-\theta\left[x+\frac{\lambda(Ax+By+Cz)}{D}\right]^2 = 0$, es decir: $\left[1-\frac{\theta}{D^2}(D+\lambda A)^2\right]x^2 + \left(1-\frac{\theta}{D^2}\lambda^2B^2\right)y^2 + \left(1-\frac{\theta}{D^2}\lambda^2C^2\right)z^2 - \frac{2\theta}{D^2}(D+\lambda A)\lambda Bxy - \frac{2\theta}{D^2}(D+\lambda A)\lambda Cxz - \frac{2\theta}{D^2}\lambda^2BCyz = 0$. Los números de Jacobi del cono, son: $N = a_{11} - \frac{a_{13}a_{12}}{a_{23}} = 1 - \frac{\theta}{D^2}(D+\lambda A)^2 + \frac{\frac{\theta}{D^2}(D+\lambda A)\lambda C\frac{\theta}{D^2}(D+\lambda A)\lambda B}{\frac{\theta}{D^2}\lambda^2BC} = 1$.

Análogamente, $N' = a_{22} - \frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}} = 1$, $N'' = a_{33} - \frac{a_{13}a_{22}}{a_{12}} = 1$. Siendo iguales los tres números de Jacobi, el cono es de revolución.

H 1- Hallar la ecuación del toro circular engendrado por un círculo al girar alrededor de una recta de su plano. La recta no corta al círculo.

Solución: Sea la circunferencia: $(x-a)^2+z^2-R^2=0,\ y=0$. Sea OZ el eje de revolución. Un paralelo será el formado por: $x^2+y^2=m,\ z=p$. Por tanto, para $x=\pm\sqrt{m}$, se tiene: $(\pm\sqrt{m}-a)^2+p^2-R^2=0$, es decir: $\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}-a\right)^2+z^2-R^2=0$. Operando: $(x^2+y^2+z^2+a^2-R^2)^2-4a(x^2+y^2)=0$.

H 2- Obtener la ecuación del cilindro de generatrices paralelas a la recta $y-x=0,\ z=0$, y que pasa por la curva $y=x^2,\ x=z^2$.

Solución: La ecuación de las rectas paralelas a la recta dada, es: $y-x=\lambda,\ z=\mu$. Sustituyendo en la ecuación de la curva los valores de y,z, se tiene: $\lambda+x=x^2,\ x=\mu^2$, de donde: $\lambda+\mu^2=\mu^4$. Sustituyendo en esta ecuación los valores de λ y μ, se tiene: $y-x+z^2=z^4$. La ecuación pedida es: $z^4-z^2+x-y=0$.

H 3- Hallar la ecuación de un conoide cuyas directrices son el eje Z y la circunferencia $y^2+z^2-R^2=0$, $x-a=0$, y su plano director $z=0$.

Solución: La generatriz es: $y=\lambda x,\ z=\mu$. Luego: $\lambda^2x^2+\mu^2=R^2,\ x=a,\ \lambda^2a^2+\mu^2=R^2$. Por tanto: $\left(\frac{y}{x}\right)^2a^2+z^2-R^2=0$, es decir: $x^2(z^2-R^2)+a^2y^2=0$.

H 4- Dada la superficie $f\equiv x^2yz+3y^2-2xz^2+8z=0$, obtener la ecuación del plano tangente y de la normal en el punto $(1,2,-1)$.

Solución: $f'_x(1,2,-1)=2xyz-2z^2=-6,\ f'_y(1,2,-1)=x^2z+6y=11,\ f'_z(1,2,-1)=x^2y-4xz+8=14$. La ecuación del plano tangente es: $-6(x-1)+11(y-2)+14(z+1)=-6x+11y+14z-2=0$. La de la normal es: $\frac{x-1}{-6}=\frac{y-2}{11}=\frac{z+1}{14}$.

H 5- Hallar la ecuación de la superficie podaria de $xyz=1$, respecto al origen de coordenadas.

Solución: Sea $P(\alpha,\beta,\gamma)$ un punto de $xyz=1$, es decir: $\alpha\beta\gamma=1$. El plano tangente en P, es: $\beta\gamma x+\alpha\gamma y+\alpha\beta z-3=0$. Las ecuaciones de la perpendicular trazada desde el origen sobre este plano, son: $\frac{x}{\beta\gamma}=\frac{y}{\alpha\gamma}=\frac{z}{\alpha\beta}$, es decir: $x=\frac{\gamma z}{\alpha},\ y=\frac{\gamma z}{\beta}$ La intersección de esta recta con el plano, da: $\frac{\beta\gamma^2}{\alpha}z+\frac{\alpha\gamma^2}{\beta}z+\alpha\beta z-3=0$, de donde: $z=\frac{3\alpha\beta}{\beta^2\gamma^2+\alpha^2\gamma^2+\alpha^2\beta^2}$, y sus análogas para x e y. Despejando α,β,γ en función de x,y,z, se tiene: $\alpha^2=\frac{3yz}{x^3+y^2x+z^2x},\ \beta^2=\frac{3xz}{y^3+x^2y+z^2y},\ \gamma^2=\frac{3xy}{z^3+y^2z+x^2z}$. Como $\alpha^2\beta^2\gamma^2=1$, se tiene: $\frac{3yz}{x^3+y^2x+z^2x}\cdot\frac{3xz}{y^3+x^2y+z^2y}\cdot\frac{3xy}{z^3+y^2z+x^2z}=1$. Operando, la ecuación de la superficie podaria, es: $(x^2+y^2+z^2)^3-27xyz=0$.

H 6- Se dan tres ejes rectangulares, la recta $R\equiv x=a,\ y=z$, y la circunferencia $C\equiv z=a$, $x^2+y^2-2a^2=0$, siendo $a>0$. Sea M el punto común a R y C. Se pide: 1º) Hallar la superficie S engendrada por una recta que se desplaza paralelamente al plano YZ, y que se apoya en OX y en C. 2º) Sea MT la tangente a C en M. Hallar la ecuación de la superficie Q engendrada por una recta que se desplaza paralelamente al plano YZ, y que se apoya en OX y en MT. 3º) Sea σ la sección de S por el plano $y=m$, y sea M_0T_0 la tangente a esta curva en el punto donde corta a R. Hallar la ecuación de la superficie U engendrada por una recta que se apoya en OX, MT y M_0T_0. Indicar cómo varía la naturaleza de U cuando M_0 varía de $-\infty$ a $+\infty$.

Solución: 1º) Las coordenadas de M son (a,a,a). Las ecuaciones de la recta paralela a YZ, apoyándose en OX, son: $x=\lambda,\ y=\mu z$. Como también se apoya en C, ha de cumplirse que: $\lambda^2+\mu^2a^2=2a^2$. Introduciendo los valores hallados para λ y μ, se tiene la ecuación de S: $x^2+\frac{y^2}{z^2}a^2=2a^2$, o bien: $x^2z^2+a^2y^2-2a^2z^2=0$. 2º) La ecuación de la recta MT es: $x+y-2a=0,\ z=a$. Las coordenadas del punto genérico de OX, son: $(\mu,0,0)$, y las del punto genérico de MT: $(\lambda,2a-\lambda,a)$. La ecuación de la

recta que pasa por dichos puntos, es: $\frac{x-\mu}{\lambda-\mu}=\frac{y}{2a-\lambda}=\frac{z}{a}$. Por ser paralela a $x=0$, se tiene: $\lambda-\mu=0$. Eliminando λ y μ en la ecuación de la recta, se tiene la ecuación de Q: $xz+ay-2az=0$. 3º) Las ecuaciones de σ son: $y=m$, $x^2z^2-2a^2z^2+a^2m^2=0$. El punto de intersección con R, es (a,m,m). Las ecuaciones de M_0T_0, son: $y=m$, $mx-az=0$. El punto genérico de OX es $(\lambda,0,0)$, el de MT es $(\mu,2a-\mu,a)$, y el de M_0T_0 es (av,m,mv). Las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(\lambda,0,0)$ y por el punto $(\mu,2a-\mu,a)$, son: $\frac{x-\lambda}{\mu-\lambda}=\frac{y}{2a-\mu}=\frac{z}{a}$. Y como pasa por el punto (av,m,mv): $\frac{av-\lambda}{\mu-\lambda}=\frac{m}{2a-\mu}=\frac{mv}{a}$. De tres de estas cuatro ecuaciones, se obtienen los valores de $\mu=\frac{2az-ay}{z}$, $v=\frac{z}{y}$, $\lambda=\frac{2az-ay-ax}{z-a}$. Introduciendo estos valores en la cuarta ecuación, se tiene la ecuación de la superficie U pedida: $ay^2+az^2+axy-mxz-2ayz-amy+(2am-a^2)z=0$, cuyos determinantes son: $A_{44}=\frac{-a}{4}(m-a)^2$, $A=\frac{a^2}{16}(a-m)^4$. Luego para $m=a$, la superficie U es un cilindro degenerado en dos planos secantes reales, y para $m\neq a$, es un hiperboloide de una hoja.

H 7- Hallar la ecuación del cono de vértice $(1,2,0)$ y directriz la curva $x=t, y=t^2, z=t^3-1$.

Solución: Las ecuaciones de la generatriz son: $\frac{x-1}{t-1}=\frac{y-2}{t^2-2}=\frac{z}{t^3-1}$. Operando, se tiene: $t=\frac{3x-y-z-1}{3-x-y}$. Introduciendo este valor en la primera igualdad, por ejemplo, se tiene la ecuación pedida: $7x^3-6x^2y-6x^2z+3xy^2+xz^2+xyz-9x^2-3y^2-z^2+10xz+3yz+9x+6y-8z-7=0$.

H 8- Se dan tres ejes rectangulares y se pide la ecuación del conoide engendrado por una recta que se mueve apoyándose sobre OX, paralela al plano YZ, y tal que la mínima distancia a la recta $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, sea igual a una constante k dada.

Solución: Las ecuaciones de la recta son: $\frac{x-\alpha}{0}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{1}$, siendo su distancia a la recta dada:

$$\frac{\begin{vmatrix}\alpha & 0 & 0\\ a & b & c\\ 0 & \beta & 1\end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix}b & c\\ \beta & 1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}c & a\\ 1 & 0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a & b\\ 0 & \beta\end{vmatrix}^2}}=\frac{\alpha b-\alpha\beta c}{\sqrt{(b-c\beta)^2+a^2+a^2\beta^2}}=k.$$

Sustituyendo en esta igualdad $\alpha=x$, $\beta=\frac{y}{z}$, se tiene la ecuación pedida del conoide: $x(bz-cy)=k\sqrt{(bz-cy)^2+a^2(z^2+y^2)}$, o bien: $(bz-cy)^2(k^2-x^2)+a^2k^2(y^2+z^2)=0$.

H 9- Hallar la superficie engendrada por una recta que se apoya en la circunferencia $x^2+y^2=R^2, z=0$, y en las rectas $x=0, z+a=0; y=0, z-a=0$.

Solución: La recta que se apoya en las dos dadas es: $\frac{x}{\mu}=\frac{y-\lambda}{-\lambda}=\frac{z+a}{2a}$. Cortando por $z=0$, se tiene el punto $\left(\frac{\mu}{2},\frac{\lambda}{2}\right)$ que debe estar sobre la circunferencia. Luego $\mu^2+\lambda^2=4R^2$. Introduciendo en esta ecuación los valores $\mu=\frac{2ax}{z+a}$, $\lambda=\frac{2ay}{a-z}$, se tiene la ecuación pedida: $\frac{a^2y^2}{(a-z)^2}+\frac{a^2x^2}{(a+z)^2}-R^2=0$.

H 10- Demostrar que todo plano tangente a la superficie $x=u^2$, $y=uv$, $z=v^2+2u$, corta a la superficie según dos parábolas.

Solución: Sea el punto genérico de la superficie, de coordenadas (a^2,ab,b^2+2a). El plano tangente en dicho punto es: $\begin{vmatrix}x-a^2 & y-ab & z-b^2-2a\\ 2a & b & 2\\ 0 & a & 2b\end{vmatrix}=x(b^2-a)-2aby+a^2z-a^3=0$. Sustituyendo en esta ecuación: $x=u^2$, $y=uv$, $z=2u+v^2$, se tiene: $(ub-av)^2-a(u-a)^2=0$. Despejando v, se tiene: $v=\frac{bu}{a}\pm\frac{\sqrt{a}\,(u-a)}{a}=\frac{u(b\pm\sqrt{a}\,)}{a}\pm\sqrt{a}$. La curva intersección es: $x=u^2$, $y=\frac{u^2(b\pm\sqrt{a}\,)}{a}\pm u\sqrt{a}$,

$z = 2u + \left[\dfrac{u(b \pm \sqrt{a}\,)}{a} \pm \sqrt{a} \right]^2$. Estas ecuaciones en paramétricas, corresponden a dos parábolas en el espacio.

H 11- Dada la parábola: $x = \dfrac{t}{(t+1)^2}$, $y = \dfrac{t^2}{(t+1)^2}$, $z = \dfrac{t^2+1}{(t+1)^2}$. Hallar su vértice y su foco.

Solución: Haciendo el cambio $\theta = \dfrac{1}{t+1}$, es decir, $t = \dfrac{1-\theta}{\theta}$, las ecuaciones de la parábola son: $x = -\theta^2 + \theta$, $y = \theta^2 - 2\theta + 1$, $z = 2\theta^2 - 2\theta + 1$, siendo, por tanto, los coeficientes: $A_1 = -1$, $B_1 = 1$, $C_1 = 0$, $A_2 = 1$, $B_2 = -2$, $C_2 = 1$, $A_3 = 2$, $B_3 = -2$, $C_3 = 1$. El parámetro θ_V correspondiente al vértice, viene dado por el cociente: $\theta_V = -\dfrac{A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3}{2(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)} = -\dfrac{-1-2-4}{2(1+1+4)} = \dfrac{7}{12}$. Luego el vértice es $\left(\dfrac{35}{144}, \dfrac{25}{144}, \dfrac{74}{144}\right)$. El plano de la parábola es: $\begin{vmatrix} x-0 & -1 & 1 \\ y-1 & 1 & -2 \\ z-1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$, es decir, $2x + z - 1 = 0$. El cono isótropo $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, cortado por dicho plano, da: $5x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$. Luego las direcciones isótropas del plano están dadas por: $m^2 + 5 = 0$. Siendo (α, β) las coordenadas del foco en su plano, se tiene: $y - \beta = m(x - \alpha)$, es decir: $\theta^2 - 2\theta + 1 - \beta = m(-\theta^2 + \theta - \alpha)$. Ordenando esta ecuación, se tiene: $\theta^2(1+m) - \theta(2+m) + 1 - \beta + \alpha m = 0$. Para que esta ecuación tenga una raíz doble, ha de cumplirse que: $(2+m)^2 - 4(1+m)(1-\beta+\alpha m) = (1-4\alpha)m^2 + 4(\beta-\alpha)m + 4\beta = 0$. Como esta ecuación ha de tener las mismas raíces que $m^2 + 5 = 0$, se tiene: $\dfrac{1-4\alpha}{1} = \dfrac{4(\beta-\alpha)}{0} = \dfrac{4\beta}{5}$, de donde: $\alpha = \beta = \dfrac{5}{24}$, siendo $\gamma = 1 - 2\alpha = \dfrac{7}{12}$. El foco es $\left(\dfrac{5}{24}, \dfrac{5}{24}, \dfrac{7}{12}\right)$.

H 12- Dada la esfera $(x-a)^2 + y^2 + z^2 = R^2$, hallar la ecuación del conoide engendrado por una recta que corta a OZ, paralela a XY y tangente a la esfera.

Solución: Ecuaciones de la recta que corta a OZ y es paralela a XY: $y = mx$, $z = p$. Corta a la esfera en: $(1+m^2)x^2 - 2ax + p^2 + a^2 - R^2 = 0$. Como esta ecuación ha de tener una raíz doble (condición de tangencia): $a^2 - (1+m^2)(p^2 + a^2 - R^2) = 0$. Sustituyendo en esta ecuación: $p = z$, $m = \dfrac{y}{x}$, se tiene la ecuación pedida: $x^2z^2 + y^2z^2 - R^2x^2 + (a^2 - R^2)y^2 = 0$.

H 13- Hallar la ecuación del conoide recto de eje OZ, que tiene por directriz la intersección de la superficie $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 1$ con el plano $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 1$.

Solución: Sea la generatriz: $z = \lambda$, $y = mx$. Se tiene: $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{m^2x^2}{4} + \lambda^2 = 1$, $\dfrac{x}{3} + \dfrac{mx}{2} = 1$. Eliminando x entre ambas ecuaciones, se tiene: $\dfrac{\left(\dfrac{1}{9} + \dfrac{m^2}{4}\right)}{\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{m}{2}\right)^2} + \lambda^2 = 1$. Sustituyendo en esta ecuación los valores: $\lambda = z$, $m = \dfrac{y}{x}$, y operando, se tiene la ecuación pedida: $z^2(2x+3y)^2 - 12xy = 0$.

H 14- Dada la superficie $x = a\sin\theta\cos\varphi$, $y = b\sin\theta\sin\varphi$, $z = c\cos\theta$, y el plano $y = 2$, hallar la ecuación del cono que proyecta desde el origen la intersección del plano con la superficie.

Solución: Eliminando los parámetros θ y φ entre las ecuaciones dadas, se tiene: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $y = 2$. Homogeneizando estas ecuaciones, se tiene: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = t^2$, $y = 2t$. Eliminando t entre las dos ecuaciones, se tiene la ecuación pedida: $\dfrac{x^2}{a^2} + y^2\left(\dfrac{1}{b^2} - \dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{z^2}{c^2} = 0$.

H 15- Dada la curva, $x = 1 + t$, $y = -t^2$, $z = 1 + t^3$, hallar las ecuaciones de la recta tangente y del plano normal en el punto $t = 1$.

Solución: El punto dado es $(2, -1, 2)$. Las derivadas de la curva son: $x' = 1$, $y' = -2t$, $z' = 3t^2$, que particularizadas para $t = 1$, dan respectivamente, 1,–2, 3. La recta tangente es: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-2}{3}$. El plano normal es: $x - 2 - 2(y+1) + 3(z-2) = x - 2y + 3z - 10 = 0$.

H 16- Dada la curva $x = at$, $y = bt^2$, $z = t^3$, en donde $2b^2 = 3a$, demostrar que las tangentes forman un ángulo constante con la recta que pasa por el origen y por el punto $(1,0,1)$, y hallarlo.

Solución: Las ecuaciones de la recta dada son: $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$, es decir: $x = z$, $y = 0$. Los parámetros directores de la tangente, son: $x' = a$, $y' = 2bt$, $z' = 3t^2$. Por tanto, siendo θ el ángulo entre la tangente y la recta dada, se tiene: $\cos\theta = \frac{a+3t^2}{\sqrt{2(a^2+4b^2t^2+9t^4)}} = \frac{a+3t^2}{\sqrt{2(a+3t^2)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Luego, $\theta = \frac{\pi}{4}$.

H 17- Sobre una esfera de radio 1, hay una curva cuyas coordenadas esféricas verifican la ecuación $\theta + \varphi = \frac{\pi}{2}$. Obtener las ecuaciones paramétricas y cartesianas de la curva.

Solución: Las ecuaciones de la curva son: $x = \rho\sin\theta\cos\varphi$, $y = \rho\sin\theta\sin\varphi$, $z = \rho\cos\theta$. Como $\rho = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$, se tiene: $x = \sin^2\theta$, $y = \sin\theta\cos\theta$, $z = \cos\theta$. En cartesianas: $x + z^2 - 1 = 0$, $y^2 - xz^2 = 0$.

H 18- Dada la curva $x = t^3$, $y = \frac{t^3+1}{t}$, $z = \frac{t^2-1}{t}$, hallar la condición para que cuatro puntos de ella sean coplanarios, determinando el plano que los contiene.

Solución: Sea el plano buscado: $x + Ay + Bz + C = 0$. Luego: $t^3 + \frac{A(t^3+1)}{t} + \frac{B(t^2-1)}{t} + C = 0$. Operando, se tiene: $t^4 + At^3 + Bt^2 + Ct + A - B = 0$. Por tanto: $\Sigma t_i = -A$, $\Sigma t_it_j = B$, $\Sigma t_it_jt_k = -C$, $t_1t_2t_3t_4 = A - B = -\Sigma t_i - \Sigma t_it_j$. Luego la condición pedida es: $t_1t_2t_3t_4 + \Sigma t_i + \Sigma t_it_j = 0$. El plano es: $x - y\Sigma t_i + z\Sigma t_it_j - \Sigma t_it_jt_k = 0$.

H 19- Dada la curva $x = t^4$, $y = t^3$, $z = t^2$, encontrar las condiciones para que ocho puntos de la curva sean coesféricos.

Solución: Sea la ecuación de la esfera: $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$. Luego se tiene que: $t^8 + t^6 + t^4 + At^4 + Bt^3 + Ct^2 + D = t^8 + t^6 + (1+A)t^4 + Bt^3 + Ct^2 + D = 0$. Las condiciones pedidas son: $\Sigma t_i = 0$, $\Sigma t_it_j = 1$, $\Sigma t_it_jt_k = 0$, $\Sigma t_it_jt_kt_lt_mt_nt_p = 0$.

H 20- Se da la curva $x = t$, $y = t^2$, $z = t^4$. 1º) Hallar la relación entre las t de cuatro puntos para que sean coplanarios. 2º) Por la tangente AT trazada a la curva en un punto A de la misma, se hace pasar un plano variable Q. Este plano encuentra a la curva en B y C. Hallar el lugar geométrico de la recta BC. 3º) Un plano R cualquiera encuentra a la curva en cuatro puntos A,B,C,D. Las rectas AB y CD se cortan en M, las rectas AC y BD se cortan en N, las rectas AD y BC lo hacen en P. Hallar el lugar geométrico de M, N y P cuando R se desplaza paralelamente a sí mismo. Demostrar que este lugar es una cúbica, y expresarla en paramétricas racionales. 4º) Demostrar que esta cúbica encuentra a la curva dada en tres puntos.

Solución: 1º) Sea la ecuación del plano $ux + vy + wz + r = 0$. Se tiene: $ut + vt^2 + wt^4 + r = 0$. Luego: $\Sigma t_i = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0$. 2º) Por ser tangente en A, $t_1 = t_2$, luego: $2t_1 + t_3 + t_4 = 0$. Las ecuaciones de la recta BC son: $\frac{x-t_3}{t_4-t_3} = \frac{y-t_3^2}{t_4^2-t_3^2} = \frac{z-t_3^4}{t_4^4-t_3^4}$. Luego, despejando: $x - t_3 = \frac{y-t_3^2}{t_3+t_4} = \frac{z-t_3^4}{(t_3+t_4)(t_3^2+t_4^2)}$. De donde se obtiene: $(y-t_3^2)(t_3^2+t_4^2) = z - t_3^4$, $y(t_3^2+t_4^2) - t_3^2t_4^2 = z$. Haciendo $S = t_3 + t_4$, $P = t_3t_4$, se tiene que: $y(S^2-2P) - P^2 = z$. Además: $(x-t_3)(t_3+t_4) = y - t_3^2$, $xS - P = y$, $S = -2t_1$, $P = -2t_1x - y$. Luego: $y(4t_1^2 + 4t_1x + 2y) - (y + 2t_1x)^2 = z$. De donde: $4t_1^2x^2 - y^2 - 4t_1^2y + z = 0$, que es un paraboloide hiperbólico, siendo t_1 el parámetro correspondiente al punto A. 3º) Sea $R \equiv ux + vy + wz + r = 0$, y sean A',B',C',D' las proyecciones de A,B,C,D sobre $z = 0$. Seguidamente se aplica que el centro es una propiedad proyectiva, y se considera que M,N,P son centros de las cónicas degeneradas que pasan por A,B,C,D. Como $x = t$, $y = t^2 = x^2$, $z = t^4 = y^2$, se tiene la cónica: $x^2 = y$. Sustituyendo estos valores en la ecuación del plano, se obtiene la cónica: $ux + vy + wy^2 + r = 0$. El haz de cónicas que pasan por esta cónica y por la cónica $x^2 = y$, es: $ux + vy + wy^2 + r + \lambda(x^2 - y) = \lambda x^2 + wy^2 + ux + y(v-\lambda) + r = 0$, cuyas derivadas son: $f'_x = 2\lambda x + u = 0$, $f'_y = 2wy + v - \lambda = 0$, de donde: $\lambda = \frac{-u}{2x} = v + 2wy$, es decir: $2vx + 4wxy + u = 0$. Para que las cónicas del haz degeneren, se debe cumplir que su determinante sea nulo: $\begin{vmatrix} \lambda & 0 & \frac{u}{2} \\ 0 & w & \frac{v-\lambda}{2} \\ \frac{u}{2} & \frac{v-\lambda}{2} & r \end{vmatrix} = \lambda rw - \frac{u^2w}{4} - \frac{\lambda(v-\lambda)^2}{4} = 0$. Como $r = -ux - vy - wz$, se tiene:

$-\lambda w(ux+vy+wz)-\dfrac{u^2w}{4}-\dfrac{\lambda(v-\lambda)^2}{4}=0$. Introduciendo en esta ecuación los valores de λ antes encontrados, se tiene: $\dfrac{uw(ux+vy+wz)}{2x}-\dfrac{u^2w}{4}-\dfrac{u(-2wy)^2}{8x}=0$. Operando, las ecuaciones del lugar pedido son: $2wy^2+ux+2vy+2wz=0$, $4wxy+2vx+u=0$. En paramétricas: $x=\dfrac{-u}{2t}$, $y=\dfrac{t-v}{2w}$, $z=\dfrac{-t^3+v^2t+u^2w}{4w^2t}$. Introduciendo estos valores en la ecuación $Ax+By+Cz+D=0$, se tiene: $\dfrac{-u}{2t}A+\dfrac{t-v}{2w}B+\dfrac{-t^3+v^2t+u^2w}{4w^2t}C+D=0$, que es de tercer grado, luego es una cúbica. 4º) En la superficie $4wxy+2vx+u=0$, están los puntos del lugar de M, N y P, y también los de la alabeada $4wt\cdot t^2+2vt+u=0$ (esta ecuación se obtiene sustituyendo en la ecuación de la superficie los valores de la curva dada en el enunciado). Luego las raíces de $4wt^3+2vt+u=0$, corresponden a las tres t de los tres puntos de encuentro.

H 21- Se da la curva $x=t^4$, $y=t^3$, $z=t$. 1º) Hallar la condición para que cuatro puntos de la curva, sean coplanarios. 2º) Hallar la condición para que tres puntos de la curva, estén alineados. 3º) Hallar la ecuación general de las secantes triples y su lugar geométrico.

Solución: 1º) La intersección de la curva con el plano $ux+vy+wz+r=0$, viene dada por la ecuación: $ut^4+vt^3+wt+r=0$. Por tanto, la única condición es: $\Sigma t_it_j=t_1t_2+t_1t_3+t_1t_4+t_2t_3+t_2t_4+t_3t_4=0$. 2º) Para que estén alineados, los puntos deben estar sobre los planos: $x=az+p$, $y=bz+q$. Las t de estos puntos vienen dadas por: $t^4=at+p$, $t^3=bt+q$. De esta última se deduce que: $t_1+t_2+t_3=0$, y de la primera, que: $t_1+t_2+t_3+t_4=0$. Luego: $t_4=0$, $t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3=0$. 3º) Los planos se transforman en: $x=t_1t_2t_3z$, $y=t_1t_2t_3$, de donde: $x=yz$, que es el lugar geométrico de las secantes triples.

H 22- Probar que toda superficie de revolución que cumple la condición de ser plana la curva de contacto de un cono cualquiera circunscrito a la superficie, es una cuádrica.

Solución: Sea $f(x^2+y^2,z)=0$, la superficie de grado m. Sea (α,β,γ) el vértice del cono. El plano tangente a la superficie en el punto (x,y,z), es: $(X-x)f'_x+(Y-y)f'_y+(Z-z)f'_z=0$. Y como pasa por (α,β,γ): $(\alpha-x)f'_x+(\beta-y)f'_y+(\gamma-z)f'_z=0$. Esta ecuación, junto con $f(x^2+y^2,z)=0$, da la curva intersección, de grado $m(m-1)$. Como la curva es plana, su ecuación es: $f(x^2+y^2,z)=0$, $ux+vy+wz+r=0$, que es de grado m. Como los dos grados han de ser iguales, por ser la misma curva, ha de verificarse que $m=m(m-1)$, de donde $m=2$, luego es una cuádrica.

H 23- Hallar el conoide engendrado por una recta que se apoya en OX, cuyo plano director es el plano YOZ, siendo la mínima distancia de dicha recta a la recta $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{3}$, constante e igual a 4.

Solución: La recta que se apoya en OX y es paralela a YOZ, es: $\dfrac{x-a}{0}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$. Su distancia a la recta dada, es: $4=\dfrac{\begin{vmatrix} a & 0 & 0\\ 2 & -1 & 3\\ 0 & b & c\end{vmatrix}}{\sqrt{(c+3b)^2+4c^2+4b^2}}=\dfrac{-ac-3ab}{\sqrt{5c^2+13b^2+6bc}}$. Introduciendo los valores: $a=x$, $b=y$, $c=z$, y operando, se tiene la ecuación pedida: $16(13y^2+5z^2+6yz)=x^2(3y+z)^2$.

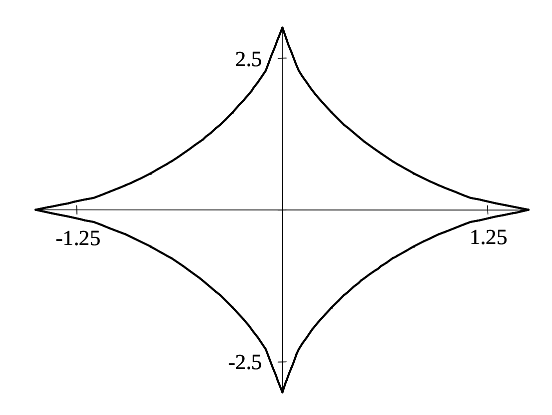
H 24- Se da la curva $x=pe^\theta\cos\theta$, $y=pe^\theta\sin\theta$, $z=\dfrac{p}{2}e^{2\theta}$. 1º) Hallar la proyección de la curva sobre el plano XY. La curva está situada en una superficie de revolución S. Hallarla y definirla. 2º) La tangente en un punto M de la curva, corta al plano XY en un punto N. Hallar y definir el lugar geométrico de N cuando M varía sobre la curva dada. Siendo M' la proyección de M sobre XY, los puntos ONM' forman un triángulo cuya naturaleza se pide. 3º) La citada tangente MN, es tangente también a la superficie S', simétrica de S respecto de XY. Demostrarlo y hallar las coordenadas del punto de tangencia M_1. 4º) El punto M_1 se proyecta sobre XY en M'_1. Hallar su lugar geométrico al moverse M_1 sobre S'. Definir el triángulo $OM'M'_1$.

Solución: 1º) La proyección de la curva sobre el plano XY viene dada por las ecuaciones: $x=pe^\theta\cos\theta$, $y=pe^\theta\sin\theta$, es decir: $x^2=p^2e^{2\theta}\cos^2\theta$, $y^2=p^2e^{2\theta}\sin^2\theta$. Luego: $x^2+y^2=p^2e^{2\theta}$, o bien: $\rho=\pm pe^\theta$. Como: $x^2+y^2=p^2e^{2\theta}=2pz$, se tiene que la superficie de revolución S es el paraboloide elíptico $x^2+y^2=2pz$. 2º) Siendo: $x'=x-y$, $y'=y+x$, $z'=2z$, la tangente en M es: $\dfrac{X-x}{x-y}=\dfrac{Y-y}{x+y}=\dfrac{Z-z}{2z}$.

Esta tangente corta al plano $z=0$ en el punto $N\left(\frac{x+y}{2},\frac{y-x}{2},0\right)$. Luego la ecuación del lugar de N es: $x=\frac{1}{2}pe^{\theta}(\sin\theta+\cos\theta)$, $y=\frac{1}{2}pe^{\theta}(\sin\theta-\cos\theta)$, $z=0$. O bien, $\rho=\frac{p\sqrt{2}}{2}e^{\theta}$. Haciendo $\omega=\theta-\frac{\pi}{4}$, $\rho=\frac{p\sqrt{2}}{2}e^{\omega+\frac{\pi}{4}}$, que es una espiral logarítmica. Siendo: $O(0,0)$, $N\left(\frac{x+y}{2},\frac{y-x}{2}\right)$, $M'(x,y)$, se tiene que: $ON=NM'$, $OM'=\sqrt{2}\cdot ON$. Luego el triángulo ONM' es rectángulo isósceles, siendo recto el ángulo en N. 3º) $S'\equiv x^2+y^2+2pz=0$. Luego: $\frac{2\left(z-\frac{p}{2}e^{2\theta}\right)^2}{e^{2\theta}}+p^2e^{2\theta}+2p\left(z-\frac{p}{2}e^{2\theta}\right)+2pz=0$. De donde: $\left(z+\frac{p}{2}e^{2\theta}\right)^2=0$, con lo que queda demostrado que MN es tangente a S', siendo el punto de tangencia $M_1\left(pe^{\theta}\sin\theta,-pe^{\theta}\cos\theta,-\frac{p}{2}e^{2\theta}\right)$. 4º) Las coordenadas de M_1' son: $(pe^{\theta}\sin\theta,-pe^{\theta}\cos\theta)$. Luego su lugar geométrico es: $\rho=\pm pe^{\omega-\frac{\pi}{2}}$. Siendo: $O(0,0)$, $M'(\rho e^{\theta}\cos\theta,\rho e^{\theta}\sin\theta)$, $M_1'(\rho e^{\theta}\sin\theta,-\rho e^{\theta}\cos\theta)$, se tiene que: $OM'=OM_1'$, $M'M_1'=\sqrt{2}\cdot OM'$. Luego el triángulo $OM'M_1'$ es rectángulo isósceles, siendo recto el ángulo en O.

H 25- Dada la superficie $x=(a+bu)\cos v$, $y=(b+au)\sin v$, $z=hu$, 1º) Demostrar que es reglada, hallando las generatrices rectilíneas. 2º) Hallar la ecuación de la curva de contacto del cilindro que proyecta el contorno aparente de esta superficie, sobre el plano XOY.

Solución: 1º) $u=\frac{z}{h}$. Luego: $x=\frac{b}{h}z\cos v+a\cos v$, $y=\frac{a}{h}z\sin v+b\sin v$. Por tanto, la superficie es reglada, siendo las ecuaciones de las generatrices rectilíneas las obtenidas. 2º) El plano tangente a la superficie es: $\begin{vmatrix} x-(a+bu)\cos v & y-(b+au)\sin v & z-hu \\ b\cos v & a\sin v & h \\ -(a+bu)\sin v & (b+au)\cos v & 0 \end{vmatrix}=0$. Para que sea tangente al cilindro proyectante: $\begin{vmatrix} b\cos v & a\sin v \\ -(a+bu)\sin v & (b+au)\cos v \end{vmatrix}=0$, de donde $u=-\frac{a^2\sin^2 v+b^2\cos^2 v}{ab}$. Sustituyendo este valor en las ecuaciones de la superficie, se obtienen las ecuaciones pedidas: $x=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 v$, $y=\frac{b^2-a^2}{b}\sin^3 v$, $z=-h\frac{a^2\sin^2 v+b^2\cos^2 v}{ab}$. Por tanto, la ecuación de la curva sobre el plano XY, es: $(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}=(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}$. 3º) El dibujo de esta curva para $a=2$, $b=1$, es el siguiente:



H 26- Dada la curva $x=at$, $y=bt^2$, $z=ct^3$, se trazan los planos osculadores en tres puntos A,B,C. Hallar el área del triángulo formado por las intersecciones de los tres planos osculadores con el plano ABC.

Solución: El plano osculador en un punto genérico de la curva, es: $\begin{vmatrix} x-at & y-bt^2 & z-ct^3 \\ a & 2bt & 3ct^2 \\ 0 & 2b & 6ct \end{vmatrix}=$ $=\frac{1}{2abc}\left(\frac{3t^2x}{a}-\frac{3ty}{b}+\frac{z}{c}-t^3\right)=0$. Por cada punto del espacio (α,β,γ) pasan tres planos osculadores, según las tres raíces t_1,t_2,t_3 de la ecuación: $t^3-\frac{3\alpha t^2}{a}+\frac{3\beta t}{b}-\frac{\gamma}{c}=0$. Las coordenadas de este punto en

función de estas tres raíces, son: $\alpha = \frac{a\Sigma t_i}{3}$, $\beta = \frac{b\Sigma t_i t_j}{3}$, $\gamma = ct_i t_j t_k$. La ecuación del plano ABC es: $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ at_1 & bt_1^2 & ct_1^3 & 1 \\ at_2 & bt_2^2 & ct_2 & 1 \\ at_3 & bt_3^2 & ct_3^3 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Desarrollando el determinante y simplificando, la ecuación del plano ABC es: $\frac{\Sigma t_i t_j}{a}x - \frac{\Sigma t_i}{b}y + \frac{z}{c} - t_i t_j t_k = 0$. Esta ecuación se satisface para las coordenadas α, β, γ, calculadas más arriba, luego los cuatro planos pasan por el mismo punto, por lo que el área del triángulo definido en el enunciado, es nula.

H 27- Dado un cilindro cuya sección recta en el plano XOY, es la cardioide $\rho = a(1+\cos\theta)$, demostrar que existe una esfera tal que su intersección con el cilindro es una hélice cuyo cilindro rectificante es el dado.

Solución: En la cardioide: $ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\theta = \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}\,d\theta = 2a\cos\frac{\theta}{2}d\theta$. Luego: $s = \int 2a\cos\frac{\theta}{2}d\theta = 4a\sin\frac{\theta}{2} + C$. La ecuación de la hélice es: $\rho = a(1+\cos\theta)$, $z = 4ak\sin\frac{\theta}{2} + C$. La ecuación de la esfera, en coordenadas cilíndricas, es: $\rho^2 + z^2 = R^2$. La intersección del cilindro y la esfera viene dada por: $a^2(1+\cos\theta)^2 + z^2 = R^2$. De donde $z = \sqrt{R^2 - a^2(1+\cos\theta)^2}$. Para que este valor sea igual a $4ak\sin\frac{\theta}{2}$, ha de tenerse que: $R^2 = 16a^2k^2\sin^2\frac{\theta}{2} + a^2(1+\cos\theta)^2 = 16a^2k^2\sin^2\frac{\theta}{2} + 2a^2\cos^2\frac{\theta}{2}$. Para $k^2 = \frac{1}{8}$, se tiene que: $R^2 = 2a^2$. Luego el enunciado se cumple para la esfera de ecuación: $\rho^2 + z^2 = 2a^2$.

H 28- Se da la parábola $y^2 - 2px = 0$, $z = 0$. Por un punto A del plano XY se trazan las tangentes a la parábola, que tocan a la curva en B y C. Se considera el triedro trirrectángulo que pasa por ABC. Hallar: 1º) El lugar geométrico del vértice V del triedro. 2º) Los puntos dobles y las generatrices rectilíneas de la superficie hallada. 3º) El lugar geométrico de los puntos A que corresponden a puntos de dicha superficie situados en el plano $z - h = 0$.

Solución: 1º) Las coordenadas de los cuatro vértices son: $A[2p\lambda\mu, p(\lambda+\mu), 0]$, $B(2p\lambda^2, 2p\lambda, 0)$, $C(2p\mu^2, 2p\mu, 0)$, $V(x,y,z)$. En el triángulo rectángulo VBC, se tiene: $VB^2 + VC^2 = BC^2$, es decir: $(x-2p\lambda^2)^2 + (y-2p\lambda)^2 + z^2 + (x-2p\mu^2)^2 + (y-2p\mu)^2 + z^2 = (2p\lambda^2 - 2p\mu^2)^2 + (2p\lambda - 2p\mu)^2$. Luego, operando, se tiene: $x^2 + y^2 + z^2 - 2p(\lambda^2+\mu^2)x - 2p(\lambda+\mu)y + 4\lambda\mu p^2(1+\lambda\mu) = 0$ (**I**). En relación con los otros dos triángulos rectángulos VAB y VAC, planteando las correspondientes ecuaciones: $VA^2 + VB^2 = AB^2$, $VA^2 + VC^2 = AC^2$, desarrollándolas y operando y simplificando en ellas, se obtienen las dos ecuaciones siguientes: $x^2 + y^2 + z^2 - 2p\lambda(\lambda+\mu)x - p(3\lambda+\mu)y + 2\lambda p^2(2\lambda^2\mu + \lambda + \mu) = 0$ (**II**), $x^2 + y^2 + z^2 - 2p\mu(\lambda+\mu)x - p(3\mu+\lambda)y + 2\mu p^2(2\mu^2\lambda + \lambda + \mu) = 0$ (**III**). De (**I**) y (**II**) se obtiene: $2\mu x + y - 2p\lambda(2\lambda\mu + 1) = 0$; de (**I**) y (**III**): $2\lambda x + y - 2p\mu(2\lambda\mu + 1) = 0$. De donde: $\lambda + \mu = \frac{-y}{2x}$, $\lambda\mu = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{p}\right)$. Introduciendo estos valores en (**I**), se tiene la ecuación del lugar del vértice V del triedro: $2x(y^2+z^2) - 4px^2 + py^2 - 2p^2x = 0$. 2º) Obteniendo las primeras derivadas parciales de esta ecuación, igualándolas a cero, y resolviendo el sistema, se tienen los puntos singulares $(0,0,\pm p)$. Obligando a que la ecuación del lugar contenga a la recta de ecuaciones: $x = a\rho + \alpha$, $y = b\rho + \beta$, $z = c\rho + \gamma$, se obtiene la ecuación: $2a(b^2+c^2)\rho^3 + (4ab\beta + 4ac\gamma + 2b^2\alpha + 2c^2\alpha + pb^2 - 4pa^2)\rho^2 + $ $+(2a\beta^2 + 2a\gamma^2 + 4b\alpha\beta + 4c\alpha\gamma - 8pa\alpha + 2pb\beta - 2p^2a)\rho + 2\alpha\beta^2 + 2\alpha\gamma^2 - 4p\alpha^2 + p\beta^2 - 2p^2\alpha = 0$. En esta ecuación, igualando a cero sus coeficientes, se tienen dos soluciones. La primera solución, $a = b = \alpha = \beta = 0$, que proporciona la generatriz: $\frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z-\gamma}{0}$, es decir: $x = 0$, $y = 0$. La segunda solución, $a = c = \gamma = 0$, $\alpha = \frac{-p}{2}$, que proporciona la generatriz: $\frac{x + \frac{p}{2}}{0} = \frac{y-\beta}{b} = \frac{z}{0}$, es decir: $x = \frac{-p}{2}$, $z = 0$. 3º) Introduciendo en las coordenadas de A, los valores encontrados para $\lambda\mu$ y para $\lambda + \mu$, se tiene que, siendo α, β dichas coordenadas: $\alpha = -p - x$, $\beta = \frac{-py}{2x}$. De donde se obtiene que: $x = -\alpha - p$, $y = \frac{2\beta(\alpha+p)}{p}$. Sustituidos estos valores en la ecuación del lugar, junto con $z = h$, y cambiando α, β por x, y, se tiene el lugar pedido: $4x^2y^2 + 6pxy^2 + 2p^2y^2 + 2p^3x + p^2b^2 + p^4 = 0$.

H 29- Hallar la ecuación en su plano, de la curva $x^2+y^2+z^2=4$, $x+2y-z+1=0$.

Solución: Se traslada el origen a un punto del plano, por ejemplo $(0,0,1)$, con lo que las ecuaciones de la curva se transforman en: $x^2+y^2+(z+1)^2-4=0$, $x+2y-z=0$. Siendo el plano $Ax+By+Cz=0$, se tiene que: $\cos\theta=\frac{\pm C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{-1}{\sqrt{6}}$, $\sin\theta=\sqrt{\frac{5}{6}}$, $\cos\varphi=\frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{-2}{\sqrt{5}}$, $\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}}$. Se aplican las fórmulas de Euler para las secciones planas, con lo que se obtienen las siguientes igualdades: $x=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi\cos\theta=\frac{-2x'}{\sqrt{5}}+\frac{y'}{\sqrt{5}\sqrt{6}}$, $y=x'\sin\varphi+y'\cos\varphi\cos\theta=\frac{x'}{\sqrt{5}}+\frac{2y'}{\sqrt{5}\sqrt{6}}$, $z=y'\sin\theta=y'\sqrt{\frac{5}{6}}$. Introduciendo estos valores en la ecuación dada, y cambiando x', y', por x, y, se tiene la ecuación pedida: $\left(\frac{-2x}{\sqrt{5}}+\frac{y}{\sqrt{30}}\right)^2+\left(\frac{x}{\sqrt{5}}+\frac{2y}{\sqrt{30}}\right)^2+\left(y\sqrt{\frac{5}{6}}+1\right)^2-4=0$. Operando, se tiene: $x^2+y^2+2\sqrt{\frac{5}{6}}\,y-3=0$.

H 30- Dada la superficie $x=R\cos\theta$, $y=R\sin\theta$, $z=R$, hallar la curva situada sobre ella tal que sus tangentes forman ángulo constante con el plano $z=0$.

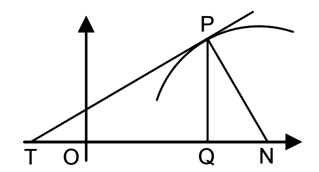
Solución: Sea la ecuación de la curva buscada: $x=R\cos\theta$, $y=R\sin\theta$, $z=R$, donde R es función de θ (las tres coordenadas dependen de una sola variable, θ). Las ecuaciones de las tangentes en un punto de la curva, son: $\frac{x-R\cos\theta}{-R\sin\theta+R'\cos\theta}=\frac{y-R\sin\theta}{R\cos\theta+R'\sin\theta}=\frac{z-R}{R'}$. El coseno del ángulo V que esta tangente forma con el eje OZ, cuyos parámetros directores son $(0,0,1)$, viene dado por la siguiente expresión: $\cos V=\frac{R'}{\sqrt{(-R\sin\theta+R'\cos\theta)^2+(R\cos\theta+R'\sin\theta)^2+R'^2}}=\frac{R'}{\sqrt{R^2+2R'^2}}$. Como el ángulo que la tangente forma con $z=0$, es constante, también lo es el ángulo V, que es su complementario. Por tanto, se tiene que: $R'^2=C^2(R^2+2R'^2)$. Luego, $\frac{R'}{R}=\frac{\pm C}{\sqrt{1-2C^2}}$. Es decir: $\frac{dR}{R}=\pm\frac{C}{\sqrt{1-2C^2}}d\theta$. Integrando, se tiene que: $R=e^{k\theta}$. Por tanto, la curva buscada es: $x=e^{k\theta}\cos\theta$, $y=e^{k\theta}\sin\theta$, $z=e^{k\theta}$.

Problemas de Geometría Diferencial

Sección I - GEOMETRÍA DIFERENCIAL EN EL PLANO $(*)$

I 1- Hallar las longitudes de la tangente, normal, subtangente y subnormal, de la curva $y = 15x^2 - 2x - 9$, en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:



Se tiene: $y = 47$, $y' = 58$. Según la figura, la tangente es $PT = \left|\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}\right| = \frac{47\sqrt{3365}}{58} = 47{,}007$, la normal es $PN = \left|y\sqrt{1+y'^2}\right| = 47\sqrt{3365} = 2726{,}405$, la subtangente es $QT = \left|\frac{y}{y'}\right| = \frac{47}{58} = 0{,}81$, y la subnormal es $QN = |yy'| = 2726$.

I 2- Dado el haz de curvas $x^2 - a^2 + \lambda(y^2 - b^2) = 0$, y un punto fijo (α,β), hallar el lugar geométrico de los puntos de contacto de las tangentes trazadas desde dicho punto a las curvas del haz.

Solución: Siendo: $f'_x = 2x$, $f'_y = 2\lambda y$, $f'_z = -2a^2 - 2b^2\lambda$, la curva polar de (α,β) es: $\alpha x + \beta\lambda y - a^2b^2 = 0$. Eliminando λ entre esta ecuación y la dada: $\frac{a^2+b^2-\alpha x}{\beta y} = \frac{x^2-a^2}{y^2-b^2}$. La ecuación del lugar pedido es: $(a^2+b^2-\alpha x)(y^2-b^2) - (x^2-a^2)\beta y = 0$.

I 3- Dada la curva $x^2 + y^2 = 9$, hallar las tangentes paralelas a la dirección $y = 2x$.

Solución: $f'_x = 2x$, $f'_y = 2y$, $y' = \frac{-x}{y} = 2$. Las raíces del sistema: $x^2 + y^2 = 9$, $x + 2y = 0$, son: $x = \pm\frac{6}{\sqrt{5}}$, $y = \mp\frac{3}{\sqrt{5}}$. Las tangentes son: $y + \frac{3}{\sqrt{5}} = 2\left(x - \frac{6}{\sqrt{5}}\right)$, $y - \frac{3}{\sqrt{5}} = 2\left(x + \frac{6}{\sqrt{5}}\right)$.

I 4- Dada la curva $x = t^2$, $y = t^3 - t^2$, hallar la ecuación del conjunto de los coeficientes angulares de las tangentes trazadas desde el punto $(1,4)$.

Solución: Ecuación de la tangente: $y - t^3 + t^2 = \frac{y'}{x'}(x - t^2) = \frac{3t^2-2t}{2t}(x - t^2)$. Particularizando para $(1,4)$, se tiene: $4 - t^3 + t^2 = \frac{3t^2-2t}{2t}(1 - t^2)$. De donde: $t^3 - t^2(1+m) + m - 4 = 0$. Como ha de tener una raíz común con la derivada: $m = \frac{y'}{x'} = \frac{3t^2-2t}{2t}$, es decir: $t = \frac{2m+2}{3}$. Sustituyendo este valor: $\frac{8(m+1)^3}{27} - \frac{4(m+1)^3}{9} + m - 4 = 0$. Operando: $4(m+1)^3 - 27m + 108 = 0$.

I 5- Hallar la ecuación del haz de tangentes trazadas desde $(-1,0)$ a la curva $y^2 = 2px$.

Solución: La tangente es: $y = m(x+1)$, de donde: $m = \frac{y}{x+1}$. Derivando la ecuación dada: $2yy' = 2p$. Luego: $y' = \frac{p}{y} = m = \frac{y}{x+1}$. La ecuación pedida es: $y^2 - p(x+1) = 0$.

$(*)$ En la sección E se han estudiado problemas similares a algunos de los planteados en esta sección.

I 6- Hallar la ecuación de los coeficientes angulares de las tangentes trazadas desde (α,β) a la curva $y = x^3$.

Solución: La tangente es: $y-\beta = m(x-\alpha)$. La intersección con la curva es: $x^3 = mx - m\alpha + \beta$. Esta ecuación ha de tener una raíz común con la derivada de la ecuación dada: $y' = 3x^2$. Es decir: $x = \left(\frac{m}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$. Por tanto: $\left(\frac{m}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = m\left(\frac{m}{3}\right)^{\frac{1}{2}} - m\alpha + \beta$. Operando: $\left(\frac{m}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m}{3} - m\right) = m\alpha - \beta$. La ecuación pedida es: $4m^3 - 27(m\alpha-\beta)^2 = 0$.

I 7- Hallar el conjunto de las tangentes al círculo $x^2+y^2 = R^2$, paralelas a la dirección $y = mx+n$.

Solución: $x^2+(mx+\lambda)^2 - R^2 = 0$, $(1+m^2)x^2+2m\lambda x+\lambda^2-R^2 = 0$. Haciendo que la raíz sea doble: $m^2\lambda^2-(1+m^2)(\lambda^2-R^2) = 0$. Luego: $\lambda^2 = R^2(1+m^2)$. Las tangentes son: $y = mx \pm R\sqrt{1+m^2}$, o bien: $(y-mx)^2 = R^2(1+m^2)$.

I 8- Dada la curva $y = x^3$, hallar la ecuación de su normal en el punto $(1,1)$.

Solución: $y' = 3x^2 = 3$. La normal es: $y-1 = \frac{-1}{3}(x-1)$, es decir: $x+3y-4 = 0$.

I 9- Dada la curva $x^2+y^2 = 9$, hallar la ecuación de la normal en el punto de abscisa $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Solución: El punto es $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$. Derivando la ecuación de la curva y particularizando para el punto dado: $2x+2yy' = 0$, $y' = \frac{-x}{y} = -1$. La normal es: $y - \frac{3\sqrt{2}}{2} = x - \frac{3\sqrt{2}}{2}$, es decir: $y = x$.

I 10- Hallar la normal de la curva $x = 2\cos\alpha$, $y = 2\sin\alpha$, para $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Solución: El punto es $(0,2)$. Particularizando las derivadas para este punto: $x' = -2\sin\alpha = -2$, $y' = 2\cos\alpha = 0$. La normal es: $y-2 = \frac{2}{0}(x-0)$, es decir: $x = 0$.

I 11- Dada la curva $x^2+y^2-4x-4y+4 = 0$, hallar el conjunto de las normales trazadas desde el punto $(4,4)$.

Solución: La ecuación de la normal es: $xf'_{y_1} - yf'_{x_1} + y_1f'_{x_1} - x_1f'_{y_1} = 0$. Particularizada para $(4,4)$, se tiene: $y-4 = m(x-4)$, es decir: $mx-y+4-4m = 0$. Como: $f'_x = 2x-4$, $f'_y = 2y-4$, se tiene, identificando coeficientes: $\frac{m}{2y-4} = \frac{-1}{-2x+4} = \frac{4-4m}{y(2x-4)-x(2y-4)} = \frac{1-m}{x-y}$. De los dos primeros términos, $m = \frac{2y-4}{2x-4}$. Del primero y tercero, $m = 1+\frac{-x+y}{2x-4}$. Luego: $\frac{2y-4}{2x-4} = 1+\frac{-x+y}{2x-4}$. Operando: $2y-4 = -x+y+2x-4$. Es decir: $x = y$.

I 12- Hallar la ecuación diferencial del haz de circunferencias $x^2+y^2-\lambda x = 0$.

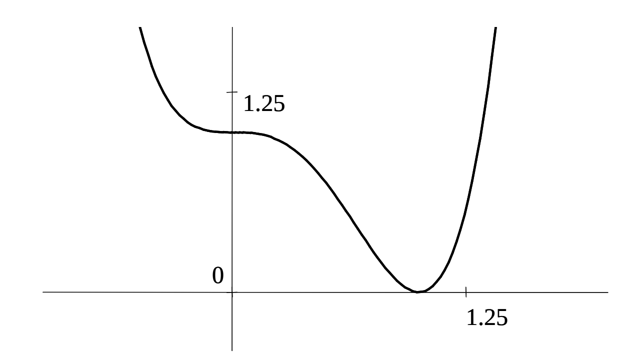
Solución: Derivando: $2x+2yy'-\lambda = 0$. De donde: $\lambda = 2x+2yy' = \frac{x^2+y^2}{x}$. Sustituyendo este valor en la ecuación dada, se tiene la ecuación pedida: $x^2-y^2+2xyy' = 0$.

I 13- Encontrar una curva cuya pendiente en un punto sea igual al doble de la abscisa de dicho punto.

Solución: $y' = \frac{dy}{dx} = 2x$. Luego: $dy = 2xdx$. Integrando: $y = x^2+C$.

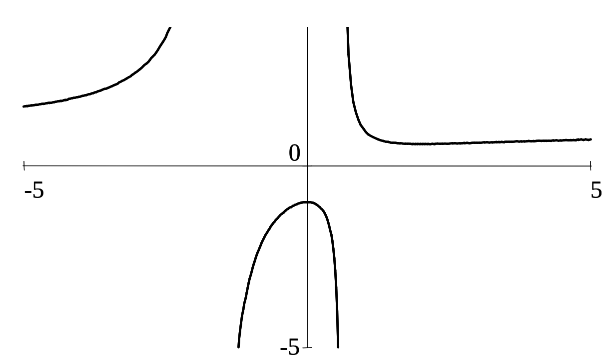
I 14- Dada la curva $y = 3x^4-4x^3+1$, hallar máximos, mínimos, puntos de inflexión y concavidad.

Solución: Derivando: $y' = 12x^3-12x^2 = 12x^2(x-1)$, $y'' = 36x^2-24x = 12x(3x-2)$. Para $y' = 0$, se tienen los valores: $x = 0$, $x = 1$. Para $y'' = 0$, se tienen los valores: $x = 0$, $x = \frac{2}{3}$. Los puntos de inflexión corresponden a $(0,1)$ y a $\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{27}\right)$. El punto $(1,0)$ corresponde a un mínimo de y, pues $y''(1) = 12 > 0$. Para $x < 0$, $y'' > 0$, luego la concavidad de la curva es hacia el eje $+y$. Para $0 < x < \frac{2}{3}$, $y'' < 0$, luego la concavidad es hacia el eje $-y$. Para $x > \frac{2}{3}$, $y'' > 0$, la concavidad es hacia el eje $+y$. La curva se ha representado en el siguiente dibujo:



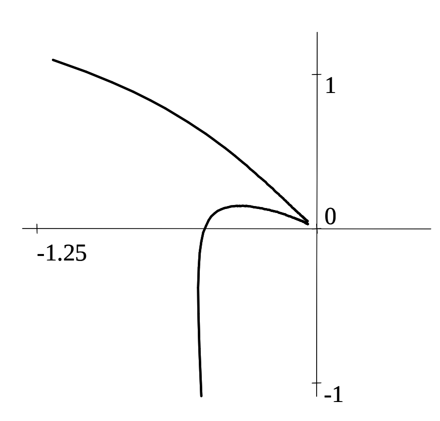
I 15- Hallar máximos y mínimos de la curva $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x - 1}$.

Solución: Derivando: $y' = \dfrac{2x(x-2)}{(x^2+x-1)^2}$, $y'' = \dfrac{-4(x^3-3x^2-1)}{(x^2+x-1)^3}$. Para $y' = 0$, se tienen los valores: $x = 0$, $x = 2$. Para $x = 0$, $y'' = -4 < 0$, luego el punto $(0,-1)$ es un máximo. Para $x = 2$, $y'' = \dfrac{4}{25} > 0$, luego el punto $\left(2, \dfrac{3}{5}\right)$ es un mínimo. La curva se ha representado en el siguiente dibujo:



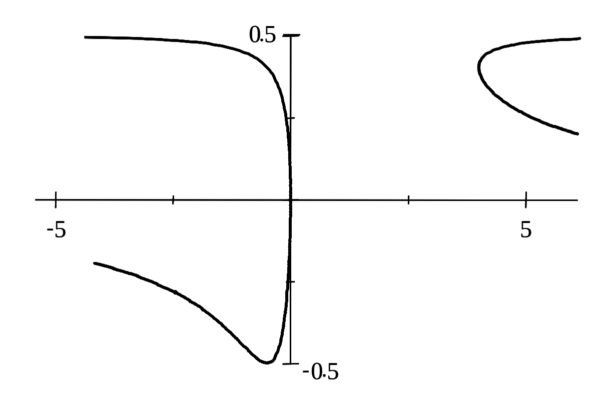
I 16- Hallar máximos y mínimos de la curva $x = \dfrac{t}{1-t^3}$, $y = \dfrac{1+t}{t^3}$.

Solución: Derivando: $x' = \dfrac{2t^3+1}{(1-t^3)^2}$, $y' = \dfrac{-2t-3}{t^4}$. Para $\dfrac{y'}{x'} = \dfrac{-(2t+3)(1-t^3)^2}{t^4(2t^3+1)} = 0$, se tienen los valores: $t = 1$, $t = \dfrac{-3}{2}$. Para $t = 1$, se tiene el punto $(\infty, 2)$, que corresponde a una asíntota. Para $t = \dfrac{-3}{2}$, se obtiene el punto $\left(\dfrac{-12}{35}, \dfrac{4}{27}\right)$, que es un máximo de y. Para $\dfrac{x'}{y'} = \dfrac{t^4(2t^3+1)}{-(2t+3)(1-t^3)^2} = 0$, se tienen los valores: $t = 0$, $t = \dfrac{-1}{\sqrt[3]{2}}$. Para $t = 0$, se tiene el punto $(0, \infty)$, que corresponde a una asíntota. Para $t = \dfrac{-1}{\sqrt[3]{2}}$, se obtiene el punto $\left(\dfrac{-2}{3\sqrt[3]{2}}, \dfrac{2-2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}\right)$, que es un mínimo de x. La curva se ha representado en el siguiente dibujo:



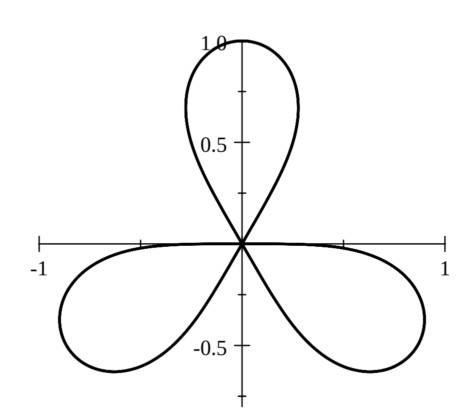
I 17- Hallar máximos y mínimos de la curva $x = \dfrac{at^2}{t-1}$, $y = \dfrac{at}{t^2+1}$, siendo $a > 0$.

Solución: Derivando: $x' = \dfrac{at(t-2)}{(t-1)^2}$, $y' = \dfrac{-a(t^2-1)}{(t^2+1)^2}$. Para $\dfrac{y'}{x'} = \dfrac{-(t-1)^3(t+1)}{(t^2+1)^2 t(t-2)} = 0$, se tienen los valores: $t = 1$, $t = -1$, $t = \infty$. Para $t = 1$, se tiene el punto $\left(\infty, \dfrac{a}{2}\right)$, que corresponde a una asíntota. Para $t = -1$, se tiene el punto $\left(\dfrac{-a}{2}, \dfrac{-a}{2}\right)$, que es un mínimo de y. Para $t = \infty$, se tiene el punto $(\infty, 0)$ que corresponde a una asíntota. Para $\dfrac{x'}{y'} = \dfrac{(t^2+1)^2 t(t-2)}{-(t-1)^3(t+1)} = 0$, se tienen los valores: $t = 0$, $t = 2$, $t = \pm i$. Para $t = 0$, se tiene el punto $(0,0)$, que es un máximo de x. Para $t = 2$, se tiene el punto $\left(4a, \dfrac{2a}{5}\right)$, que es un mínimo de x. Para $t = \pm i$, los puntos son imaginarios. (Ver problemas I 24, I 28). La curva se ha representado en el siguiente dibujo:



I 18- Dada la curva $(x^2+y^2)^3 - y(y^2-3x^2) = 0$, hallar sus puntos singulares y las tangentes en ellos.

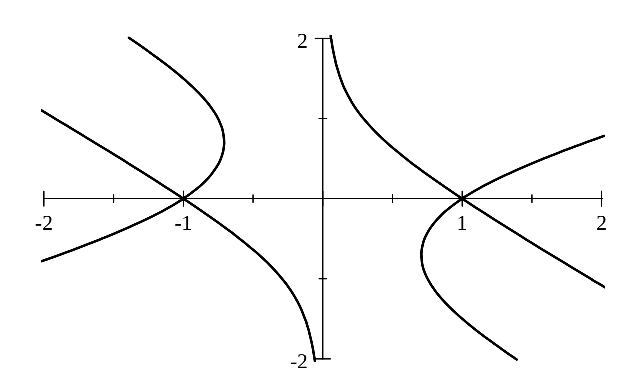
Solución: Derivando e igualando a cero: $f'_x = 3(x^2+y^2)^2 2x + 6xy = 0$, $f'_y = 3(x^2+y^2)^2 2y - 3y^2 = 0$. Resolviendo el sistema formado por estas dos ecuaciones y la dada, se obtiene el punto singular $(0,0)$. Los términos de menor grado de la ecuación dada son: $y(y^2-3x^2)$, que igualados a cero, dan las tangentes: $y = 0$, $y = \pm\sqrt{3}\,x$. La curva se ha representado en el siguiente dibujo:



I 19- Hallar los puntos singulares y las tangentes en ellos, de la curva $2xy^3 + 3x^2y^2 - (x^2-a^2)^2 = 0$.

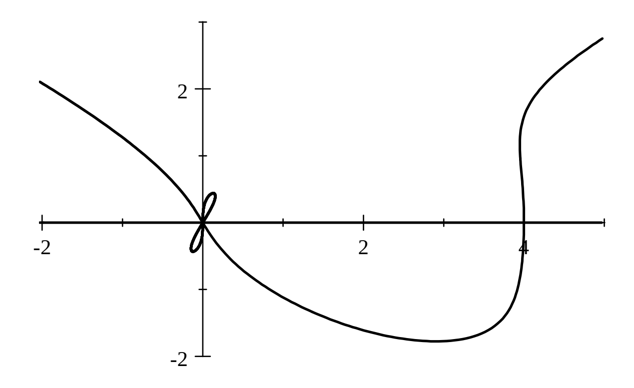
Solución: Derivando e igualando a cero: $f'_x = 2y^3 + 6xy^2 - 4(x^2-a^2)x = 0$, $f'_y = 6xy^2 + 6x^2y = 0$. Resolviendo el sistema formado por estas dos ecuaciones y la dada, se obtienen los puntos singulares $(\pm a, 0)$. Trasladando el origen de coordenadas al punto $(a,0)$, se tiene la ecuación de la curva: $2(x+a)y^3 + 3(x+a)^2y^2 - (x^2+2ax)^2 = 0$, cuyos términos de menor grado son: $3a^2y^2 - 4a^2x^2$, que igualados a cero, dan las tangentes: $y = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}x$. Deshaciendo la traslación, las tangentes a la curva dada son: $y = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}(x-a)$. Procediendo similarmente con el punto $(-a,0)$, se obtienen las tangentes:

$y = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}(x+a)$. La curva se ha representado en el siguiente dibujo:



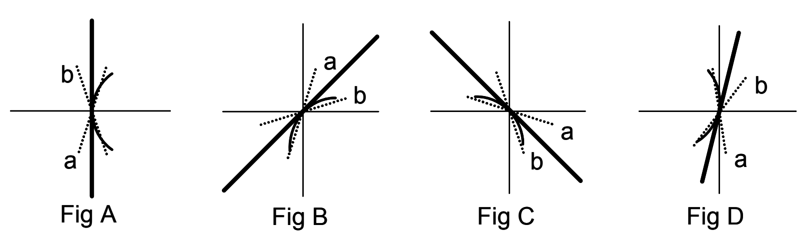
I 20- Dada la curva $x^4y - y^6 + xy(y^2 - 4x^2) = 0$, hallar las tangentes en el punto singular $(0,0)$.

Solución: Los términos de menor grado son: $xy(y^2 - 4x^2)$, que igualados a cero, dan las tangentes: $x = 0$, $y = 0$, $y = \pm 2x$. Ahora bien, la recta $y = 0$ forma parte de la curva dada, luego no es una tangente. Por tanto, las tangentes en el origen son: $x = 0$, $y = \pm 2x$. La curva se ha representado en el siguiente dibujo (la curva incluye el eje $y = 0$).



I 21- Estudiar la posición de la curva $y^5 - 16x^4 + 4x^3y + 16x^2y^2 - 4xy^3 = 0$, respecto a las tangentes en $(0,0)$.

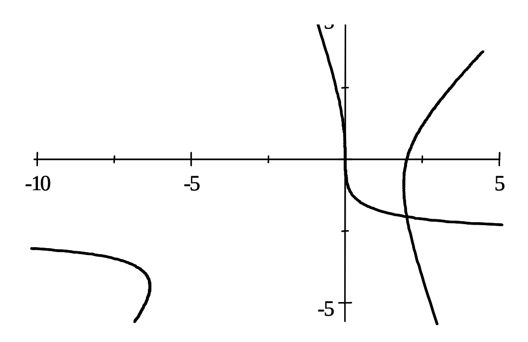
Solución:



Los términos de menor grado son: $-16x^4 + 4x^3y + 16x^2y^2 - 4xy^3$, que igualados a cero, dan las tangentes en el origen: $x = 0$, $y = x$, $y = -x$, $y = 4x$. Para estudiar la posición de la curva con relación a la tangente $x = 0$ (figura A), se hace $x = \theta y$, para $\theta \to 0$. Sustituyendo este valor en la ecuación de la curva y despreciando los términos de mayor grado en θ, se obtiene: $y = 4\theta + 0(\theta)$. Para $\theta > 0$, se tiene la recta a de la figura, siendo $y > 0$. Para $\theta < 0$, se tiene la recta b de la figura, siendo $y < 0$. Para $y = x$ (figura B), se hace $y = (1+\theta)x$, para $\theta \to 0$. Sustituyendo este valor en la ecuación de la curva, se tiene: $x = -24\theta + 0(\theta)$. Para $\theta > 0$ (recta a de la figura), $x < 0$. Para $\theta < 0$ (recta b), $x > 0$. Para $y = -x$ (figura C), se hace $y = (-1+\theta)x$, para $\theta \to 0$. Sustituyendo este valor en la ecuación de la curva, se tiene: $x = -40\theta + 0(\theta)$. Para $\theta > 0$ (recta a), $x < 0$. Para $\theta < 0$ (recta b), $x > 0$. Para $y = 4x$ (figura D), se hace $y = (4+\theta)x$, para $\theta \to 0$. Sustituyendo este valor en la ecuación de la curva, se tiene: $x = \frac{15}{256}\theta + 0(\theta)$. Para $\theta > 0$ (recta a), $x > 0$. Para $\theta < 0$ (recta b), $x < 0$.

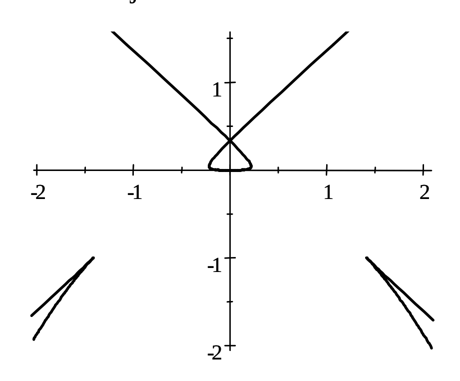
I 22- Hallar los puntos singulares y las tangentes en ellos, de la curva $x = \dfrac{t^3}{(t-1)(t+2)}$, $y = \dfrac{t^2-2t}{t-1}$.

Solución: Ha de cumplirse que: $\dfrac{t_1^3}{(t_1-1)(t_1+2)} = \dfrac{t_2^3}{(t_2-1)(t_2+2)}$, $\dfrac{t_1^2-2t_1}{t_1-1} = \dfrac{t_2^2-2t_2}{t_2-1}$. Operando, se obtiene: $t_1^2t_2^2 + t_1t_2(t_1+t_2) - 2(t_1^2+t_2^2+t_1t_2) = 0$, $t_1t_2 - (t_1+t_2) + 2 = 0$. Haciendo $S = t_1+t_2$, $P = t_1t_2$, se tiene: $P^2 + PS - 2(S^2-P) = 0$, $P - S + 2 = 0$, cuya solución es: $S = 0$, $P = -2$, obteniéndose $t = \pm\sqrt{2}$, siendo el punto singular $(2,-2)$. Derivando: $x' = \dfrac{t^4+2t^3-6t^2}{(t-1)^2(t+2)^2}$, $y' = \dfrac{t^2-2t+2}{(t-1)^2}$. Para $t = \sqrt{2}$, $\dfrac{y'}{x'} = -3-2\sqrt{2}$. Para $t = -\sqrt{2}$, $\dfrac{y'}{x'} = -3+2\sqrt{2}$. Por tanto, las ecuaciones de las tangentes son: $y+2 = \left(-3\pm 2\sqrt{2}\right)(x-2)$. La curva se harepresentado en el siguiente dibujo:



I 23- Hallar los puntos singulares y las tangentes en ellos, de la curva $x = \dfrac{t(3t^2-2)}{4(1-t^2)}$, $y = \dfrac{t^4}{4(1-t^2)}$.

Solución: Cuando no es fácil resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, $x(t_1) = x(t_2)$, $y(t_1) = y(t_2)$, como es el caso de este problema, se puede encontrar un valor de t que anule a x' y a y', que correspondería a un punto singular. Derivando e igualando a cero: $x' = \dfrac{(t^2-2)(-3t^2+1)}{4(1-t^2)^2} = 0$, $y' = \dfrac{-2t^3(t^2-2)}{4(1-t^2)^2} = 0$, obteniéndose $t = \pm\sqrt{2}$, siendo los puntos singulares $\left(\pm\sqrt{2},-1\right)$. Como $\dfrac{y'}{x'} = \dfrac{2t^3}{-3t^2+1} = \mp\dfrac{4}{5}\sqrt{2}$, las tangentes son: $y+1 = \mp\dfrac{4}{5}\sqrt{2}\left(x\pm\sqrt{2}\right)$. (Ver problemas I 26, I 33). La curva se ha representado en el siguiente dibujo:

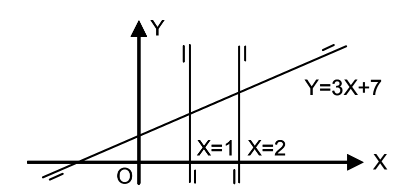


I 24- Hallar los puntos singulares y las tangentes en ellos, de la curva $x = \dfrac{at^2}{t-1}$, $y = \dfrac{at}{t^2+1}$.

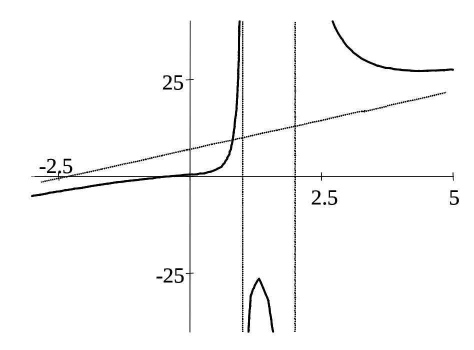
Solución: Resolviendo el sistema: $\dfrac{at_1^2}{t_1-1} = \dfrac{at_2^2}{t_2-1}$, $\dfrac{at_1}{t_1^2+1} = \dfrac{at_2}{t_2^2+1}$, haciendo $t_1+t_2 = S$, $t_1t_2 = P$, se tiene: $S = P = 1$, luego: $t^2-t+1 = 0$, $t = \dfrac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$. El punto correspondiente es (a,a). Como las tangentes son imaginarias, dicho punto es un punto aislado. (Ver problemas I 17, I 28).

I 25- Calcular las asíntotas de la curva $y = \dfrac{3x^3-2x^2+x+1}{x^2-3x+2}$, estudiando la posición relativa de la curva y las asíntotas.

Solución:



El denominador se anula para $x = 1$, $x = 2$, que definen dos asíntotas paralelas al eje OY. Para estudiar la posición relativa de la curva y la asíntota $x = 1$, se hace $x = 1 + \theta$, $\theta \to 0$, obteniéndose para $\theta > 0$, que $y \to +\infty$, y para $\theta < 0$, que $y \to -\infty$. En relación a la asíntota $x = 2$, se hace $x = 2 + \theta$, $\theta \to 0$, obteniéndose para $\theta > 0$, que $y \to +\infty$, y para $\theta < 0$, que $y \to -\infty$ (ver la figura). Como para $x \to \infty$, $y \to \infty$, la curva tiene una asíntota general $y = ax + b$. Para obtenerla se hallan los siguientes límites: $a = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^3 - 2x^2 + x + 1}{x^3 - 3x^2 + 2x} = 3$, $b = \lim_{x\to\infty} (y - 3x) = \lim_{x\to\infty} \frac{7x^2 - 5x + 1}{x^2 - 3x + 2} = 7$. Por tanto, la asíntota es: $y = 3x + 7$. Para estudiar la posición relativa se calcula la diferencia entre la ordenada de la curva y_c y la de la asíntota y_a, obteniéndose $y_c - y_a = \frac{16x - 13}{x^2 - 3x + 2} = \frac{16 - \frac{13}{x}}{x - 3 + \frac{2}{x}}$. Para $x \to +\infty$, $y_c > y_a$. Para $x \to -\infty$, $y_a > y_c$. Las posiciones estudiadas se han representado en el esquema de más arriba, y la curva en el dibujo siguiente:

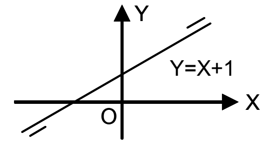


I 26- Hallar las asíntotas de la curva $x = \frac{t(3t^2 - 2)}{4(1 - t^2)}$, $y = \frac{t^4}{4(1 - t^2)}$.

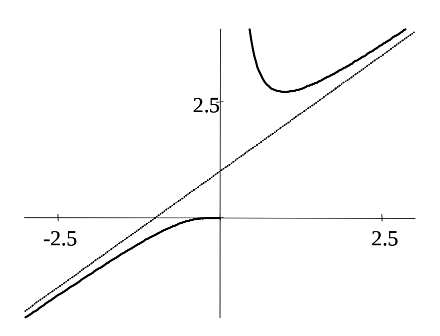
Solución: No hay asíntotas paralelas a los ejes, pues no hay un valor de t que haga infinita una variable para un valor finito de la otra. Para $t = \pm 1$, las dos variables toman valor infinito. Siendo la ecuación de la asíntota general $y = ax + b$, se tiene que para $t = 1$: $a = \lim_{t=1} \frac{y}{x} = \lim_{t=1} \frac{t^4}{t(3t^2 - 2)} = 1$, $b = \lim_{t=1} (y - x) =$ $= \lim_{t=1} \frac{t^4 - 3t^3 + 2t}{4(1 - t^2)} = \lim_{t=1} \frac{t(t^2 - 2t - 2)}{4(t + 1)} = \frac{3}{8}$. La asíntota es: $y = x + \frac{3}{8}$. Para $t = -1$, procediendo de forma análoga, se tiene la asíntota: $y = -x + \frac{3}{8}$. (Ver problemas I 23, I 33). Para $t = \pm\infty$, se tienen dos ramas parabólicas según el eje $-y$.

I 27- Hallar la asíntota de $y = xe^{\frac{1}{x}}$, y su posición relativa respecto a la curva.

Solución:



Por desarrollo en serie, se tiene: $e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + \ldots$; $y = xe^{\frac{1}{x}} = x + 1 + \frac{1}{2x} + \ldots$. La asíntota es: $y = x + 1$. La posición relativa está dada por $y_c - y_a = \frac{1}{2x}$. Para $x > 0$, $y_c > y_a$. Para $x < 0$, $y_c < y_a$. Las posiciones estudiadas se han representado en el esquema de más arriba, y la curva en el dibujo siguiente:

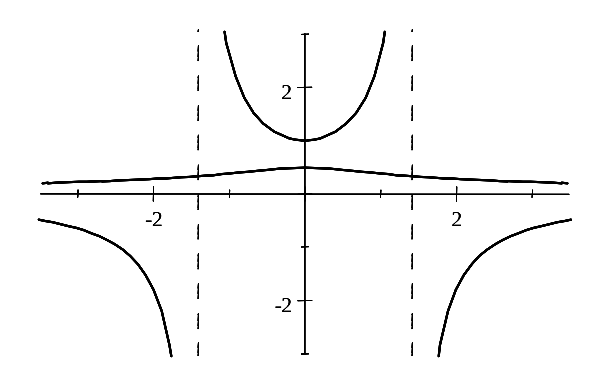


I 28- Hallar las asíntotas de $x = \dfrac{at^2}{t-1}$, $y = \dfrac{at}{t^2+1}$.

Solución: Para $t = 1$, $x \to \infty$, $y = \dfrac{1}{2}$. Para $t \to \infty$, $x \to \infty$, $y = 0$. Las asíntotas son: $y = \dfrac{1}{2}$, $y = 0$. (Ver problemas I 17, I 24).

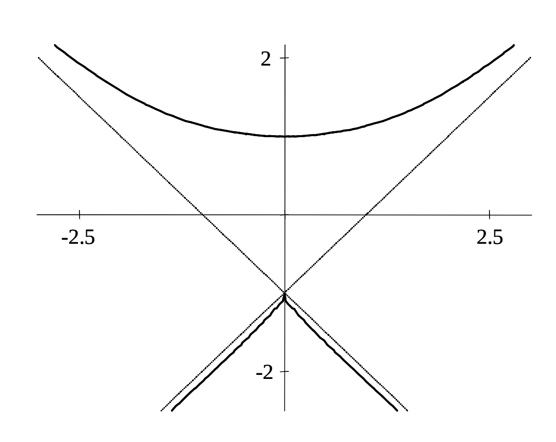
I 29- Hallar las asíntotas de la curva $x = \pm\sqrt{t^2 - 3t + 2}$, $y = \dfrac{1}{t}$.

Solución: Para $t \to \infty$, $x = \pm\infty$, $y = 0$. Para $t = 0$, $x = \pm\sqrt{2}$, $y = \infty$. Las asíntotas son: $y = 0$, $x = \sqrt{2}$, $x = -\sqrt{2}$. La curva se ha representado en el dibujo siguiente:



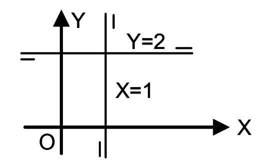
I 30- Hallar las asíntotas de la curva $x = \tan t + \sin t$, $y = \dfrac{1}{\cos t}$.

Solución: No hay asíntotas paralelas a los ejes, pues no hay un valor de t que haga infinita a una variable para un valor finito de la otra. Para hallar la asíntota general $y = ax + b$, se tiene que para $t = \pm\dfrac{\pi}{2}$, $x \to \infty$, $y \to \infty$. Para $t = \dfrac{\pi}{2}$: $a = \lim\limits_{t=\frac{\pi}{2}} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{t=\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{\cos t(\tan t + \sin t)} = \lim\limits_{t=\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{\sin t + \sin t\cos t} = 1$, $b = \lim\limits_{t=\frac{\pi}{2}} (y - x) = \lim\limits_{t=\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{1}{\cos t} - \dfrac{1}{\tan t + \sin t}\right) = \lim\limits_{t=\frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - \sin t - \sin t\cos t}{\cos t} = \lim\limits_{t=\frac{\pi}{2}} \dfrac{-\cos t - \cos^2 t + \sin^2 t}{-\sin t} = -1$. La asíntota es: $y = x - 1$. Para $t = \dfrac{-\pi}{2}$, la asíntota es: $x + y + 1 = 0$. La curva se ha representado en el dibujo siguiente:

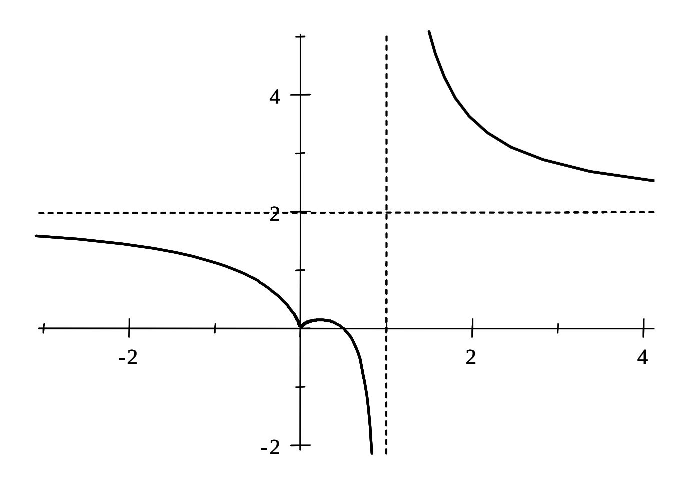


I 31- Hallar la posición de la curva $x = \dfrac{1}{1-t^3}$, $y = \dfrac{1+t}{t^3}$, respecto a sus asíntotas $x = 1$, $y = 2$.

Solución:



Para $t = 0$, $x = 1$, $y = \infty$. Para $t = 1$, $x = \infty$, $y = 2$. Para estudiar la posición de la curva respecto a la asíntota $x = 1$, se hace $t = \theta$, $\theta \to 0$, con lo que $y = \dfrac{1+\theta}{\theta^3} \simeq \dfrac{1}{\theta^3}$. Para $\theta > 0$, $y \to +\infty$. Para $\theta < 0$, $y \to -\infty$. Para estudiar la posición de la curva respecto a la asíntota $y = 2$, se hace $t = 1+\theta$, $\theta \to 0$, con lo que $x = \dfrac{1}{1-(1+\theta)^3} \simeq \dfrac{-1}{3\theta}$, y la diferencia entre las ordenadas de la curva y de la asíntota, es $y_c - y_a = \dfrac{1+t-2t^3}{t^3} \simeq -5\theta$. Para $\theta > 0$, $x < 0$, $y_a > y_c$. Para $\theta < 0$, $x > 0$, $y_c > y_a$. Las posiciones estudiadas se han representado en el esquema de más arriba, y la curva en el dibujo siguiente:



I 32- Hallar la asíntota de $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^6-3x^4}}{\sqrt{x^2+2x-1}}$, y estudiar la posición relativa de la curva con la asíntota.

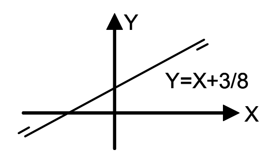
Solución:

$$y = \frac{(x^6-3x^4)^{\frac{1}{3}}}{(x^2+2x-1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^2\left(1-\frac{3}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}}{x\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x\left(1-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}+\ldots\right)}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)^2+\ldots} =$$

$= \dfrac{x^2-1-\frac{1}{x^2}+\ldots}{x+1-\frac{3}{2x}+\ldots} = x-1+\dfrac{3}{2x}+\ldots$. Luego la asíntota es: $y = x-1$. La posición relativa viene definida por $y_c - y_a = \dfrac{3}{2x}$. Para $x > 0$, $y_c > y_a$. Para $x < 0$, $y_c < y_a$. Estas posiciones se han representado en el esquema de más arriba.

I 33- Estudiar la posición relativa de la asíntota $y = x + \frac{3}{8}$, de la curva $x = \frac{t(3t^2-2)}{4(1-t^2)}$, $y = \frac{t^4}{4(1-t^2)}$.

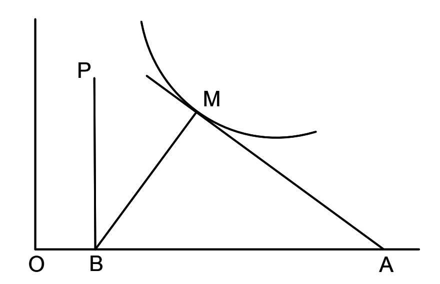
Solución:



La asíntota se obtiene para $t = 1$. La diferencia entre la ordenada y_c de la curva y la ordenada y_a de la asíntota, es $y_c - y_a = \frac{t^4}{4(1-t^2)} - \frac{t(3t^2-2)}{4(1-t^2)} - \frac{3}{8} = \frac{2t^3-4t^2-t+3}{-8(t+1)}$. Haciendo $t = 1+\theta$, $\theta \to 0$, se tiene: $y_c - y_a \simeq \frac{3\theta}{16}$, $x \simeq \frac{1}{-8\theta}$. Para $\theta > 0$, $x < 0$, $y_c > y_a$. Para $\theta < 0$, $x > 0$, $y_c < y_a$. Las posiciones estudiadas se han representado en el esquema de más arriba. (Ver problemas I 23, I 26).

I 34- Dada la curva $y = f(x)$, sean A y B los puntos en que la tangente y la normal trazadas en un punto M de la curva, cortan al eje OX. En B se traza la perpendicular al eje OX, sobre la que se toma el punto P de forma que $BP = BM$. Los puntos P describen la curva $y = \varphi(x)$. Demostrar que la tangente a esta curva trazada en P, pasa por A.

Solución:



Sean: $P(\alpha,\beta)$, $\beta = \varphi(\alpha)$, $M(x,y)$, $MB = y\sqrt{1+y'^2} = PB = \beta$, $\alpha = OB = x+yy'$, $P\left(x+yy', y\sqrt{1+y'^2}\right)$, $OA = x - \frac{y}{y'}$. Las ecuaciones paramétricas de $\beta = \varphi(\alpha)$, son: $\alpha = x+yy'$, $\beta = y\sqrt{1+y'^2}$, cuyo parámetro es x. Como: $\alpha'_x = (x+yy')'_x = 1+y'^2+yy''$, $\beta'_x = \left(y\sqrt{1+y'^2}\right)'_x = y'\sqrt{1+y'^2} + \frac{yy'y''}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{y'(1+y'^2)+yy'y''}{\sqrt{1+y'^2}}$, se tiene la pendiente de la tangente: $m = \frac{\beta'_x}{\alpha'_x} = \frac{y'(1+y'^2)+yy'y''}{\sqrt{1+y'^2}\,(1+y'^2+yy'')} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$. Luego la ecuación de la tangente trazada en el punto P de la curva $\beta = \varphi(\alpha)$, es: $\beta - y\sqrt{1+y'^2} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}(\alpha - x - yy')$. Esta tangente corta a $\beta = 0$, en el punto cuya abscisa es: $\alpha = \frac{-y(1+y'^2)}{y'} + x + yy' = x - \frac{y}{y'} = OA$. Por tanto, la tangente a $y = \varphi(x)$, trazada en P, pasa por A.

I 35- Determinar el orden de contacto de las curvas $y-1 = (x-2)^4$, $y-1 = 3(x-2)^5$.

Solución: El punto de contacto es $(2,1)$. Derivando sucesivamente ambas ecuaciones, y particularizando los valores obtenidos para el citado punto, se tiene para la primera curva: $y' = 4(x-2)^3 = 0$, $y'' = 12(x-2)^2 = 0$, $y''' = 24(x-2) = 0$, $y^{iv} = 24$, y para la segunda curva: $y' = 15(x-2)^4 = 0$, $y'' = 60(x-2)^3 = 0$, $y''' = 180(x-2)^2 = 0$, $y^{iv} = 360(x-2) = 0$, $y^{v} = 360$. Al tener en dicho punto el mismo valor las derivadas primera, segunda y tercera, y siendo distinta la cuarta, el contacto de las dos curvas en $(2,1)$ es de 3º orden, es decir, las curvas tienen cuatro puntos confundidos en $(2,1)$.

I 36- Determinar el orden del contacto entre las curvas $x^2+y^2-8 = 0$, $x^2+xy+y^2-4x-4y+4 = 0$.

Solución: Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de las dos curvas, se obtiene el punto de contacto $(2,2)$. Derivando sucesivamente ambas ecuaciones y particularizando los resultados para el

citado punto, se obtienen para la primera curva: $2x+2yy'=0$, $y'=-1$; $2+2y'^2+2yy''=0$, $y''=-1$; $6y'y''+2yy'''=0$, $y'''=\frac{-3}{2}$; $6y''^2+8y'y'''+2yy^{iv}=0$, $y^{iv}=\frac{-9}{2}$. Para la segunda curva, se tiene: $2x+y+xy'+2yy'-4-4y'=0$, $y'=-1$; $2+2y'+xy''+2y'^2+2yy''-4y''=0$, $y''=-1$; $3y''+xy'''+$ $+6y'y''+2yy'''-4y'''=0$, $y'''=\frac{-3}{2}$; $4y'''+xy^{iv}+6y''^2+8y'y'''+2yy^{iv}-4y^{iv}=0$, $y^{iv}=-6$. Al ser iguales las tres primeras derivadas y distinta la cuarta, el contacto es de 3º orden, es decir, las curvas tienen cuatro puntos confundidos en $(2,2)$.

I 37- Dadas las curvas $y^3-y^2-x^2=0$, $x^2-2y^2+3y-1=0$, determinar el orden de su contacto.

Solución: Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, se obtiene el punto de contacto $(0,1)$. Derivando sucesivamente y particularizando los resultados para el citado punto, se tiene para la primera curva: $3y^2y'-2yy'-2x=0$, $y'=0$;
$6yy'^2+3y^2y''-2y'^2-2yy''=0$, $y''=2$;
$6y'^3+18yy'y''+3y^2y'''-6y'y''-2yy'''=0$, $y'''=0$;
$36y'^2y''+18yy''^2+24yy'y'''+3y^2y^{iv}-6y''^2-8y'y'''-2yy^{iv}=0$, $y^{iv}=-48$;
$90y'y'''^2+60y'^2y'''+60yy''y'''+30yy'y^{iv}+3y^2y^v-20y''y'''-10y'y^{iv}-2yy^v=0$, $y^v=0$;
$90y''^3+360y'y''y'''+90y'^2y^{iv}+60yy'''^2+90yy''y^{iv}+36yy'y^{iv}+3y^2y^{vi}-20y'''^2-30y''y^{iv}-12y'y^v-$ $-2yy^{vi}=0$, $y^{vi}=5040$.
Para la segunda curva, se tiene: $2x-4yy'+3y'=0$, $y'=0$;
$2-4y'^2-4yy''+3y''=0$, $y''=2$;
$-12y'y''-4yy'''+3y'''=0$, $y'''=0$;
$-12y''^2-16y'y'''-4yy^{iv}+3y^{iv}=0$, $y^{iv}=-48$;
$-40y''y'''-20y'y^{iv}-4yy^v+5y^v=0$, $y^v=0$;
$-40y'''^2-60y''y^{iv}-24y'y^v-4yy^{vi}+3y^{vi}=0$, $y^{vi}=5760$.
Al ser iguales las cinco primeras derivadas y distinta la sexta, el contacto en $(0,1)$ es de 5º orden, es decir que las curvas tienen seis puntos confundidos en $(0,1)$.

I 38- Se desea determinar una parábola de eje paralelo a OY, de tal modo que tenga un contacto de orden máximo (que sea osculatriz) con la curva $a^2y=x^3$, en el punto (a,a).

Solución: La ecuación general de una parábola de eje paralelo a OY es: $x^2+2Ay+2Bx+C=0$. Derivando la ecuación de la curva dada y particularizando los resultados para (a,a), se tiene: $a^2y'-3x^2=0$, $y'=3$; $a^2y''-6x=0$, $y''=\frac{6}{a}$; $a^2y'''-6=0$, $y'''=\frac{6}{a^2}$. En la parábola, por pasar por (a,a), se tiene: $a^2+2Aa+2Ba+C=0$. Derivando su ecuación: $2x+2Ay'+2B=0$, $y'=\frac{-a-B}{A}=3$; $1+Ay''=0$, $y''=\frac{-1}{A}=\frac{6}{a}$; $Ay'''=0$. Resolviendo el sistema formado por las tres ecuaciones, se tiene: $A=\frac{-a}{6}$, $B=\frac{-a}{2}$, $C=\frac{a^2}{3}$. La parábola es: $3x^2-ay-3ax+a^2=0$.

I 39- Hallar la recta osculadora de la curva $y=5x^2+3$, en el punto $(1,8)$.

Solución: Como la recta tiene dos parámetros, el contacto será de primer orden, satisfaciendo las coordenadas del punto y la primera derivada (recta tangente). Sea la recta $y=ax+b$, $8=a+b$; $y'=a$. Derivando la ecuación de la curva dada y particularizando los resultados para el punto $(1,8)$: $y'=10x=10$. Luego $a=10$, $b=-2$. La recta es: $y=10x-2$.

I 40- Hallar el círculo osculador de la curva $y=5x^3$, en el punto cuya ordenada es positiva y cinco veces mayor que la abscisa.

Solución: Como $5x=5x^3$, el punto es $(1,5)$. Derivando en la curva y particularizando para dicho punto, se tiene: $y'=15x^2=15$, $y''=30x=30$, $y'''=30$. Siendo la ecuación del círculo $(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0$, se tiene por pasar por $(1,5)$, que $(1-a)^2+(5-b)^2-R^2=0$. Derivando y particularizando: $2(x-a)+2(y-b)y'=0$, $y'=\frac{-x+a}{y-b}=\frac{-1+a}{5-b}=15$; $2+2y'^2+2(y-b)y''=0$, $y''=\frac{1+y'^2}{-y+b}=\frac{226}{-5+b}=30$. Resolviendo el sistema: $a=-112$, $b=\frac{188}{15}$, $R^2=\frac{2885794}{225}$. El círculo osculador es: $(x+112)^2+\left(y-\frac{188}{15}\right)^2-\frac{2885794}{225}=0$.

I 41- Hallar el círculo osculador de la curva $y=\frac{(a+b)^3x^4}{108a^2b^4}$, en el punto de abscisa $\frac{3ab}{a+b}$. Particularizar el

resultado para $a = b = 8$.

Solución: La ordenada del punto es $y = \frac{(a+b)^3 81a^4b^4}{108a^2b^4(a+b)^4} = \frac{3a^2}{4(a+b)}$. Derivando la ecuación de la curva dada y particularizando para el punto dado $\left(\frac{3ab}{a+b}, \frac{3a^2}{4(a+b)}\right)$, se tiene: $y' = \frac{(a+b)^3x^3}{27a^2b^4} = \frac{a}{b}$, $y'' = \frac{(a+b)^3x^2}{9a^2b^4} = \frac{a+b}{b^2}$. Sea el círculo osculador $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - R^2 = 0$. Se tiene que: $\alpha = x - y'\frac{1+y'}{y''} = \frac{a(2b-a)}{a+b}$, $\beta = y + \frac{1+y'^2}{y''} = \frac{7a^2+4b^2}{4(a+b)}$, $R^2 = \frac{(1+y'^2)^3}{y''^2} = \frac{(a^2+b^2)^3}{b^2(a+b)^2}$. El círculo osculador es: $\left[x - \frac{a(2b-a)}{a+b}\right]^2 + \left[y - \frac{7a^2+4b^2}{4(a+b)}\right]^2 - \frac{(a^2+b^2)^3}{b^2(a+b)^2} = 0$. Para el caso en que $a = b = 8$, el círculo osculador es: $(x-4)^2 + (y-11)^2 - 128 = 0$.

I 42- Hallar el círculo osculador de la curva $y = \cos(x-1)$, en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución: El punto de contacto es $(1,1)$. Las derivadas de la curva dada, particularizadas para dicho punto de contacto, son: $y' = -\sin(x-1) = 0$, $y'' = -\cos(x-1) = -1$. Sea la ecuación del círculo osculador: $(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0$. Se tiene que: $a = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = 1$, $b = y + \frac{1+y'^2}{y''} = 0$, $R^2 = \frac{(1+y'^2)^3}{y''^2} = 1$. El círculo osculador es: $(x-1)^2 + y^2 - 1 = 0$.

I 43- Hallar el círculo osculador de la curva $6y = x^3 - 12x - 2$, en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución: El punto de contacto es $(2,-3)$. Derivando la curva dada y particularizando para dicho punto: $y' = \frac{3x^2-12}{6} = 0$, $y'' = x = 2$. Siendo el círculo osculador: $(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0$, se tiene que: $a = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = 2$, $b = y + \frac{1+y'^2}{y''} = \frac{-5}{2}$, $R^2 = \frac{(1+y'^2)^3}{y''^2} = \frac{1}{4}$. El círculo osculador es: $(x-2)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$.

I 44- Hallar el círculo osculador de la curva $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$, en el punto de abscisa $x = 2$, y cuya ordenada es positiva.

Solución: El punto de contacto es $\left(2, \sqrt{3}\right)$. Derivando la ecuación de la curva dada y particularizando para dicho punto, se tiene: $y' = \frac{-x}{4y} = \frac{-\sqrt{3}}{6}$, $y'' = \frac{-1-4y'^2}{4y} = \frac{-\sqrt{3}}{9}$. Siendo la ecuación del círculo osculador: $(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0$, se tiene que: $a = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = \frac{3}{8}$, $b = y + \frac{1+y'^2}{y''} = \frac{-9\sqrt{3}}{4}$, $R^2 = \frac{(1+y'^2)^3}{y''^2} = \frac{2197}{64}$. El círculo osculador es: $\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 + \left(y + \frac{9\sqrt{3}}{4}\right)^2 - \frac{2197}{64} = 0$.

I 45- Hallar el círculo osculador de la curva $y^2 = 10x - 6$, en el punto de abscisa $x = 1$, y cuya ordenada es positiva.

Solución: El punto de contacto es $(1,2)$. Derivando la curva dada y particularizando para dicho punto: $y' = \frac{5}{y} = \frac{5}{2}$, $y'' = \frac{-y'^2}{y} = \frac{-25}{8}$. Siendo el círculo osculador: $(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0$, se tiene que: $a = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = \frac{34}{5}$, $b = y + \frac{1+y'^2}{y''} = \frac{-8}{25}$, $R^2 = \frac{(1+y'^2)^3}{y''^2} = \frac{24389}{625}$. El círculo osculador es: $\left(x - \frac{34}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{8}{25}\right)^2 - \frac{24389}{625} = 0$.

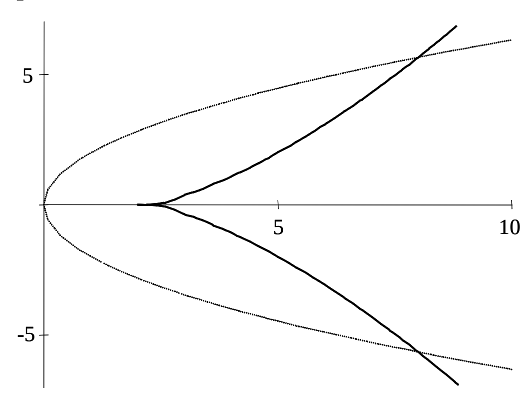
I 46- Dada la parábola $y^2 = 2px$, hallar el centro y el radio del círculo osculador en un punto genérico de la curva.

Solución: Derivando, se tiene: $y' = \frac{p}{y} = \sqrt{\frac{p}{2x}}$, $y'' = \frac{-p^2}{y^3}$. Siendo x_c, y_c las coordenadas del centro del

círculo osculador, se tiene: $x_c = x - \frac{y'}{y''}(1+y'^2) = 3x+p$, $y_c = y + \frac{1+y'^2}{y''} = \frac{-y^3}{p^2}$. El radio del círculo osculador es: $R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{-(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2 y}$.

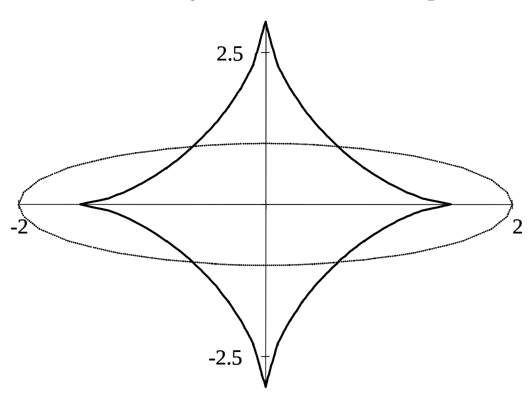
I 47- Hallar la evoluta de la parábola $y^2 = 4px$.

Solución: La evoluta es el lugar geométrico de los centros de los círculos osculadores. Las derivadas de la ecuación de la curva dada, son: $y' = \frac{2p}{y}$, $y'' = \frac{-y'^2}{y} = \frac{-4p^2}{y^3}$. Siendo (a,b) el centro del círculo osculador, se tiene: $a = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = 3x+2p$, $b = y + \frac{1+y'^2}{y''} = \frac{-y^3}{4p^2}$. De donde: $x = \frac{a-2p}{3}$, $y = (-4p^2 b)^{\frac{1}{3}}$. Luego: $(-4p^2 b)^{\frac{2}{3}} = 4p\frac{a-2p}{3}$. Operando y sustituyendo (a,b) por (x,y), se tiene la ecuación de la evoluta: $27py^2 - 4(x-2p)^3 = 0$. En el dibujo se incluye en línea gruesa la evoluta, y en línea fina la parábola dada, para $p = 1$.



I 48- Hallar la evoluta de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

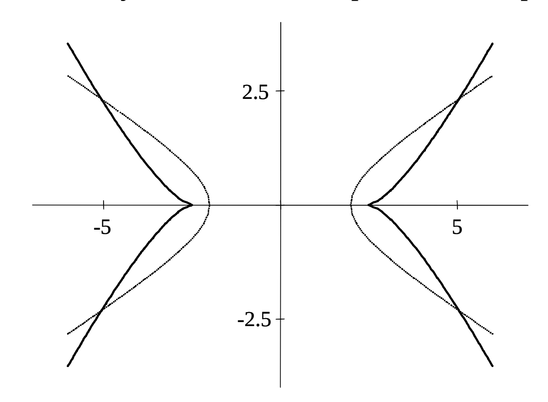
Solución: La evoluta es el lugar geométrico de los centros de los círculos osculadores. Las derivadas de la ecuación de la elipse, son: $y' = \frac{-b^2 x}{a^2 y}$, $y'' = \frac{-b^2 - a^2 y'^2}{a^2 y} = \frac{-b^4}{a^2 y^3}$. Siendo (α,β) el centro del círculo osculador, se tiene: $\alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = \frac{(a^2-b^2)x^3}{a^4}$, $\beta = y + \frac{1+y'^2}{y''} = \frac{-(a^2-b^2)y^3}{b^4}$. De donde $x = \sqrt[3]{\frac{a^4\alpha}{a^2-b^2}}$, $y = -\sqrt[3]{\frac{b^4\beta}{a^2-b^2}}$. Luego $\frac{\left(\sqrt[3]{\frac{a^4\alpha}{a^2-b^2}}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(\sqrt[3]{\frac{b^4\beta}{a^2-b^2}}\right)^2}{b^2} - 1 = 0$. Operando y sustituyendo (α,β) por (x,y), se tiene la ecuación de la evoluta: $(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}$. En el dibujo siguiente se ha representado la evoluta, y en línea fina la elipse dada, para $a = 2$, $b = 1$.



I 49- Hallar la evoluta de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

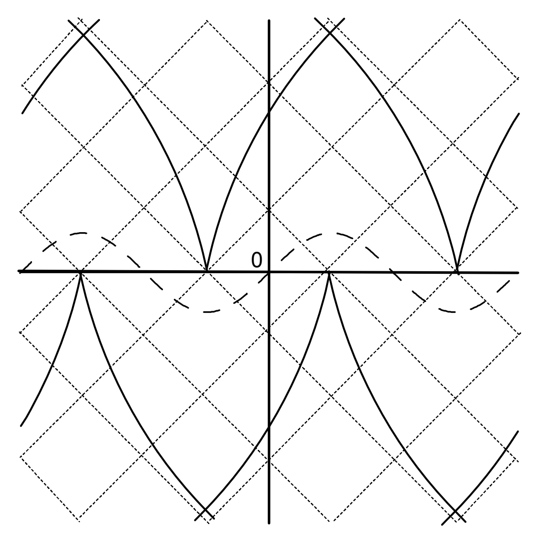
Solución: La evoluta es el lugar geométrico de los centros de los círculos osculadores. Las derivadas de

la ecuación de la hipérbola son: $y' = \frac{b^2 x}{a^2 y}$, $y'' = \frac{b^2 - a^2 y'^2}{a^2 y} = \frac{-b^4}{a^2 y^3}$. Siendo (α, β) el centro del círculo osculador, se tiene: $\alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = \frac{(a^2+b^2)x^3}{a^4}$, $\beta = y + \frac{1+y'^2}{y''} = \frac{-(a^2+b^2)y^3}{b^4}$. De donde: $x = \sqrt[3]{\frac{a^4\alpha}{a^2+b^2}}$, $y = -\sqrt[3]{\frac{b^4\beta}{a^2+b^2}}$. Luego: $\frac{\left(\sqrt[3]{\frac{a^4\alpha}{a^2+b^2}}\right)^2}{a^2} - \frac{\left(\sqrt[3]{\frac{b^4\beta}{a^2+b^2}}\right)^2}{b^2} - 1 = 0$. Operando y sustituyendo α, β por x, y, se tiene la ecuación de la evoluta: $(ax)^{\frac{2}{3}} - (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2+b^2)^{\frac{2}{3}}$. En el dibujo siguiente se ha representado la evoluta, y en línea fina la hipérbola dada, para $a = 2$, $b = 1$.



I 50- Hallar la evoluta de la curva $y = \sin x$.

Solución: La evoluta es el lugar geométrico de los centros de los círculos osculadores. Las derivadas de la ecuación dada son: $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$. Siendo (α, β) el centro del círculo osculador, se tiene que: $\alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = x + \frac{\cos x(1+\cos^2 x)}{\sin x}$, $\beta = y + \frac{1+y'^2}{y''} = \sin x - \frac{1+\cos^2 x}{\sin x}$. Sustituyendo x por t, α por x, β por y, se tienen las ecuaciones paramétricas de la evoluta: $x = t + \frac{\cos t(1+\cos^2 t)}{\sin t}$, $y = \sin t - \frac{1+\cos^2 t}{\sin t}$. En el dibujo siguiente se ha representado la evoluta, y en línea de trazos el reticulado de sus asíntotas y la sinusoide dada.



I 51- Obtener la ecuación cartesiana de la curva cuya ecuación intrínseca es $R = 1 + s^2$, siendo $T = \infty$.

Solución: Siendo $T = \infty$, la curva es plana. $R = \frac{ds}{d\theta} = 1 + s^2$, $\frac{ds}{1+s^2} = d\theta$, $\theta = \arctan s$, $s = \tan\theta$, $x = \int_0^s \cos\theta ds = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}} = \ln\left(s + \sqrt{1+s^2}\right)$, $y = \int_0^s \sin\theta ds = \int_0^s \frac{sds}{\sqrt{1+s^2}} = \sqrt{1+s^2}$. Eliminando s, entre las expresiones de x e y, se tiene: $y = \frac{1+e^{2x}}{2e^x} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$. (Ver problema I 67).

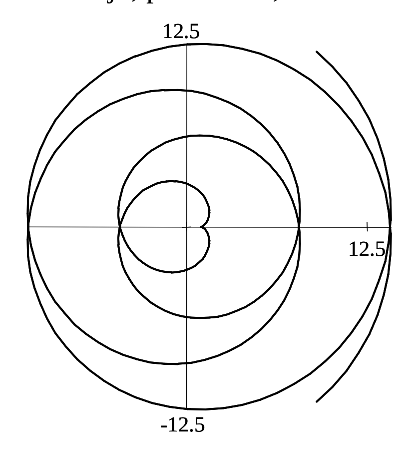
Nota: Se utilizan los siguientes símbolos: R, radio de curvatura; T, radio de torsión; s, longitud de arco.

I 52- Obtener la ecuación intrínseca de la curva $\rho = Ae^{B\theta}$ (espiral logarítmica).

Solución: La curva dada es plana, siendo: $\rho' = ABe^{B\theta}$, $\rho'' = AB^2e^{B\theta} = B^2\rho$. El radio de curvatura es: $R = \dfrac{(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2-\rho\rho''+2\rho'^2} = \dfrac{\rho^3(1+B^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2(1+B^2)} = \rho(1+B^2)^{\frac{1}{2}} = (1+B^2)^{\frac{1}{2}}Ae^{B\theta}$. Siendo: $|x'| = \sqrt{\rho^2+\rho'^2} = (1+B^2)^{\frac{1}{2}}\rho = (1+B^2)^{\frac{1}{2}}Ae^{B\theta}$, se tiene: $s = \int_0^\theta |x'|d\theta = \int_0^\theta (1+B^2)^{\frac{1}{2}}Ae^{B\theta}d\theta = A(1+B^2)^{\frac{1}{2}}\left|\dfrac{1}{B}e^{B\theta}\right|_0^\theta = \dfrac{A}{B}(1+B^2)^{\frac{1}{2}}(e^{B\theta}-1)$. Sustituyendo en esta ecuación el valor de: $e^{B\theta} = \dfrac{R}{A\sqrt{1+B^2}}$, se tiene que: $s = \dfrac{A}{B}(1+B^2)^{\frac{1}{2}}\left[\dfrac{R}{A(1+B^2)^{\frac{1}{2}}}-1\right] = \dfrac{R}{B}-\dfrac{A}{B}(1+B^2)^{\frac{1}{2}}$. Es decir: $Bs-R+A(1+B^2)^{\frac{1}{2}} = 0$.

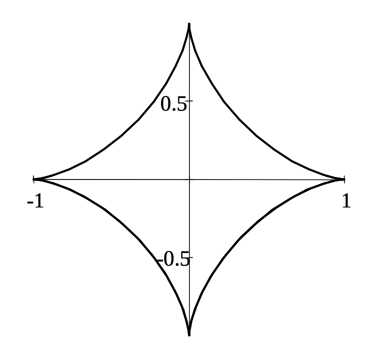
I 53- Obtener las ecuaciones paramétricas de la curva cuyas ecuaciones intrínsecas son: $R = \sqrt{2ks}$, $T = \infty$.

Solución: La curva es plana, al ser el radio de torsión $T = \infty$ (la torsión $\dfrac{1}{T}$, es nula). Se tiene: $\dfrac{1}{R} = \dfrac{d\theta}{ds}$, $\cos\theta = \dfrac{dx}{ds}$, $\sin\theta = \dfrac{dy}{ds}$, $x = \int R\cos\theta d\theta$, $y = \int R\sin\theta d\theta$, $\theta = \int \dfrac{1}{R}ds$. Como $\theta = \int \dfrac{ds}{\sqrt{2k}\sqrt{s}} = \dfrac{2}{\sqrt{2k}}s^{\frac{1}{2}}$, $s = \dfrac{k}{2}\theta^2$, $R = \sqrt{2k}\sqrt{\dfrac{k}{2}}\theta = k\theta$. Por tanto, se tienen las siguientes ecuaciones paramétricas de la curva:
$x = \int k\theta\cos\theta d\theta = k\left(\theta\sin\theta - \int\sin\theta d\theta\right) = k(\theta\sin\theta+\cos\theta)+A$,
$y = \int k\theta\sin\theta d\theta = k\left(-\theta\cos\theta + \int\cos\theta d\theta\right) = k(-\theta\cos\theta+\sin\theta)+B$.
Esta curva se representa en el siguiente dibujo, para $k = 1$, $A = B = 0$.



I 54- Se consideran las rectas que cortan a los ejes OX, OY en los puntos A y B respectivamente, de forma que $AB = a$. Hallar las ecuaciones paramétricas y cartesianas de la envolvente de estas rectas.

Solución: $AB \equiv \dfrac{x}{a\cos t}+\dfrac{y}{a\sin t} = 1$, siendo t el ángulo que AB forma con OX. Operando: $ax\sin t + ay\cos t - a^2\sin t\cos t = 0$. Derivando respecto a t: $ax\cos t - ay\sin t - a^2(\cos^2 t - \sin^2 t) = 0$. Resolviendo el sistema, se tiene: $x = a\sin^3 t$, $y = a\cos^3 t$, que son las ecuaciones paramétricas de la envolvente, cuya ecuación cartesiana es: $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. En el dibujo siguiente se ha representado esta curva para $a = 1$.



I 55- Dado el punto $P\left(\frac{p}{2},0\right)$, se traza por él una recta variable que corta al eje OY en A. Por A se traza la perpendicular AB a AP. Hallar la envolvente de AB.

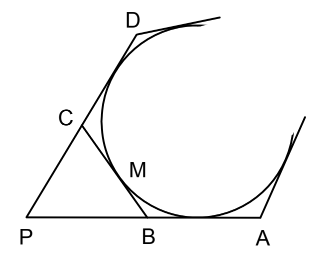
Solución: $PA \equiv y = m\left(x-\frac{p}{2}\right)$, $A\left(0.\frac{-mp}{2}\right)$, $AB \equiv y+\frac{mp}{2} = \frac{-x}{m}$, es decir: $2x+2my+m^2p = 0$. Derivando respecto a m: $2y+2mp = 0$, $m = \frac{-y}{p}$. Sustituyendo este valor en la ecuación de AB, se tiene la ecuación pedida: $2x-\frac{2y^2}{p}+\frac{y^2}{p} = 0$, es decir: $y^2 = 2px$.

I 56- Hallar la envolvente de las circunferencias cuyo centro $(a,0)$ está en el eje OX, y el radio R está ligado a a por la condición $R^2 = 4am$.

Solución: La ecuación de la circunferencia es: $(x-a)^2+y^2-4am = 0$. Derivando respecto al parámetro a, se tiene: $-2(x-a)-4m = 0$, $a = 2m+x$. Sustituyendo este valor en la ecuación de la circunferencia, se tiene: $(x-2m-x)^2+y^2-4m(2m+x) = 0$, es decir: $y^2-4mx-4m^2 = 0$.

I 57- Entre los polígonos de un mismo número de lados, circunscritos a una figura cerrada convexa, aquel cuya superficie es mínima goza de la propiedad de que cada punto de contacto es el punto medio de cada lado.

Solución:



Sean AB, BC y CD, tres lados consecutivos del polígono de superficie mínima. Sea el origen de coordenadas la intersección P de AB y CD. La tangente BC ha de ser tal que el área del triángulo PBC ha de ser máxima. Sean (x,y) las coordenadas del punto de tangencia M. La ecuación de BC es: $Y-y = \frac{dy}{dx}(X-x)$. Para $Y = 0$, $X = x-y\frac{dx}{dy} = PB$. Para $X = 0$, $Y = y-x\frac{dy}{dx} = PC$. El área del triángulo PBC es: $\frac{1}{2}PB\cdot PC\cdot\sin\widehat{BPC} = \frac{1}{2}\left(x-y\frac{dx}{dy}\right)\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)\sin\theta = \frac{-1}{2}\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)^2\frac{dx}{dy}\sin\theta$. Por tanto, hay que hallar el máximo de la expresión: $\frac{(y-xy')^2}{y'}$. Derivando e igualando a cero, se tiene: $(y-xy')\frac{y''}{y'}\left(x+\frac{y}{y'}\right) = 0$, de donde: $x = \frac{-y}{y'}$. Como: $x = \frac{x}{2}+\frac{x}{2} = \frac{x}{2}-\frac{y}{2y'} = \frac{1}{2}\left(x-\frac{y}{y'}\right) = \frac{PB}{2}$, y como: $y = \frac{y}{2}+\frac{y}{2} = \frac{y}{2}-\frac{xy'}{2} = \frac{1}{2}(y-xy') = \frac{PC}{2}$, resulta que M es el punto medio de BC.

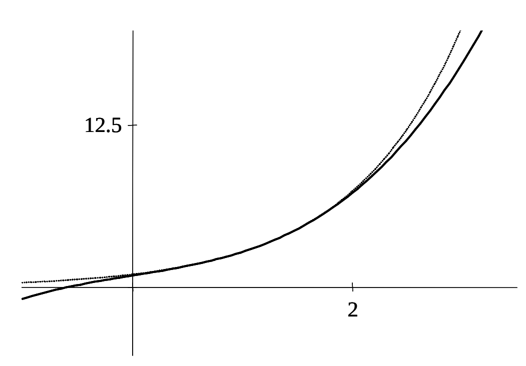
I 58- Sean E y E' dos elipses homofocales. Desde un punto M de la elipse exterior E', se trazan las tangentes MA y MB a E. Demostrar que la expresión $MA+MB$ –arco AB, es constante cuando M describe la elipse E'.

Solución: Desde M las tangentes a E son MA y MB. El ángulo θ que forma MA con la tangente en M a E', es igual al que forma la tangente MB con dicha tangente en M a E'. Al pasar M a la posición $M' = M+d\sigma$, la tangente MA pasa a $M'A'$, siendo $AA' = ds$. Luego, $dMA = -d\sigma\cdot\cos\theta+ds$, mientras que la variación de la tangente MB es $dMB = +d\sigma\cdot\cos\theta-ds'$ (se ha supuesto que al pasar M a la posición M', el sentido de AA' es contrario al sentido de MM', que es igual al de BB'). Por tanto: $dMA+dMB = d(MA+MB) = ds-ds' = d(\text{arco } AB)$. Luego, al integrar: $MA+MB =$arco $AB+k$, es decir que, $MA+MB$ –arco $AB = k$, constante.

I 59- Hallar la ecuación de la parábola $y = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$, osculatriz a la curva $y = e^x$, en el punto $(1,e)$.

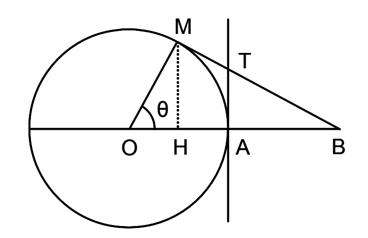
Solución: En el punto $(1,e)$, se tiene: $e = a_0+a_1+a_2+a_3$. Derivando sucesivamente las ecuaciones dadas, e igualando las derivadas de ambas curvas: $y' = e^x = a_1+2a_2x+3a_3x^2$, $y'' = e^x = 2a_2+6a_3x$, $y''' = e^x = 6a_3$. Particularizando estas derivadas para el punto $(1,e)$, se tiene: $y'_1 = e = a_1+2a_2+3a_3$,

$y_1'' = e = 2a_2 + 6a_3$, $y_1''' = e = 6a_3$. Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones anteriores, se tiene: $a_3 = \frac{e}{6}$, $a_2 = \frac{e-e}{2} = 0$, $a_1 = e - \frac{e}{2} = \frac{e}{2}$, $a_0 = e - \frac{e}{2} - \frac{e}{6} = \frac{e}{3}$. La ecuación pedida es: $y = \frac{e}{3} + \frac{e}{2}x + \frac{e}{6}x^3$. Se ha representado la parábola osculatriz, y en línea fina la exponencial dada.



I 60- Se considera un círculo de centro O y radio R. Se traza la tangente en un punto A del círculo, y se determina un punto B sobre el diámetro que pasa por A. Se une B con un punto M del círculo. La recta MB corta a la tangente en el punto T. Determinar AB de manera que la diferencia entre el arco AM y el segmento AT sea de orden infinitesimal máximo, siendo el ángulo $\widehat{AOM}$ el infinitésimo principal.

Solución:



Sean: $OB = b$, arco$AM = R \cdot \theta$. En los triángulos semejantes MHB, ATB, se tiene: $\frac{MH}{HB} = \frac{AT}{AB}$. Luego: $\frac{R\sin\theta}{b - R\cos\theta} = \frac{AT}{b-R}$, $AT = \frac{(b-R)R\sin\theta}{b - R\cos\theta} = \frac{AB \cdot R\sin\theta}{AB + R(1-\cos\theta)}$. Por tanto, la diferencia Δ entre el arco AM y el segmento AT, es: $\Delta = R\theta - \frac{AB \cdot R\sin\theta}{AB + R(1-\cos\theta)} = \frac{AB \cdot R\theta + R^2\theta - R^2\theta\cos\theta - AB \cdot R\sin\theta}{AB + R(1-\cos\theta)}$. Desarrollando $\sin\theta$ y $\cos\theta$, se tiene: $\Delta = \frac{-\theta^3\left(\frac{R^2}{2!} + \frac{AB \cdot R}{3!}\right) + \theta^5\left(\frac{R^2}{4!} + \frac{AB \cdot R}{5!}\right) + \ldots}{AB + R(1-\cos\theta)}$. Para que Δ sea de orden máximo, el infinitésimo $\left(\frac{R^2}{2!} + \frac{AB \cdot R}{3!}\right)$ ha de ser nulo, por lo que $AB = -3R$. El infinitésimo Δ es de orden 5º.

I 61- Sobre un diámetro de un círculo de radio $R = 5$ y centro O, se tiene un punto P tal que $OP = 3$. Se traza por P una recta variable que corta al círculo en A. Por A se traza la perpendicular a AP. Hallar la envolvente de estas rectas perpendiculares a AP.

Solución: Tomando como origen de coordenadas, el centro O del círculo, y como eje OX el diámetro OP, las coordenadas de A son $(5\cos t, 5\sin t)$, y las de $P(3,0)$. Luego $AP \equiv y = \frac{5\sin t}{5\cos t - 3}(x-3)$. La ecuación de la recta perpendicular a AP, trazada por A es: $y - 5\sin t = \frac{3 - 5\cos t}{5\sin t}(x - 5\cos t)$, es decir: $5y\sin t + (5\cos t - 3)x + 15\cos t - 25 = 0$. Derivando respecto a t: $5y\cos t - 5x\sin t - 15\sin t = 0$, es decir: $y\cos t - x\sin t - 3\sin t = 0$. Resolviendo el sistema, se tiene: $\cos t = \frac{5x+15}{3x+25}$, $\sin t = \frac{5y}{3x+25}$. Luego: $(5x+15)^2 + 25y^2 = (3x+25)^2$, o bien: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

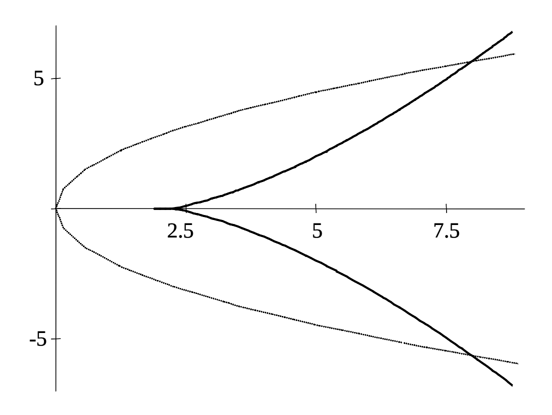
I 62- El centro de una circunferencia variable se mueve sobre OX. Hallar la relación entre la abscisa del centro y el radio, para que la envolvente sea: 1º) $y = mx$. 2º) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. 3º) $y^2 = 2px$.

Solución: 1º) Siendo $(\lambda, 0)$ las coordenadas del centro y R el radio, la ecuación de la circunferencia es: $(x-\lambda)^2 + y^2 - R^2 = 0$. La intersección con $y = mx$, es: $x^2(1+m^2) - 2\lambda x + \lambda^2 - R^2 = 0$. Obligando a que

tenga una raíz doble, se tiene la relación pedida: $m^2\lambda^2 - R^2(1+m^2) = 0$. 2º) Procediendo de forma análoga, la ecuación de la intersección de la circunferencia con la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, viene dada por: $x^2(a^2-b^2) - 2a^2\lambda x - R^2a^2 + a^2b^2 + a^2\lambda^2 = 0$. Obligando a que tenga una raíz doble, se tiene la relación pedida: $b^2\lambda^2 + (R^2-b^2)(a^2-b^2) = 0$. 3º) De la misma forma, la ecuación de la intersección de la circunferencia con $y^2 - 2px = 0$, es: $x^2 + 2x(p-\lambda) + \lambda^2 - R^2 = 0$. Obligando a que tenga una raíz doble, se tiene la relación pedida: $2p\lambda - R^2 - p^2 = 0$.

I 63- Hallar la envolvente de las normales a la parábola $y^2 = 2px$.

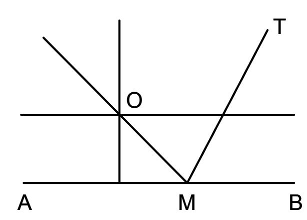
Solución: Sea (a,b) un punto de la parábola. La pendiente de la tangente en él, viene dada por: $yy' = p$, $y' = \frac{p}{y}$. Y la de la normal: $\frac{-y}{p} = \frac{-b}{p}$. La ecuación de la normal es: $y - b = \frac{-b}{p}(x-a)$, de donde: $py + b(x-p) = \frac{b^3}{2p}$. Derivando respecto al parámetro b, se tiene: $x - p - \frac{3b^2}{2p} = 0$, $b^2 = \frac{2p(x-p)}{3}$. Luego: $py + b(x-p) = \frac{b2p(x-p)}{6p}$, $b = \frac{3py}{2(p-x)}$. Por tanto: $\frac{9p^2y^2}{4(p-x)^2} = \frac{2p(x-p)}{3}$, con lo que se tiene: $27py^2 - 8(x-p)^3 = 0$. En el siguiente dibujo se ha representado la envolvente, y en línea fina la parábola dada, para $p = 1$.



Nota: Esta ecuación coincide con la de la evoluta de la parábola $y^2 = 2px$, porque la envolvente de las normales de una curva es su evoluta (ver problema I 47).

I 64- Hallar la envolvente de los lados de un ángulo OMT de magnitud constante, cuyo vértice M se mueve sobre la recta AB, y cuyo lado OM pasa por el origen O.

Solución:



Tomando como ejes la recta AB y su perpendicular por O, se tiene: $O(0,\lambda)$, $M(\alpha,0)$, $OM \equiv \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\lambda} = 1$. La pendiente de la recta OM es $m_1 = \frac{-\lambda}{\alpha}$, y la de la recta MT es m_2, verificándose que: $\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} = k$, de donde: $m_2 = \frac{\lambda + k\alpha}{k\lambda - \alpha}$. La ecuación de MT es: $y = \frac{\lambda + k\alpha}{k\lambda - \alpha}(x - \alpha)$. Derivándola respecto a α, se tiene: $\alpha = \frac{y + kx - \lambda}{2k}$. Sustituyendo este valor en la ecuación de MT, se obtiene la envolvente: $k^2x^2 + 2kxy + y^2 + 2k\lambda x - 2\lambda(1+2k^2)y + \lambda^2 = 0$. Se trata de una parábola cuyo eje es: $kx + y - \lambda = 0$, y su vértice $\left(\frac{k\lambda}{k^2+1}, \frac{\lambda}{k^2+1}\right)$.

I 65- Se dispara un proyectil con velocidad inicial v_0, con un cañón que forma un ángulo θ con el plano horizontal. Probar que la envolvente de estas trayectorias, al variar θ en un plano vertical, es una parábola.

Solución: Las ecuaciones del movimiento del proyectil, son: $x = v_0 t\cos\theta$, $y = v_0 t\sin\theta - \frac{1}{2}at^2$, siendo a la aceleración de la gravedad. Eliminando t, se tiene: $(1+\cos 2\theta)v_0^2 y - v_0^2 x\sin 2\theta - ax^2 = 0$. Derivando respecto a θ, e igualando a cero, se tiene: $\tan 2\theta = \frac{-x}{y}$. Sustituyendo este valor y operando, se tiene la ecuación de la envolvente: $a^2x^2 - 2av_0^2 y - v_0^4 = 0$, que es una parábola.

I 66- Hallar la ecuación cartesiana en paramétricas, de la curva de ecuación intrínseca $R = s$.

Solución: Como $R = \frac{ds}{d\theta}$, se tiene que: $\frac{ds}{d\theta} = s$, $\frac{ds}{s} = d\theta$. Integrando: $\ln s = \theta$, $s = e^\theta$. Diferenciando: $ds = e^\theta d\theta$. Como: $x = \int\cos\theta ds$, $y = \int\sin\theta ds$, se tiene que: $x = \int e^\theta\cos\theta d\theta = \frac{1}{2}e^\theta(\sin\theta+\cos\theta)$, $y = \int e^\theta\sin\theta d\theta = \frac{1}{2}e^\theta(\sin\theta-\cos\theta)$. O bien: $x = \frac{s}{2}[\sin(\ln s)+\cos(\ln s)]$, $y = \frac{s}{2}[\sin(\ln s)-\cos(\ln s)]$.

I 67- Deducir la ecuación intrínseca de la catenaria $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{-x}{a}}\right)$.

Solución: La ecuación de la catenaria en paramétricas, es: $y = a\cosh t$, $x = at$. Diferenciando: $dy = a\sinh t dt$, $dx = adt$. Luego, $ds = \sqrt{x'^2+y'^2} = a\cosh t$. Integrando, se tiene: $s = a\sinh t$. Por tanto, $R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y''-x''y'} = \frac{(a\cosh t)^3}{a^2\cosh t} = a\cosh^2 t = a(1+\sinh^2 t) = a\left(1+\frac{s^2}{a^2}\right) = a+\frac{s^2}{a}$. Luego la ecuación intrínseca es: $Ra = a^2+s^2$. (Ver problema I 51).

I 68- Por los puntos de la parábola $y^2 = 4x-1$, se trazan tangentes a la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$. Hallar la envolvente de las cuerdas que unen los puntos de contacto. Esta envolvente se llama figura polar de la parábola respecto a la elipse.

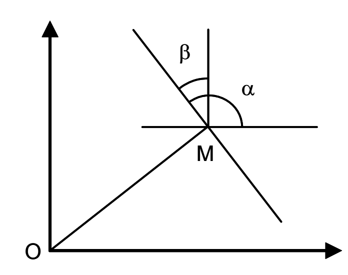
Solución: Sea (α,β) el punto de la parábola, es decir: $\beta^2 = 4\alpha-1$. Las cuerdas definidas por los puntos de tangencia, son: $\alpha 2b^2x+\beta 2a^2y-2a^2b^2 = 0$. Sustituyendo el valor de α en función de β, se tiene: $(\beta^2+1)b^2x+4\beta a^2y-4a^2b^2 = 0$. Derivando respecto a β e igualando a cero, se tiene: $\beta = \frac{-2a^2y}{b^2x}$. Luego: $\left(\frac{4a^4y^2}{b^4x^2}+1\right)b^2x-4\frac{2a^2y}{b^2x}a^2y-4a^2b^2 = 0$. De donde operando, la ecuación pedida es: $b^4x^2-4a^4y^2 = 4a^2b^4x$.

I 69- Hallar la envolvente de las circunferencias $(x-a)^2+y^2 = 4ak$, siendo k una constante.

Solución: $f = (x-a)^2+y^2-4ak = 0$, $f'_a = -2(x-a)-4k = 0$. Luego: $a = x+2k$. Sustituyendo y operando, se tiene la ecuación pedida: $y^2 = 4kx+4k^2$.

I 70- Se da $z = \frac{1}{d^2}$, siendo d la distancia de $M(x,y)$ a $O(0,0)$. Hallar las derivadas primera y segunda de z, según la dirección perpendicular a OM y en el sentido de la figura.

Solución:

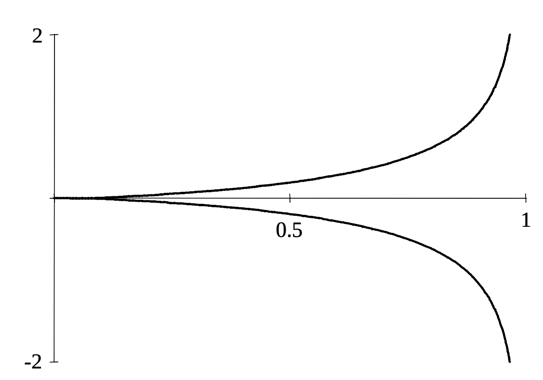


Se tiene que: $z = \frac{1}{d^2} = \frac{1}{x^2+y^2}$. Sus derivadas parciales son: $z'_x = \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}$, $z'_y = \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}$, $z''_{x^2} = \frac{-2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{8x^2}{(x^2+y^2)^3}$, $z''_{xy} = \frac{8xy}{(x^2+y^2)^3}$, $z''_{y^2} = \frac{-2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{8y^2}{(x^2+y^2)^3}$.
Como: $\cos\alpha = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\cos\beta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, la derivada primera es: $\frac{\delta z}{\delta_{(\alpha,\beta)}} = z'_x\cos\alpha+z'_y\cos\beta =$ $= \frac{2xy}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} = 0$, y la segunda es: $\frac{\delta^2 z}{\delta^2_{(\alpha,\beta)}} = z''_{x^2}\cos^2\alpha+2z''_{xy}\cos\alpha\cos\beta+z''_{y^2}\cos^2\beta =$

$$= \frac{-2y^2}{(x^2+y^2)^3} + \frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^4} - \frac{16x^2y^2}{(x^2+y^2)^4} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^3} + \frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^4} = \frac{-2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2}{d^4}.$$

I 71- Hallar la envolvente de la recta $mx + ny = 1$, siendo $(m-1)^3 - n^2 = 0$.

Solución: Derivando ambas ecuaciones respecto a m: $x + n'y = 0$, $3(m-1)^2 - 2nn' = 0$. Luego $n' = \frac{-x}{y} = \frac{-3y(m-1)^2}{2x}$. Operando: $m - 1 = \frac{4x^2}{9y^2}$, $n = \frac{-8x^3}{27y^3}$. Introduciendo estos valores en la ecuación de la recta, se tiene la envolvente: $4x^3 + 27xy^2 - 27y^2 = 0$. En el dibujo se ha representado la envolvente.



I 72- Hallar la curvatura C y el radio de curvatura R, de la curva $y = a \arccos \frac{a-x}{a} + \sqrt{2ax - x^2}$, en el punto de abscisa $x = \frac{a}{2}$.

Solución: Derivando la ecuación dada y particularizando para el punto de abscisa $\frac{a}{2}$, se tiene que: $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(a-x)^2}{a^2}}} - \frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{2ax-x^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $y'' = \frac{ax}{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4\sqrt{3}}{9a}$, obteniéndose: $C = \frac{1}{R} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2ax}}{4ax} = \frac{1}{2a}$. La curvatura es $C = \frac{1}{2a}$, y el radio de curvatura es $R = 2a$.

I 73- Hallar la curvatura C y el radio de curvatura R, de la hipocicloide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Solución: Como $y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$, derivando se tiene que: $y' = \frac{-y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$, $y'' = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}$. De donde: $C = \frac{1}{R} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{axy}}$. Por tanto, la curvatura es $C = \frac{1}{3\sqrt[3]{axy}}$, y el radio de curvatura es $R = 3\sqrt[3]{axy}$.

I 74- Hallar la curvatura C y el radio de curvatura R, de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Solución: Como $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, derivando se tiene que: $y' = \frac{-b^2x}{a^2y}$, $y'' = \frac{-b^4}{a^2y^3}$. Luego $C = \frac{1}{R} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-a^4b^4}{(a^4y^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Por tanto, la curvatura es $C = \frac{-a^4b^4}{(a^4y^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}$, y el radio de curvatura es $R = \frac{-(a^4y^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$.

I 75- Dada la curva $y = \sin x$, determinar los puntos en los que el radio de curvatura R es máximo o mínimo.

Solución: Como: $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, $R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{-(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}{\sin x}$. Igualando a cero la primera derivada: $R' = \frac{\cos x(1+\cos^2 x)^{\frac{1}{2}}(3\sin^2 x + 1 + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = 0$, y como las raíces de

$(1+\cos^2 x)^{\frac{1}{2}}(3\sin^2 x+1+\cos^2 x)=0$, son imaginarias, las raíces válidas corresponden a $\cos x=0$, es decir: $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}$. Para $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$, $R''<0$, luego los puntos de coordenadas $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},1\right)$, corresponden a un máximo de R. Para $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$, $R''>0$, luego los puntos de coordenadas $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},-1\right)$, corresponden a un mínimo de R. (Nota: Para $x=k\pi$, $R=\infty$).

I 76- Hallar en los vértices de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, las coordenadas del centro de curvatura y el radio de curvatura.

Solución: $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, $y'=\frac{-bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}$, $y''=\frac{-ab}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Introduciendo estos valores en las fórmulas de las coordenadas α, β del centro de curvatura ($\alpha=x-y'\frac{1+y'^2}{y''}$, $\beta=y+\frac{1+y'^2}{y''}$), particularizados para los vértices $(\pm a,0)$ y $(0,\pm b)$, se obtienen los cuatro conjuntos de coordenadas: $\left(\pm\frac{a^2-b^2}{a},0\right)$ y $\left(0,\pm\frac{b^2-a^2}{b}\right)$. Siendo la fórmula del radio de curvatura $R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$, se obtienen los siguientes valores: $\frac{b^2}{a}$ para los vértices $(\pm a,0)$, y $\frac{a^2}{b}$ para los vértices $(0,\pm b)$.

I 77- Dada la curva $y=\sin x$, hallar la parábola osculadora $y=Ax^2+Bx+C$, en el punto de abscisa $x=\frac{\pi}{6}$.

Solución: Para $x=\frac{\pi}{6}$, $y=\frac{1}{2}$, verificándose que: $A\left(\frac{\pi}{6}\right)^2+B\left(\frac{\pi}{6}\right)+C=\frac{1}{2}$. Derivando, particularizando e igualando las derivadas de ambas curvas, se tiene: $y'=2A\left(\frac{\pi}{6}\right)+B=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y''=2A=-\sin\frac{\pi}{6}=\frac{-1}{2}$. Resolviendo el sistema de las tres ecuaciones con tres incógnitas, se obtiene: $A=\frac{-1}{4}$, $B=\frac{6\sqrt{2}+\pi}{12}$, $C=\frac{72-12\sqrt{3}\pi-\pi^2}{144}$. Por tanto, la ecuación de la parábola osculadora es: $y=\frac{-x^2}{4}+\frac{6\sqrt{2}+\pi}{12}x+\frac{72-12\sqrt{3}\pi-\pi^2}{144}$.

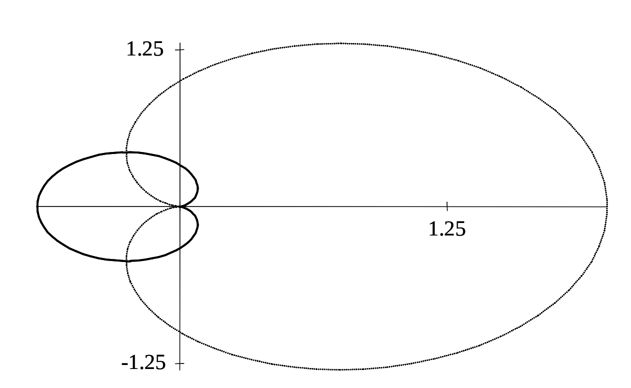
I 78- Hallar la evoluta de la cardioide $\rho=a(1+\cos\theta)$.

Solución: Derivando: $\rho'=-a\sin\theta$, $\rho''=-a\cos\theta$. Por tanto, $\rho^2+\rho'^2=2a^2(1+\cos\theta)$, $\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''=3a^2(1+\cos\theta)$. Las coordenadas del centro de curvatura son:

$$x=\rho\cos\theta-\frac{\rho^2+\rho'^2}{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}(\rho'\sin\theta+\rho\cos\theta)=\frac{a}{3}(\cos\theta+2-\cos^2\theta),$$

$$y=\rho\sin\theta-\frac{\rho^2+\rho'^2}{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}(\rho'\cos\theta-\rho\sin\theta)=\frac{a}{3}\sin\theta(1-\cos\theta).$$

Trasladando el origen de coordenadas a $\left(\frac{2a}{3},0\right)$, se tienen las coordenadas: $x=\frac{a}{3}(1-\cos\theta)\cos\theta$, $y=\frac{a}{3}(1-\cos\theta)\sin\theta$, que son las ecuaciones paramétricas de la evoluta. Pasando a polares, se tiene: $\rho^2=\frac{a^2}{9}(1-\cos\theta)^2$, es decir: $\rho=\pm\frac{a}{3}(1-\cos\theta)$, que es otra cardioide, homotética con la dada y girada 180º. En el dibujo se ha representado la evoluta, y en línea fina la cardioide dada, para $a=1$.



I 79- Hallar la curva tal que, siendo R el radio de curvatura, se tiene $R^2 = \rho^2 + \rho'^2$.

Solución: Se tiene: $R^2 = \dfrac{(\rho^2+\rho'^2)^3}{(\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho'')^2} = \rho^2+\rho'^2$. De donde: $\rho^2+\rho'^2 = \pm(\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho'')$.

1º) Haciendo: $\rho^2+\rho'^2 = \rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''$, se tiene: $\rho\rho'' = \rho'^2$, $\dfrac{\rho''}{\rho'} = \dfrac{\rho'}{\rho}$, $\ln\rho' = \ln\rho$. $\dfrac{\rho'}{\rho} = a$, $\ln\rho = a\theta+b$, $\rho = e^{a\theta+b}$, que son espirales logarítmicas. Otra solución para $a = 0$, corresponde a la circunferencia $\rho = k$. 2º) Haciendo: $\rho^2+\rho'^2 = -\rho^2-2\rho'^2+\rho\rho''$, se tiene: $2\rho^2+3\rho'^2-\rho\rho'' = 0$. Luego: $2+\dfrac{3\rho'^2}{\rho^2}-\dfrac{\rho''}{\rho} = 0$. De donde: $2+\dfrac{2\rho'^2}{\rho^2}-\dfrac{d\frac{\rho'}{\rho}}{d\theta} = 0$, es decir: $\dfrac{d\frac{\rho'}{\rho}}{d\theta} = 2\left(1+\dfrac{\rho'^2}{\rho^2}\right)$. Por tanto: $\displaystyle\int\frac{d\frac{\rho'}{\rho}}{1+\frac{\rho'^2}{\rho^2}} = 2d\theta$. Integrando, se tiene: $\arctan\dfrac{\rho'}{\rho} = 2(\theta-\theta_0)$. Luego: $\dfrac{\rho'}{\rho} = \tan 2(\theta-\theta_0)$. Integrando: $\ln\rho = -\dfrac{1}{2}\ln\cos 2(\theta-\theta_0)\cdot C$. Luego: $\rho^2 = \dfrac{C}{\cos 2(\theta-\theta_0)}$. Girando los ejes el ángulo θ_0, se tiene: $\rho^2 = \dfrac{C}{\cos 2\theta}$, que es una hipérbola equilátera cuya ecuación cartesiana es: $x^2-y^2 = C$.

I 80- Calcular en ejes oblicuos de ángulo θ, las coordenadas (α,β) del centro de curvatura y la expresión del radio de curvatura para curvas explícitas $y = f(x)$.

Solución: Siendo: $y = y_1\sin\theta$, $x = x_1+y_1\cos\theta$, $y' = \dfrac{y_1'\sin\theta}{1+y_1'\cos\theta}$, $y'' = \dfrac{y_1''\sin\theta}{(1+y_1'\cos\theta)^2}$, se tiene que: $R = \dfrac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \dfrac{(1+y_1'^2+2y_1'\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}{y_1''\sin\theta}$, $\alpha = x-\dfrac{1+y'^2}{y''}y' = x_1-\dfrac{(y_1'+\cos\theta)(1+2y_1'\cos\theta+y_1'^2)}{y_1''\sin^2\theta}$, $\beta = y_1+\dfrac{(1+y_1'\cos\theta)(1+2y_1'\cos\theta+y_1'^2)}{y_1''\sin^2\theta}$.

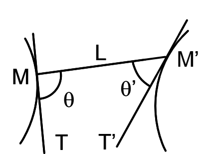
I 81- Hallar el radio de curvatura de las cónicas en sus expresiones canónicas.

Solución: Para la elipse: $R = -a^2b^2\left(\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}}$. Para la hipérbola: $R = a^2b^2\left(\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}}$. Para la parábola: $R = \dfrac{(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}$.

I 82- En una curva C se toma un punto O ordinario y se define como eje OX la tangente en O, y como eje OY la normal en O. Se supone que las coordenadas en un punto M de la curva se pueden desarrollar en serie entera de las potencias del arco $OM = s$. Se pide expresar los primeros términos (hasta el término en s^4) de las series consideradas, en función de los valores R, R', R''..., que toman en el punto O, el radio de curvatura y sus sucesivas derivadas respecto a s.

Solución: El desarrollo de $\overline{r}(s)$ en serie indefinida de Mac-Laurin, según potencias del arco s, es: $\overline{r}(s) = \overline{r}(0)+s\cdot\overline{r'}(0)+\dfrac{s^2}{2!}\overline{r''}(0)+\dfrac{s^3}{3!}\overline{r'''}(0)+\dfrac{s^4}{4!}\overline{r^{(4)}}(0)+0(s^4)$. Calculando las sucesivas derivadas de $\overline{r}(s)$, utilizando las fórmulas de Frenet aplicadas a las curvas planas, la serie anterior se transforma en: $\overline{r} = s\cdot\overline{t_0}+\dfrac{s^2}{2!}\dfrac{n_0}{R_0}+\dfrac{s^3}{3!}\left(\dfrac{-\overline{t_0}}{R_0^2}-\dfrac{R_0'}{R_0^2}\overline{n_0}\right)+\dfrac{s^4}{4!}\left(\dfrac{3R'}{R^3}\overline{t_0}+\dfrac{RR''-2R'^2-1}{R^3}\overline{n_0}\right)+s^4(0)$. Pasando esta serie a cartesianas: $x = s-\dfrac{s^3}{6R^2}+\dfrac{R's^4}{8R^3}+s^4(0)$, $y = \dfrac{s^2}{2R}-\dfrac{R's^3}{6R^2}+\dfrac{(RR''-2R'^2-1)s^4}{24R^3}+s^4(0)$.

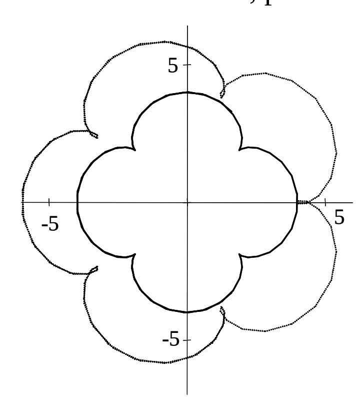
I 83- Los extremos M y M' de un segmento de longitud variable $MM' = L$, describen las curvas C y C' situadas en un mismo plano. Se trazan las tangentes MT y $M'T'$ en sentidos positivos elegidos arbitrariamente sobre las curvas. Se designan por s y s' las abscisas curvilíneas de los puntos M y M', por θ el ángulo que forman las direcciones MT y MM', y por θ' el que forman las direcciones $M'T'$ y $M'M$. Demostrar que $dL = -ds\cos\theta - ds'\cos\theta'$.



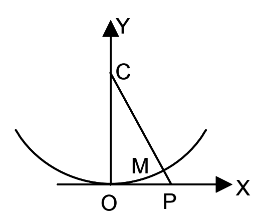
Solución: Sean: $M(x,y)$, $M'(x',y')$, $L^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2$, $LdL = (x-x')(dx-dx') + (y-y')(dy-dy')$, $dL = \frac{x-x'}{L}(dx-dx') + \frac{y-y'}{L}(dy-dy')$. Los cosenos directores de la recta MM', son: $\left(\frac{x-x'}{L}, \frac{y-y'}{L}\right)$, y los correspondientes a la tangente MT son: $\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}\right)$. Luego se tiene que: $\cos\theta = -\left(\frac{x-x'}{L}\frac{dx}{ds} + \frac{y-y'}{L}\frac{dy}{ds}\right)$, $\cos\theta' = \frac{x-x'}{L}\frac{dx'}{ds'} + \frac{y-y'}{L}\frac{dy'}{ds'}$ (como θ y θ' están en sentido contrario. uno de ellos ha de ser negativo, por ejemplo θ). Por tanto: $-ds\cos\theta = \frac{x-x'}{L}dx + \frac{y-y'}{L}dy$, $ds'\cos\theta' = \frac{x-x'}{L}dx' + \frac{y-y'}{L}dy'$. Restando ambas igualdades, queda demostrada la proposición del enunciado: $-ds\cos\theta - ds'\cos\theta' = \frac{x-x'}{L}(dx-dx') + \frac{y-y'}{L}(dy-dy') = dL$.

I 84- Puesta la ecuación de las curvas cicloidales en la forma $\frac{x}{R} = (1+n)\cos\theta - \cos(n+1)\theta$, $\frac{y}{R} = (1+n)\sin\theta - \sin(n+1)\theta$, siendo $n = \frac{R}{R_1}$, hallar su evoluta.

Solución: Obteniendo las derivadas primera y segunda de las ecuaciones paramétricas dadas, se tiene: $\frac{x'}{R} = -(1+n)\sin\theta + (n+1)\sin(n+1)\theta$, $\frac{x''}{R} = -(1+n)\cos\theta + (n+1)^2\cos(n+1)\theta$, $\frac{y'}{R} = (1+n)\cos\theta - (n+1)\cos(n+1)\theta$, $\frac{y''}{R} = -(1+n)\sin\theta + (n+1)^2\sin(n+1)\theta$.
Luego se obtiene: $\frac{x'^2+y'^2}{R^2} = 2(n+1)^2(1-\cos n\theta)$, $\frac{x'y''-y'x''}{R^2} = \left[(n+1)^2 + (n+1)^3\right](1-\cos n\theta)$, $\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-y'x''} = \frac{2}{n+2}$. Introduciendo estos valores en las coordenadas del centro de curvatura $\alpha = x - \frac{y'(x'^2+y'^2)}{x'y''-y'x''}$, $\beta = y + \frac{x'(x'^2+y'^2)}{x'y''-y'x''}$, se tienen las ecuaciones paramétricas de la evoluta: $x = R\left[\frac{n(n+1)}{n+2}\cos\theta + \frac{n}{n+2}\cos(n+1)\theta\right]$, $y = R\left[\frac{n(n+1)}{n+2}\sin\theta + \frac{n}{n+2}\sin(n+1)\theta\right]$. En el dibujo se ha representado la evoluta, y en línea fina la curva dada, para $R = 1$, $n = 4$.



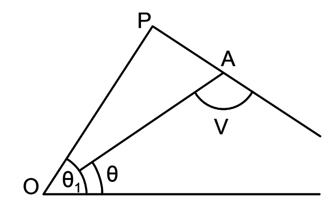
I 85- Sobre una curva tangente en el origen O al eje X, se toma un punto M infinitamente próximo a O, y sobre OX se toma OP =arco OM. La recta MP corta a OY en el punto C. Demostrar que cuando M tiende a O, el punto C tiene una posición límite tal que OC vale tres veces la ordenada del centro de curvatura en O de la curva dada.



Solución: Sean: $P(s,0)$, $C(0,\beta)$, $CP \equiv \frac{x}{s} + \frac{y}{\beta} = 1$, $M\left(s - \frac{s^3}{6R^2}, \frac{s^2}{2R}\right)$ (ver problema I 82). Como CP pasa por M, se tiene: $\frac{s - \frac{s^3}{6R^2}}{s} + \frac{\frac{s^2}{2R}}{\beta} = 1$. Operando: $\beta = 3R$.

I 86- Se considera la curva $\rho = 2a\cos\theta$. Desde el origen O se bajan las perpendiculares a todas sus tangentes. El lugar geométrico de los pies es la podaria, sobre la que se opera como sobre la curva dada. Se continúa así, obteniéndose la serie de podarias de la curva dada respecto de O. 1º) Hallar la ecuación de la n-sima podaria.2º) Hallar la diferencial de arco de la n-sima podaria en función de n y θ, y la longitud que corresponde a $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Solución:



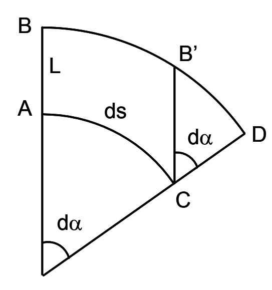
1º) Sea $A(\rho,\theta)$ un punto de la curva, siendo AP la tangente en A. Sea $P(\rho_1,\theta_1)$ un punto de la primera podaria. Por tanto, se tiene: $\tan V = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{2a\cos\theta}{-2a\sin\theta} = -\cot\theta$, $V = \theta - \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{\pi}{2} + \theta_1 - \theta$, $2\theta = \theta_1$, $\theta_1 = \frac{\theta}{2}$. Luego: $\rho_1 = \rho\cos(\theta_1 - \theta) = \rho\cos\theta = 2a\cos^2\frac{\theta_1}{2}$. Procediendo de la misma forma para la segunda podaria: $\tan V = -\cot\frac{\theta_1}{2}$, $V = \frac{\pi}{2} + \theta_2 - \theta_1$, con lo que: $\rho_2 = 2a\cos^3\frac{\theta_2}{3}$, obteniéndose así las sucesivas podarias, deduciéndose que la ecuación de la n-sima podaria, es: $\rho = 2a\cos^{n+1}\frac{\theta}{n+1}$. 2º) Como $\frac{ds}{d\theta} = 2a(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{1}{2}} = 2a\cos^n\frac{\theta}{n+1}$, se tiene que la diferencial de arco es: $ds = 2a\cos^n\frac{\theta}{n+1}d\theta$. Luego, $s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2a\cos^n\frac{\theta}{n+1}d\theta = a(n+1)\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}$. Si n es par, $s = \frac{[1\cdot 3 \cdot\ldots(n+1)]^2\pi a}{(n+1)!}$. Si n es impar, $s = \frac{[1\cdot 3\cdot\ldots(n+1)]^2 2a}{(n+1)!}$.

I 87- Sean M y M' dos puntos infinitamente próximos de una curva plana, y sea d la distancia del punto M' a una recta R que pasa por M. Se toma como infinitamente pequeño principal, la distancia MM', y se pide discutir el orden de d.

Solución: Sean las coordenadas de los dos puntos: $M[x,f(x)]$, $M'[x+h,f(x+h)]$. La ecuación de la recta R es: $Y - f(x) = m(X-x)$. Por tanto, la distancia d entre el punto M' y la recta R, viene dada por: $d = \frac{m(x+h) - f(x+h) - mx + f(x)}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{mh - [f(x) + hf'(x) + \ldots - f(x)]}{\sqrt{m^2+1}} \simeq \frac{h(m - f'_x)}{\sqrt{m^2+1}}$. Luego el orden de d es el mismo que el de h, a no ser que la tangente en M sea paralela a OY, es decir $m \to \infty$, en cuyo caso se procedería de forma similar con $x = g(y)$. Si $m \neq f'_x$, d es de 1º orden. Si $m = f'_x$, d es del orden de la primera derivada que no se anule en el punto M'.

I 88- Se da una curva cerrada de longitud s. Sobre las normales y hacia fuera, se toman longitudes constantes iguales a L. Encontrar el área comprendida entre la curva dada y la así formada.

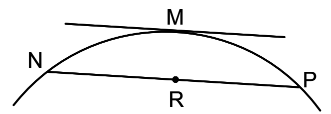
Solución:



Sea AC un arco de la curva dada, de longitud ds. Sean AB y CD las normales trazadas en A y C. Sea CB' paralela a AB. La curva formada es $BB'D$. La superficie de la corona $ABDC$ es igual a la superficie del trapecio curvilíneo $ABB'C$, más la del triángulo curvilíneo $B'CD$. Como $S_{ABB'C} \simeq AC\cdot L = ds\cdot L$, y $S_{B'CD} \simeq \frac{1}{2}L^2 d\alpha$, se tiene que la superficie pedida es: $\int\left(Lds + \frac{1}{2}L^2 d\alpha\right) = L\cdot s + \frac{1}{2}L^2\int_0^{2\pi} d\alpha =$ $= L(s + \pi L)$.

I 89- Se traza la tangente en un punto M de la curva $y=f(x)$, y una serie de cuerdas NP, paralelas a la tangente. El lugar geométrico de los puntos medios R de las cuerdas, es una curva que pasa por M. Hallar el coeficiente angular de la nueva curva en el punto M.

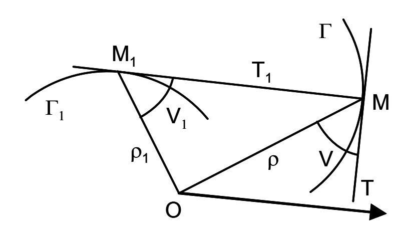
Solución:



Sean las coordenadas: $M(x,y)$, $N[x+h, f(x+h)]$, $P[x+k, f(x+k)]$, $R\left[x+\frac{h+k}{2}, \frac{f(x+h)+f(x+k)}{2}\right]$. Aplicando la fórmula de Taylor, se tiene: $f' = \frac{f(x+k)-f(x+h)}{k-h} = f' + \frac{k+h}{2!}f'' + \frac{k^3-h^3}{(k-h)3!}f''' + \ldots$ Luego: $(k+h)f'' + (k^2+kh+h^2)\frac{f'''}{3} + \ldots = 0$. Si $k \to h$, se tiene que: $2f'' + hf''' = 0$. De donde: $h = \frac{-2f''}{f'''}$. El coeficiente angular de la tangente buscada es el límite del coeficiente angular de MR, cuando h y k tienden a cero. Por tanto: $m = \frac{\frac{f(x+h)+f(x+k)}{2} - f(x)}{x+\frac{h+k}{2} - x} = f' + \frac{k^2+h^2}{2(k+h)}f'' + \ldots$ Al tender $k \to h$, $m = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f' + \frac{h}{2}f'' + \ldots = f' - \frac{f''^2}{f'''}$.

I 90- Encontrar una curva semejante a su evoluta, siendo el origen O el polo doble.

Solución:



Sea Γ_1 la evoluta de Γ. Sea M un punto de Γ, y sea T su tangente en M. Sea M_1 el punto de Γ_1 situado sobre la normal T_1 de Γ en M. Por tanto, T_1 es la tangente de Γ_1.en M_1. Las tangentes T y T_1 son perpendiculares, y como Γ y Γ_1 son semejantes siendo O el polo de semejanza, se tiene que: $\widehat{OMT} = V = \widehat{OM_1T_1} = V_1$, por lo que $\widehat{MOM_1} = 90º$. Luego $\tan V_1 = \frac{OM}{OM_1} = \frac{\rho}{\rho_1}$. Como $\tan V = \frac{\rho}{\rho'}$, se tiene que $\rho' = \rho_1$. Por semejanza se tiene que: $\rho_1 = k\rho$. Luego: $\rho' = k\rho$, $\frac{d\rho}{d\theta} = k\rho$, $\frac{d\rho}{\rho} = kd\theta$. Integrando: $\ln\rho = k\theta + C_1$, $\rho = Ce^{k\theta}$, que es una espiral logarítmica.

I 91- Hallar el radio de curvatura en el origen, de la curva $x^2+2axy+by^2+2cy=0$.

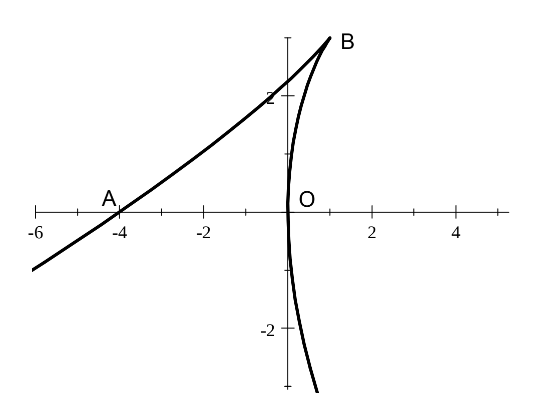
Solución: Derivando: $2x+2ay+2axy'+2byy'+2cy'=0$, de donde $y'(0)=0$. Volviendo a derivar: $2+2ay'+2ay'+2axy''+2by'^2+2byy''+2cy''=0$. De donde $y''(0) = \frac{-1}{c}$. Luego, $R = \left|\pm\frac{1}{\frac{-1}{c}}\right| = c$.

I 92- Hallar el área engendrada por la revolución de la tractriz alrededor del eje X.

Solución: Las ecuaciones paramétricas de la tractriz (evolvente de la catenaria), son: $x = \lambda - a\tanh\frac{\lambda}{a}$, $y = \frac{a}{\cosh\frac{\lambda}{a}}$. Luego: $ds = \sqrt{\left(1-\frac{1}{\cosh^2\frac{\lambda}{a}}\right)^2 + \frac{\sinh^2\frac{\lambda}{a}}{\cosh^4\frac{\lambda}{a}}}\,d\lambda = a\tanh\frac{\lambda}{a}d\lambda$. El área engendrada es: $2\pi\int_a^b yds = 4\pi a\int_0^\infty \frac{\sinh\frac{\lambda}{a}}{\cosh^2\frac{\lambda}{a}}d\lambda = 4\pi a\left|-\frac{a}{\cosh\frac{\lambda}{a}}\right|_0^\infty = 4\pi a^2$.

I 93- Hallar la envolvente de $x+my+3m^2+m^3=0$. Calcular el área comprendida entre la envolvente y el eje de las X, y la longitud del arco situado encima de OX.

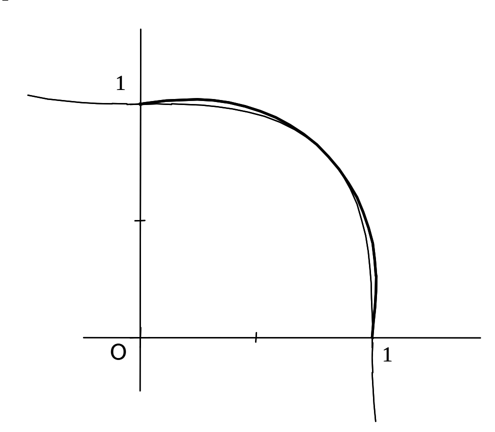
Solución: Derivando respecto a m: $y+6m+3m^2=0$. Luego la envolvente en paramétricas, es: $y=-6m-3m^2$, $x=2m^3+3m^2$. Para $m=0$, la curva corta a los ejes coordenados en $O(0,0)$, siendo su tangente $x=0$. Para $m=-2$, la curva corta al eje XX' en el punto $A(-4,0)$. Para $m=-1$, la curva tiene un punto de retroceso en $B(1,3)$. La curva tiene una rama parabólica según el eje de abscisas. El dibujo de la curva es el siguiente:



El área pedida es la comprendida entre la envolvente y OX, es decir el triángulo curvilíneo $OBAO$, cuya área es: $\int_{m=0}^{m=-2} y\,dx=\int_0^{-2}(-6m-3m^2)(6m^2+6m)dm=-18\int_0^{-2}(m^4+3m^3+2m^2)dm=\frac{24}{5}$. La longitud del arco OB, es: $\int_{-1}^{-2}6(1+m)\sqrt{1+m^2}\,dm=3\ln\frac{\sqrt{5}-2}{3-2\sqrt{2}}-2\sqrt{2}+2+4\sqrt{5}\simeq 9,07318$.

I 94- Hallar la podaria de $x^3+y^3=1$, respecto al origen.

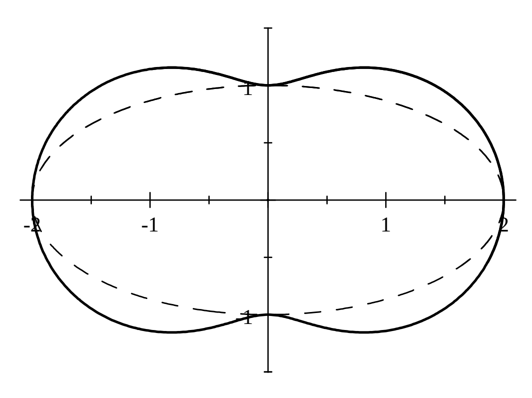
Solución: La curva pedida es el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas desde el origen sobre las tangentes a la curva dada. Derivando la ecuación dada, se tiene: $3x^2+3y^2y'=0$, $y'=\frac{-x^2}{y^2}$. Luego la tangente a la curva en el punto (α,β) de la curva, es: $y-\beta=-\frac{\alpha^2}{\beta^2}(x-\alpha)$. Como $\alpha^3+\beta^3=1$, la tangente es: $\alpha^2x+\beta^2y=1$, y la perpendicular desde el origen es: $\beta^2x-\alpha^2y=0$. Los cuadrados de las coordenadas del punto de intersección, son: $\alpha^2=\frac{x}{x^2+y^2}$, $\beta^2=\frac{y}{x^2+y^2}$. Sustituyendo estos valores en la ecuación de la curva, se tiene la ecuación pedida: $\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^{\frac{3}{2}}=1$, es decir: $(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}=x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}$, o bien en polares: $\rho=\left[(\rho\cos\theta)^{\frac{3}{2}}+(\rho\sin\theta)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}$. En el dibujo siguiente se ha representado la podaria en línea gruesa, y en línea fina la curva dada. La podaria existe para 0º $\le\theta\le$ 90º. Las dos curvas coinciden en los puntos de argumento 0º, 45º, 90º; en los demás puntos el radio de la podaria es mayor que el de la curva dada.



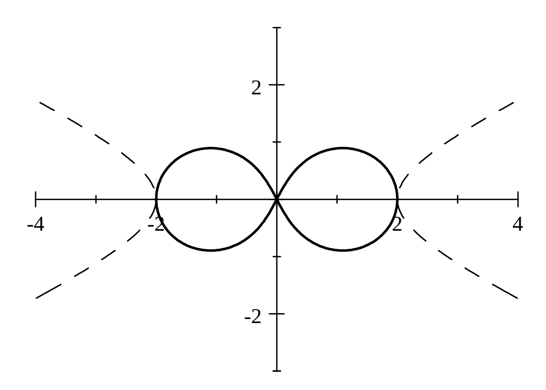
I 95- Hallar las podarias respecto al origen, de las curvas $\left(\frac{x}{a}\right)^m+\left(\frac{y}{b}\right)^m=1$. Como casos particulares, hallar las podarias de la elipse, hipérbola e hipérbola equilátera.

Solución: Siendo (α,β) un punto de la curva dada, se tiene que la tangente en dicho punto es:

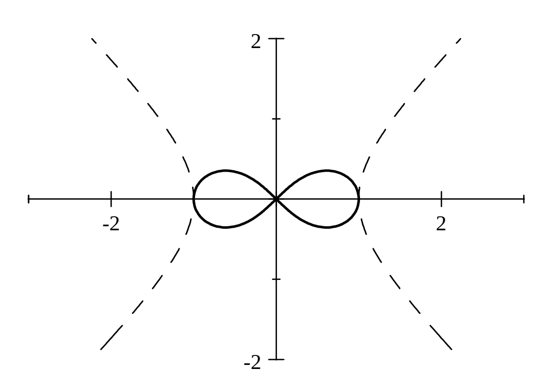
$y-\beta = \frac{-b^m\alpha^{m-1}}{a^m\beta^{m-1}}(x-\alpha)$. La perpendicular trazada sobre la tangente desde $(0,0)$, es: $y = \frac{a^m\beta^{m-1}}{b^m\alpha^{m-1}}x$, siendo $\left(\frac{\alpha}{a}\right)^m + \left(\frac{\beta}{b}\right)^m = 1$. De las dos primeras ecuaciones, se deduce que: $\alpha = \left(\frac{a^m x}{x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{m-1}}$, $\beta = \left(\frac{b^m y}{x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{m-1}}$. Sustituidos estos valores en la última ecuación, se obtiene la ecuación de la podaria: $(ax)^{\frac{m}{m-1}} + (by)^{\frac{m}{m-1}} = (x^2+y^2)^{\frac{m}{m-1}}$. Para la elipse, $m = 2$, es decir: $a^2x^2+b^2y^2 = (x^2+y^2)^2$. Para la hipérbola, $m = 2$, sustituyéndose b por bi, es decir: $a^2x^2-b^2y^2 = (x^2+y^2)^2$. Para la hipérbola equilátera, $b^2 = a^2$, es decir: $a^2(x^2-y^2) = (x^2+y^2)^2$. En los dibujos siguientes se han representado para las tres cónicas estudiadas, sus podarias respecto al origen.



Elipse, $a = 2, b = 1$



Hipérbola, $a = 2, b = 1$



Hipérbola equilátera, $a = b = 1$

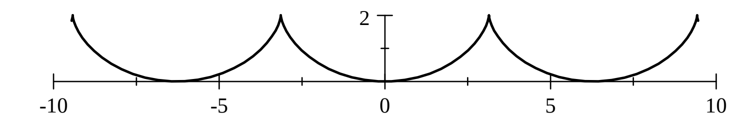
I 96- Hallar la ecuación cartesiana de la curva cuya ecuación intrínseca es $Rs = \frac{1}{c}$, siendo c una constante.

Solución: $\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{ds} = cs$, $d\theta = csds$, $\theta = \frac{cs^2}{2}$, $x = \int\cos\theta ds = \int\cos\left(\frac{cs^2}{2}\right)ds$, $y = \int\sin\left(\frac{cs^2}{2}\right)ds$. La curva es una clotoide (espiral de Cornu), que tiene dos puntos asintóticos, cuyas coordenadas son: $x = y = \pm\sqrt{\frac{\pi}{4c}}$, y que tiene en el origen un punto de inflexión cuya tangente es el eje de abscisas.

Nota: $\int_0^x \sin t^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)\cdot(2n+1)!}$; $\int_0^x \cos s^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)\cdot(2n)!}$.

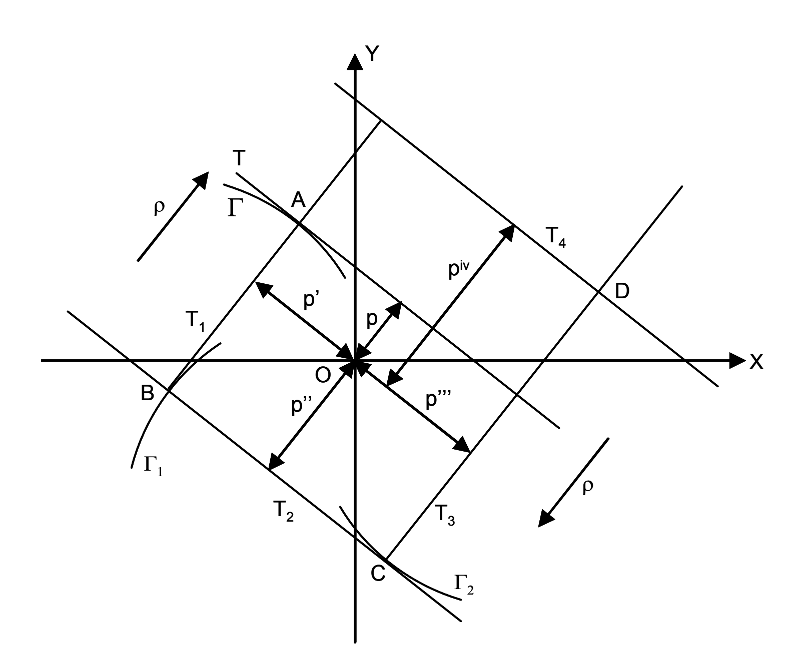
I 97- Hallar la ecuación cartesiana de la curva cuya ecuación intrínseca es $R^2 = a^2 - s^2$.

Solución: $R = \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{a^2 - s^2}$, $d\theta = \frac{ds}{\sqrt{a^2 - s^2}}$. Integrando, se tiene: $\theta = \arcsin\frac{s}{a}$. Luego, $s = a\sin\theta$, $x = \int_0^s R\cos\theta d\theta = a\int_0^\theta \cos^2\theta d\theta = \frac{a}{4}(2\theta + \sin 2\theta)$, $y = \int_0^\theta \sin\theta ds = \frac{a}{4}(1 - \cos 2\theta)$, que son las ecuaciones paramétricas de la cicloide. En el dibujo siguiente se ha representado esta curva para $a = 4$.



I 98- Hallar la curva cuyo radio de curvatura en cada punto sea equivalente al radio de curvatura de la segunda evoluta en el punto correspondiente a la primera.

Solución:



La curva Γ que se pide, pasa por A, cuya tangente T es: $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$. El radio de curvatura es AB. La tangente en B a la primera evoluta Γ_1, tiene la ecuación: $-x\sin\alpha + y\cos\alpha = p'$. Por C pasa la segunda evoluta, cuya tangente T_2 es: $-x\cos\alpha - y\sin\alpha = p''$, siendo su radio de curvatura CD. La ecuación de CD (que es T_3), es: $x\sin\alpha - y\cos\alpha = p'''$. La perpendicular a esta recta, trazada desde D, es T_4, cuya ecuación es: $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p^{IV}$. Como se ve en la figura, y según el sentido de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, se tiene: $p + p'' = -(p'' + p^{IV})$, puesto que el radio de curvatura de Γ, que es $p + p''$, es equivalente al de Γ_2, que es $p'' + p^{IV}$, teniendo en cuenta los signos correspondientes. Luego $p^{IV} + 2p'' + p = 0$. La ecuación característica de esta ecuación diferencial, es: $r^4 + 2r^2 + 1 = 0$, es decir $(r^2+1)^2 = 0$, luego tiene dos raíces dobles: $r = \pm i$. Luego se tiene: $p = A\cos\alpha + B\sin\alpha + \alpha(C\cos\alpha + D\sin\alpha) = x\cos\alpha + y\sin\alpha$, $(x - A)\cos\alpha + (y - B)\sin\alpha = \alpha(C\cos\alpha + D\sin\alpha)$. Llevando los ejes a (A,B), se tiene: $x\cos\alpha + y\sin\alpha =$ $= \alpha(C\cos\alpha + D\sin\alpha)$. Haciendo $\frac{D}{C} = \tan\alpha_0$, se tiene que: $x\cos\alpha + y\sin\alpha = \frac{C\alpha}{\cos\alpha_0}\cos(\alpha - \alpha_0) =$ $= E\alpha\cos(\alpha - \alpha_0)$. Girando los ejes el ángulo α_0, se tiene que: $x\cos(\alpha - \alpha_0) + y\sin(\alpha - \alpha_0) =$ $= E\alpha\cos(\alpha - \alpha_0)$. Llamando $\alpha - \alpha_0 = \beta$, se tiene: $x\cos\beta + y\sin\beta == E(\beta + \alpha_0)\cos\beta$. Llevando los ejes a $(E\alpha_0, 0)$, se tiene: $x\cos\beta + y\sin\beta = E\beta\cos\beta$. Derivando esta ecuación: $-x\sin\beta + y\cos\beta =$ $= E\cos\beta - E\beta\sin\beta$. De donde se tiene que: $x = E(\beta - \sin\beta\cos\beta) = \frac{E}{2}(2\beta - \sin 2\beta)$, $y = E\cos^2\beta =$ $= \frac{E}{2}(1 + \cos 2\beta)$, que son las ecuaciones paramétricas de la cicloide.

I 99- Hallar las curvas cuyas tangentes son interceptadas en una relación constante, por una circunferencia dada. Es decir, siendo P y Q los puntos de intersección con el círculo, y M el punto de tangencia, se tiene

$\frac{MP}{MQ} = k$, constante.

Solución: Sea la ecuación de la circunferencia: $x = R\cos\theta$, $y = R\sin\theta$. La ecuación de la tangente a las curvas buscadas es: $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$. Los puntos de intersección P y Q, vienen dados por $R\cos\theta\cos\alpha + R\sin\theta\sin\alpha - p = 0$, es decir, $R\cos(\alpha - \theta) - p = 0$. Sean estos puntos de intersección $P(R\cos\theta_1, R\sin\theta_1)$, $Q(R\cos\theta_2, R\sin\theta_2)$. Como la derivada de la tangente es: $-x\cos\alpha + y\cos\alpha - p' = 0$, se tiene que: $\frac{MP}{MQ} = \frac{-R\cos\theta_1\cos\alpha + R\sin\theta_1\cos\alpha - p'}{-R\cos\theta_2\cos\alpha + R\sin\theta_2\cos\alpha - p'} = k$. Luego, $\frac{p' + R\sin(\alpha - \theta_1)}{p' + R\sin(\alpha - \theta_2)} = k$. Como $\cos(\alpha - \theta) = \frac{p}{R}$, se tiene que: $\frac{p' + \sqrt{R^2 - p^2}}{p' - \sqrt{R^2 - p^2}} = k$. Luego se obtiene: $(k-1)p' = (k+1)\sqrt{R^2 - p^2}$, $\frac{(k-1)dp}{\sqrt{R^2 - p^2}} = (k+1)d\alpha$. Integrando: $p = R\sin\frac{(k+1)(\alpha - \alpha_0)}{k-1}$. Luego la curva pedida es la envolvente: $x\cos\alpha + y\sin\alpha - R\sin\frac{(k+1)(\alpha - \alpha_0)}{k-1} = 0$.

I 100- Sea M un punto de la curva $f(u,v) = 0$, en la que u y v pueden representar: 1º) Las distancias del punto a las rectas A y B. 2º) Las distancias de M a los puntos fijos P y Q. 3º) u, la distancia del punto M a A, y v, la distancia MP. Demostrar que en todos los casos, si se lleva a partir de M, paralelamente a las direcciones de las rectas u y v, longitudes proporcionales a f'_u y f'_v, considerando los signos, la diagonal del paralelogramo construido con esas longitudes estará dirigida según la normal en los puntos M.

Solución: La ecuación de la curva está referida a los ejes OX, OY, estando situado O al mismo lado de A y B que M. Sea p la longitud de la perpendicular desde O sobre A, y sean α y β los ángulos que forma con los ejes. Luego: $MA \equiv p - x\cos\alpha - y\sin\beta$. Análogamente, $MB \equiv p_1 - x\cos\alpha_1 - y\cos\beta_1$. Sean $P(a,b)$ y $Q(a_1,b_1)$, $PM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, $QM = \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2}$. La ecuación de la normal es $\frac{X - x}{\frac{\delta f}{\delta u}\cdot\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta v}\cdot\frac{\delta v}{\delta x}} = \frac{Y - y}{\frac{\delta f}{\delta u}\cdot\frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta f}{\delta v}\cdot\frac{\delta v}{\delta y}}$, y como en todos los casos $\frac{\delta u}{\delta x} = -\cos\left(\widehat{u,x}\right)$, $\frac{\delta u}{\delta y} = -\cos\left(\widehat{u,y}\right)$, $\frac{\delta v}{\delta x} = -\cos\left(\widehat{v,x}\right)$, $\frac{\delta v}{\delta y} = -\cos\left(\widehat{v,y}\right)$, esta ecuación toma la forma: $\frac{X - x}{\frac{\delta f}{\delta u}\cos\left(\widehat{u,x}\right) + \frac{\delta f}{\delta v}\cos\left(\widehat{v,x}\right)} = \frac{Y - y}{\frac{\delta f}{\delta u}\cos\left(\widehat{u,y}\right) + \frac{\delta f}{\delta v}\cos\left(\widehat{v,y}\right)}$, que es la expresión analítica que demuestra la proposición del enunciado.

I 101- Se trazan a varias curvas dadas, a partir de un punto M situado en el plano de las curvas, normales que las encuentran en los puntos M_1, M_2, ... El punto M se desplaza de forma que se tenga siempre que $MM_1^2 + MM_2^2 + \ldots = k$, constante. Demostrar que la normal al lugar que describe M, pasa por el centro de distancias medias de M_1, M_2,...

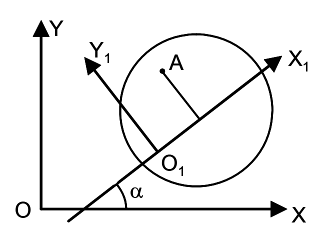
Solución: Sean las coordenadas de los sucesivos puntos: $M(\alpha,\beta)$, $M_i(x_i,y_i)$. Luego se tiene: $\sum MM_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[(x_i - \alpha)^2 + (y_i - \beta)^2\right] = n(\alpha^2 + \beta^2) - 2\alpha\sum x_i - 2\beta\sum y_i + \sum x_i^2 + \sum y_i^2 = k$. En esta igualdad, diferenciando respecto a α y β, se tiene que: $2(n\alpha - \sum x_i)d\alpha + 2(n\beta - \sum y_i)d\beta = 0$. Es decir: $\left(\alpha - \frac{\sum x_i}{n}\right)d\alpha + \left(\beta - \frac{\sum y_i}{n}\right)d\beta = 0$. Luego la normal al lugar que describe M, pasa por el punto $\left(\frac{\sum x_i}{n}, \frac{\sum y_i}{n}\right)$.

I 102- Hallar las curvas cuyo radio de curvatura es constante.

Solución: Siendo $R = \frac{ds}{d\theta}$, $x = \int_0^\theta R\cos\theta d\theta = R\sin\theta$, $\sin\theta = \frac{x}{R}$, $y = \int_0^\theta R\sin\theta d\theta = -R(\cos\theta - 1)$, $\cos\theta = \frac{R - y}{R}$. Luego $\sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{x^2}{R^2} + \frac{(R-y)^2}{R^2} = 1$. Es decir: $x^2 + y^2 - 2Ry = 0$, que es una circunferencia.

I 103- Un plano móvil P resbala sobre un plano fijo P_0. Sobre el plano P_0 se marca un punto O y una curva C. Sobre el plano P se marca un punto A y una curva D. El punto A describe la curva C, mientras que la curva D pasa por O. Indicar el método a seguir para encontrar la base y la ruleta.

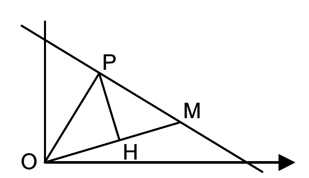
Solución:



Sean XOY los ejes en el plano fijo, y $X_1O_1Y_1$ los ejes en el móvil. El punto A de la figura movible está definido por las coordenadas (x_1, y_1), y respecto a XOY por: $x = x_0 + x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha$, $y = y_0 + x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha$ $(\mathbf{I})$. Dado el movimiento de la figura plana, se conocerán: $\alpha = \alpha(t)$, $x_0 = x_0(t)$, $y_0 = y_0(t)$. Las componentes de la velocidad de A, corresponden a las derivadas de $(\mathbf{I})$: $v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx_0}{dt} - x_1 \frac{d\alpha}{dt} \sin\alpha - y_1 \frac{d\alpha}{dt} \cos\alpha$, $v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy_0}{dt} + x_1 \frac{d\alpha}{dt} \cos\alpha - y_1 \frac{d\alpha}{dt} \sin\alpha$ $(\mathbf{II})$. Como el centro instantáneo de rotación tiene velocidad nula, al particularizar $(\mathbf{II})$ para las coordenadas (λ, μ) de este punto, se tendrá que: $v_x = v_y = 0$. Por tanto, se tiene: $\frac{dx_0}{dt} - \lambda \frac{d\alpha}{dt} \sin\alpha - \mu \frac{d\alpha}{dt} \cos\alpha = 0$, $\frac{dy_0}{dt} + \lambda \frac{d\alpha}{dt} \cos\alpha - \mu \frac{d\alpha}{dt} \sin\alpha = 0$, de donde: $\lambda = \frac{\frac{dx_0}{dt} \sin\alpha - \frac{dy_0}{dt} \cos\alpha}{\frac{d\alpha}{dt}}$, $\mu = \frac{\frac{dx_0}{dt} \cos\alpha + \frac{dy_0}{dt} \sin\alpha}{\frac{d\alpha}{dt}}$ $(\mathbf{III})$, que son las ecuaciones de la ruleta móvil. Para hallar la ruleta fija, basta sustituir estas últimas coordenadas en $(\mathbf{I})$, obteniendo: $\zeta = x_0 - \frac{\frac{dy_0}{dt}}{\frac{d\alpha}{dt}}$, $\eta = y_0 + \frac{\frac{dx_0}{dt}}{\frac{d\alpha}{dt}}$ $(\mathbf{IV})$. Las ecuaciones $(\mathbf{III})$ se pueden escribir así: $\lambda = \frac{dx_0}{d\alpha} \sin\alpha - \frac{dy_0}{d\alpha} \cos\alpha$, $\mu = \frac{dx_0}{d\alpha} \cos\alpha + \frac{dy_0}{d\alpha} \sin\alpha$. Y las ecuaciones $(\mathbf{IV})$ de esta forma: $\zeta = x_0 - \frac{dy_0}{d\alpha}$, $\eta = y_0 + \frac{dx_0}{d\alpha}$, con lo que se ve que las ruletas no dependen del tiempo, sino únicamente de la posición relativa de los ejes fijos y móviles.

I 104- Hallar la ecuación en polares de la curva tal que, siendo P el pie de la perpendicular bajada desde un punto fijo O sobre la tangente en M, la proyección de OP sobre el radio vector OM sea constante.

Solución:

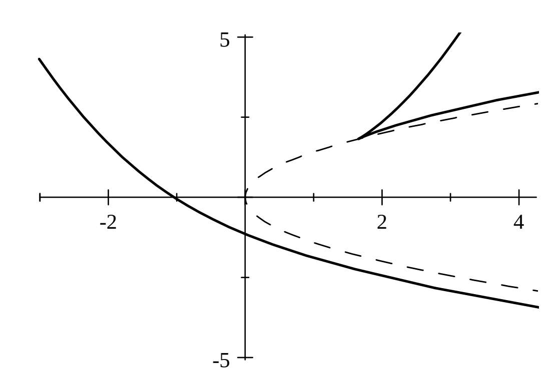


Siendo $OH = k$, $V = \widehat{OPH} = \widehat{OMP}$, $\rho = OM$, se tiene: $\sin V = \frac{k}{OP} = \frac{k}{\rho \sin V}$. Luego, $\rho \sin^2 V = k$. Como $\tan V = \frac{-\rho}{\rho'}$, se tiene la ecuación: $\rho^3 - k(\rho^2 + \rho'^2) = 0$, obteniéndose: $\rho' = \pm\rho\sqrt{\frac{\rho}{k} - 1}$. Es decir: $\frac{d\rho}{\rho\sqrt{\frac{\rho}{k} - 1}} = d\theta$. Integrando: $2\arctan\sqrt{\frac{\rho}{k} - 1} = \theta + C$. De donde: $\rho = k \sec^2 \frac{\theta + C}{2} = \frac{2k}{1 + \cos(\theta + C)}$, ecuación de una parábola de foco el origen.

I 105- Si por un punto M de una curva Γ se traza la tangente MA a la parábola $y^2 - 2px = 0$, la tangente MT a la curva Γ es paralela a OA. Hallar las curvas Γ.

Solución: Sea $M(x,y)$, y sea $A(x_0, y_0)$ el punto de tangencia. Se tiene $\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{p}{y_0}$, $y_0^2 - 2px_0 = 0$, $\frac{y_0}{x_0} = y'$. Eliminando $x_0 = \frac{2p}{y'^2}, y_0 = \frac{29}{y'}$, queda la ecuación diferencial de Γ: $xy'^2 - 2yy' + 2p = 0$. Es decir: $2y = xy' + \frac{2p}{y'}$. Derivando: $2y' = y' + x\frac{dy'}{dx} - \frac{2p}{y'^2} \cdot \frac{dy'}{dx}$. Luego: $\frac{dx}{dy'} - \frac{x}{y'} + \frac{2p}{y'^3} = 0$, ecuación lineal, cuya solución es: $x = y'\left(C + \frac{2p}{3y'^2}\right) = Cy' + \frac{2p}{3y'^2}$. Llamando $y' = t$, se tiene la ecuación pedida:

$x=\dfrac{3Ct^3+2p}{3t^2}$, $y=\dfrac{3Ct^3+8p}{6t}$. En el dibujo siguiente se ha representado Γ, y en línea fina la parábola dada, para $p=C=1$.



I 106- Hallar la curva para la que se verifica que las distancias desde el origen a los puntos en que su tangente corta al eje OY y su normal corta al eje OX, están en una relación dada constante.

Solución: La ecuación de la tangente en (x,y) es: $Y-y=y'(X-x)$, siendo su ordenada en el origen: $y-xy'$. La ecuación de la normal en (x,y) es: $Y-y=-\dfrac{1}{y'}(X-x)$, siendo la abscisa en el origen: $x+yy'$. Por tanto: $y-xy'=k(x+yy')$, es decir: $dy(x+ky)+dx(kx-y)=0$. Haciendo el cambio: $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, se tiene: $dx=\cos\theta\cdot d\rho-\rho\sin\theta d\theta$, $dy=\sin\theta\cdot d\rho+\rho\cos\theta d\theta$. Sustituyendo y operando: $k\rho d\rho+\rho^2 d\theta=0$, $kd\rho+\rho d\theta=0$, $\dfrac{d\rho}{\rho}=\dfrac{-d\theta}{k}$, $\ln\rho=\dfrac{-\theta}{k}+C$, $\rho=e^{\frac{-\theta}{k}+C}=Ae^{\frac{-\theta}{k}}$.

I 107- Sea una recta OM que pasa por un punto fijo O y que encuentra en A_1, A_2, ..., A_n, a n curvas dadas (A_1), (A_2), ..., (A_n). El punto M es tal que se verifica que $\sum_{h=1}^{h=n}\dfrac{a_h}{OA_h}=\dfrac{m}{OM}$, siendo a_1,..., a_n y m, constantes dadas. Cuando OM gira alrededor de O, el punto M describe una curva (M). Demostrar que se verifica que $\sum_{h=1}^{h=n}\dfrac{a_h}{\rho_h\cos^3\varphi_h}=\dfrac{m}{R\cos^3\Phi}$, donde ρ_h es el radio de curvatura de la curva (A_h), φ_h es el ángulo que forma este radio con OM, y R y Φ son las cantidades análogas en la curva (M).

Solución: Se toma como polo el punto O. La ecuación de la recta OM es: $\theta=\theta_1$. Las ecuaciones de las curvas (A_1),..., (A_n), son: $r_1=f_1(\theta)$,..., $r_n=f_n(\theta)$. La curva lugar de M al girar OM, siendo $OM=r$, es: $\dfrac{m}{r}=\dfrac{a_1}{f_1}+\ldots+\dfrac{a_n}{f_n}$, siendo su radio de curvatura: $R=\dfrac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2r'^2-rr''}$. Como el radio de curvatura está situado sobre la normal a la curva, el ángulo que forma dicha normal con OM, es: $\Phi=V+\dfrac{\pi}{2}$, siendo V el ángulo que forma la tangente a la curva (M) con el radio vector r. Luego de lo expuesto se deduce que: $\tan\Phi=\tan\left(V+\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\frac{r}{r'}+\tan\frac{\pi}{2}}{1-\frac{r}{r'}\tan\frac{\pi}{2}}=\dfrac{-r'}{r}$, es decir: $\cos\Phi=\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{r'}{r}\right)^2}}=\dfrac{r}{(r^2+r'^2)^{\frac{1}{2}}}$. Por lo tanto: $R\cos^3\Phi=\dfrac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2r'^2-rr''}\cdot\dfrac{r^3}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{r^3}{r^2+2r'^2-rr''}$. De acuerdo con esto, se tiene que: $\sum_{h=1}^{h=n}\dfrac{a_h}{\rho_h\cos^3\varphi_h}=\dfrac{a_1}{\frac{r_1^3}{r_1^2+2r_1'^2-r_1r_1''}}+\ldots=\dfrac{a_1(r_1^2+2r_1'^2-r_1r_1'')}{r_1^3}+\ldots=\left(\dfrac{a_1}{r_1}+\dfrac{a_2}{r_2}+\ldots+\dfrac{a_i}{r_i}+\ldots\right)+$ $+\left(\dfrac{a_1(2r_1'^2-r_1r_1'')}{r_1^3}+\ldots+\dfrac{a_i(2r_i'^2-r_ir_i'')}{r_i^3}+\ldots\right)$. Como $\left(\dfrac{1}{r}\right)'=\dfrac{-r'}{r^2}$, $\left(\dfrac{1}{r}\right)''=\dfrac{-r''r+2r'^2}{r^3}$, se tiene, introduciendo estos valores, que: $\sum_{h=1}^{h=n}\dfrac{a_h}{\rho_h\cos^3\varphi_h}=\left(\dfrac{a_1}{r_1}+\ldots\right)+\left[a_1\left(\dfrac{1}{r}\right)''+\ldots\right]=\dfrac{m}{r}+m\left(\dfrac{1}{r}\right)''=$ $=m\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{r''r-2r'^2}{r^3}\right)=m\dfrac{r^2-r''r+2r'^2}{r^3}=\dfrac{m}{R\cos^3\Phi}$.

I 108- Sea M un punto cualquiera de la curva $y=f(x)$. Sea N el punto donde la normal en M encuentra a OX, y sea P el pie de la perpendicular trazada desde O a MN. Hallar la ecuación diferencial que se debe

satisfacer para que se verifique constantemente la igualdad $OP = MN$, e integrarla.

Solución: La ecuación de la normal en $M(x,y)$, es: $Y - y = \frac{-1}{y'}(X - x)$. Su intersección con OX es el punto N de coordenadas: $(x + yy', 0)$. La ecuación de la perpendicular por O es: $Y = y'X$. Su intersección con MN es el punto P, cuyas coordenadas son: $\left(\frac{x+yy'}{1+y'^2}, \frac{xy'+yy'^2}{1+y'^2}\right)$. Por tanto, se tiene que: $OP^2 = \left(\frac{x+yy'}{1+y'^2}\right)^2 + \left(\frac{xy'+yy'^2}{1+y'^2}\right)^2 = \left(\frac{x+yy'}{1+y'^2}\right)^2(1+y'^2) = \frac{(x+yy')^2}{1+y'^2}$, $MN^2 = (yy')^2 + y^2$. Luego: $\frac{(x+yy')^2}{1+y'^2} = (yy')^2 + y^2 = y^2(1+y'^2)$, de donde: $x + yy' = \pm y(1+y'^2)$. 1º) Tomando el signo positivo, se tiene que: $x + yy' = y(1+y'^2)$. Haciendo $y' = p$, se tiene: $y = \frac{x}{y'^2 - y' + 1} = \frac{x}{p^2 - p + 1}$. Siendo: $\frac{1}{p^2-p+1} \equiv f(p)$, se tiene: $y = xf(p)$, de donde: $dy = f(p)dx + xf'(p)dp$, $\frac{dy}{dx} = p = f(p) + xf'(p)\frac{dp}{dx}$, $\frac{dx}{x} = \frac{-f'(p)dp}{f(p)-p} = \frac{-f'(p)dp}{f(p)-p} + \frac{dp}{f(p)-p} - \frac{dp}{f(p)-p} = \frac{-(f'(p)-1)dp}{f(p)-p} - \frac{dp}{f(p)-p} = \frac{-(f'(p)-1)dp}{f(p)-p} - \frac{dp}{\frac{1}{p^2-p+1} - p} = \frac{-(f'(p)-1)dp}{f(p)-p} - \frac{(p^2-p+1)dp}{-p^3+p^2-p+1} = \frac{-(f'(p)-1)dp}{f(p)-p} + \frac{dp}{2(p-1)} + \frac{pdp}{2(p^2+1)} - \frac{dp}{2(p^2+1)}$. Integrando, se tiene: $\ln\frac{x}{c} = -\ln(f(p)-p) + \frac{1}{2}\ln(p-1) + \frac{1}{4}\ln(p^2+1) - \frac{\arctan p}{2}$. Por tanto, la ecuación pedida, en paramétricas, es: $x = C\frac{p^2-p+1}{p^3-p^2+p-1}(p-1)^{\frac{1}{2}}(p^2+1)^{\frac{1}{4}}e^{\frac{-\arctan p}{2}}$, $y = \frac{x}{p^2-p+1}$. 2º) Tomando el signo negativo: $x + yy' = -y(1+y'^2)$. Procediendo como en el caso anterior, la ecuación pedida es: $x = C\frac{p^2+p+1}{p^3+p^2+p+1}(p+1)^{\frac{1}{2}}(p^2+1)^{\frac{1}{4}}e^{\frac{\arctan p}{2}}$, $y = \frac{-x}{p^2+p+1}$.

I 109- Hallar la curva que coincide con su cuarta evoluta.

Solución: Sea $x\cos\theta + y\sin\theta = p$, la tangente a la curva buscada. Sus sucesivas derivadas son: $-x\sin\theta + y\cos\theta = p'$, $-x\cos\theta - y\sin\theta = p''$, $x\sin\theta - y\cos\theta = p'''$, $x\cos\theta + y\sin\theta = p^{iv}$. Luego $p^{iv} = p$. La ecuación característica, $r^4 = 1$, tiene por raíces: $\pm 1, \pm i$. por lo que: $p = Ae^{\theta} + Be^{-\theta} + C\cos\theta + D\sin\theta$. La curva buscada es la envolvente de: $x\cos\theta + y\sin\theta = Ae^{\theta} + Be^{-\theta} + C\cos\theta + D\sin\theta$. Derivando respecto a θ, se tiene: $-x\sin\theta + y\cos\theta - Ae^{\theta} + Be^{-\theta} + C\sin\theta - D\cos\theta = 0$. De este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, se obtiene la ecuación en paramétricas de la curva buscada: $x = Ae^{\theta}(\cos\theta - \sin\theta) + Be^{-\theta}(\sin\theta + \cos\theta) + C$, $y = Ae^{\theta}(\sin\theta + \cos\theta) + Be^{-\theta}(\sin\theta - \cos\theta) + D$, o bien:
$x = -\sqrt{2}Ae^{\theta}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}Be^{-\theta}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + C$,
$y = \sqrt{2}Ae^{\theta}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}Be^{-\theta}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + D$.
Haciendo el cambio $\theta = \alpha + \frac{\pi}{4}$, estas ecuaciones paramétricas se pueden presentar de la siguiente forma: $x = -\sqrt{2}Ae^{\alpha+\frac{\pi}{4}}\sin\alpha + \sqrt{2}Be^{-\alpha-\frac{\pi}{4}}\cos\alpha + C$, $y = \sqrt{2}Ae^{\alpha+\frac{\pi}{4}}\cos\alpha + \sqrt{2}Be^{-\alpha-\frac{\pi}{4}}\sin\alpha + D$.

I 110- Se da la curva $y = (e^x - \sin x)\left(\lim_{m\to\infty}\lim_{t\to 0}\frac{\sin(m!\pi x)}{t + \sin(m!\pi x)}\right) + \sin x$. Estudiarla, analizando su continuidad en el origen.

Solución: Para $\sin(m!\pi x) \neq 0$, se tiene: $\lim_{m\to\infty}\lim_{t\to 0}\frac{\sin(m!\pi x)}{t + \sin(m!\pi x)} = 1$, por lo que: $y = e^x$. Para $\sin(m!\pi x) = 0$, se tiene: $m!\pi x = k\pi$. Luego: $x = \lim_{m\to\infty}\frac{k}{m!} = 0$. Por tanto, para $x = 0$, la curva tiene una discontinuidad en el origen, que es evitable haciendo que $y(0) = e^0 = 1$.

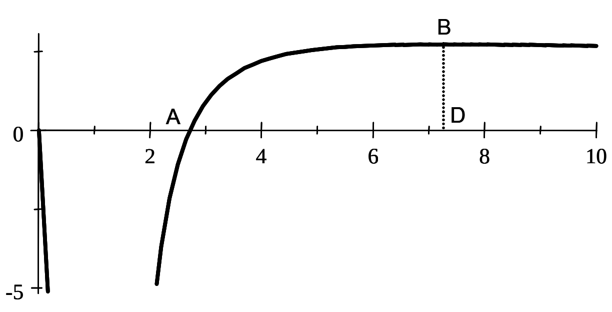
I 111- Dadas las curvas $\rho^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\cos\frac{2\theta}{3}$, $a^2 = \rho^2\cos 2\theta$, demostrar que la longitud total de la primera es seis veces la diferencia entre el arco infinito de la segunda y su asíntota (el arco de la segunda curva y su asíntota comienzan en el eje polar).

Solución: Como $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = (d\rho)^2 + \rho^2(d\theta)^2$, en la primera curva se tiene que:

$ds_1 = \dfrac{a\rho^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}d\theta = \dfrac{a\rho^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}} \bullet \dfrac{\rho^{-\frac{1}{3}}d\rho}{\sqrt{a^{\frac{4}{3}} - \rho^{\frac{4}{3}}}} = \dfrac{a^{\frac{2}{3}}d\rho}{\left(a^{\frac{4}{3}} - \rho^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}$. Y en la segunda curva: $ds_2 = \dfrac{\rho^3 d\theta}{a^2} =$ $= \dfrac{\rho^3}{a^2} \bullet \dfrac{a^2 d\rho}{\rho(\rho^4 - a^4)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{\rho^2 d\rho}{(\rho^4 - a^4)^{\frac{1}{2}}}$. La mitad de la longitud de la primera curva viene dada por: $s_1 = a^{\frac{2}{3}}\int_0^a \dfrac{d\rho}{\left(a^{\frac{4}{3}} - \rho^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}$. Siendo s_2 un arco cualquiera de hipérbola, $s_2 = \int_a^r \dfrac{\rho^2 d\rho}{(\rho^4 - a^4)^{\frac{1}{2}}}$. Hay que demostrar que $\lim\limits_{r\to\infty}(r - s_2) = \dfrac{s_1}{3}$. Haciendo $\rho = az^3$ en la ecuación de s_1, se tiene: $s_1 = 3a\int_0^1 \dfrac{z^2 dz}{\sqrt{1 - z^4}}$. Y haciendo $a = \rho z$ en la ecuación de s_2, se tiene: $s_2 = a\int_z^1 \dfrac{dz}{z^2\sqrt{1 - z^4}}$. Luego $r - s_2 = \dfrac{a}{z} - s_2 =$ $= a\left[\dfrac{1}{z} - \int_z^1 \dfrac{dz}{z^2\sqrt{1 - z^4}}\right]$. Ahora bien, como: $\dfrac{s_1}{3a} = \int_0^1 \dfrac{z^2 dz}{\sqrt{1 - z^4}} = \int_0^1 \dfrac{dz}{z^2\sqrt{1 - z^4}} - \int_0^1 \dfrac{(1 - z^4)^{\frac{1}{2}}dz}{z^2} =$ $= \int_0^1 \dfrac{dz}{z^2\sqrt{1 - z^4}} - \left[-\left|\dfrac{\sqrt{1 - z^4}}{z}\right|_0^1 - 2\int_0^1 \dfrac{z^2 dz}{\sqrt{1 - z^4}}\right] = \mathbf{I}$, por tanto, se tiene que: $s_1 = 3a \bullet \mathbf{I}$. Como, $\int_0^1 \dfrac{dz}{z^2\sqrt{1 - z^4}} + \dfrac{\sqrt{1 - z^4}}{z} + 2\mathbf{I} = \mathbf{I}$, $\int_0^1 \dfrac{dz}{z^2\sqrt{1 - z^4}} = -\mathbf{I} - \dfrac{\sqrt{1 - z^4}}{z}$. Por todo ello se deduce que: $\lim\limits_{r\to\infty}(r - s_2) = \lim\limits_{z\to 0} a\left(\dfrac{1}{z} - \int_0^1 \dfrac{dz}{z^2\sqrt{1 - z^4}}\right) = \lim\limits_{z\to 0} a\left(\dfrac{1}{z} + \mathbf{I} + \dfrac{\sqrt{1 - z^4}}{z}\right) = a\mathbf{I} + \lim\limits_{z\to 0}\left(\dfrac{1}{z} + \dfrac{\sqrt{1 - z^4}}{z}\right) =$ $= a\mathbf{I} + \lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1 - 1 + \frac{z^4}{2} + \ldots}{z} = a\mathbf{I} + \lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z^3}{2} = a\mathbf{I}$, es decir que: $\lim\limits_{r\to\infty}(r - s_2) = a\mathbf{I} = \dfrac{s_1}{3}$, $s_1 = 3a\mathbf{I}$.

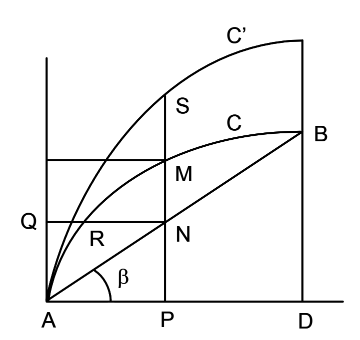
I 112- Se da la curva $y = \dfrac{4e\ln\frac{x}{e}}{(\ln x)^2}$. 1º) Estudiar la curva. 2º) Sea C el arco de ella que tiene por origen A, donde atraviesa al eje OX, y por extremo B que corresponde al máximo de y. Hallar el área Σ comprendida entre el arco C, el eje OX y la ordenada BD de B. 3º) Sea M un punto cualquiera del arco C. Se traza la perpendicular MP a OX, que encuentra en N a AB. Se traza por N la paralela a OX que encuentra en R al arco C y en Q a la paralela al eje OY trazada por A. Se lleva sobre la prolongación de PM una longitud $MS = QR$. Cuando M describe el arco C, el punto S describe un arco de curva C' que pasa por A. Calcular el coeficiente angular de la tangente a C' trazada en A. 4º) Sea Σ' el área barrida por el segmento de recta MS cuando M describe el arco C. Demostrar que existe entre Σ y Σ' una relación numérica que subsiste cuando se reemplaza en las construcciones precedentes, el arco C por otro arco de una curva cualquiera que tenga los mismos extremos A y B, siempre que este nuevo arco esté situado por encima de AB y no sea cortado en más de un punto por una paralela a cualquiera de los ejes coordenados.

Solución:



1º) $y = \dfrac{4e}{\ln x} - \dfrac{4e}{(\ln x)^2}$. La curva solo existe para $x \geq 0$, siendo el origen un punto de discontinuidad. . La curva atraviesa al eje OX en el punto $A(e,0)$, siendo la pendiente de su tangente en este punto: $y' = \dfrac{4e}{x(\ln x)^2}\left(\dfrac{2}{\ln x} - 1\right) = 4$. La curva alcanza su máximo en el punto $B(e^2, e)$. Tiene por asíntotas: $y = 0$, $x = 1$. 2º) $\Sigma = 4e\int_e^{e^2}\left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{(\ln x)^2}\right)dx$. Como, $\int \dfrac{dx}{\ln x} = \dfrac{x}{\ln x} + \int \dfrac{dx}{(\ln x)^2}$, se tiene que:

$\int\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{(\ln x)^2}\right)dx=\frac{x}{\ln x}$. Por tanto: $\Sigma=4e\left|\frac{x}{\ln x}\right|_e^{e^2}=2e^2(e-2)$. 3º) Las construcciones del enunciado se representan en el siguiente esquema:



Recordando que si se sustituye en un punto de una curva, el arco por la tangente, al tender a cero el incremento, la diferencia entre arco y tangente es un infinitésimo. Por ello, en un entorno infinitesimal alrededor de A, se puede considerar que AM es la tangente en A, cuya pendiente es 4. Siendo: $AP=\delta$, $\tan\beta=\frac{BD}{AD}=\frac{e}{e^2-e}=\frac{1}{e-1}$, se tiene que: $PN=AQ=\frac{\delta}{e-1}$. Como, $\frac{AQ}{QR}=4$, se tiene que: $QR=\frac{\delta}{4(e-1)}$. Luego: $PS=PM+MS=4\cdot AP+QR=4\delta+\frac{\delta}{4(e-1)}$. El coeficiente angular pedido es: $\frac{PS}{AP}=4+\frac{1}{4(e-1)}=4,1455$. 4º) Siendo: $m=\tan\beta=\frac{1}{e-1}$, $QR=a$, $PN=f(a)$, $\Sigma=\int_A^D f(a)da$, $d\Sigma'=MS\cdot d(AP)$, $AP=\frac{PN}{m}=\frac{f(a)}{m}$, $d(AP)=\frac{f'(a)da}{m}$, $d\Sigma'=a\cdot\frac{f'(a)da}{m}$, $\Sigma'=\int_A^D\frac{af'(a)da}{m}=$ $=\int_A^D\frac{ad[f(a)]}{m}=\frac{1}{m}|af(a)|_A^D-\frac{1}{m}\int_A^D f(a)da=\frac{AD\cdot DB}{m}-\frac{\Sigma}{m}=\frac{(e^2-e)e}{m}-\frac{\Sigma}{m}$. Luego: $m\Sigma'+\Sigma=$ $=e^2(e-1)$. La relación pedida es: $\Sigma'+(e-1)\Sigma=e^2(e-1)^2$.

I 113- Se considera la envolvente de $x\sin\alpha-y\cos\alpha=2\alpha\sin\alpha+2\cos\alpha$. 1º) Hallar la longitud del arco a partir de $\alpha=0$. 2º) Hallar la expresión del radio de curvatura.

Solución: 1º) Derivando la ecuación dada, se tiene: $x\cos\alpha+y\sin\alpha=2\alpha\cos\alpha$. De esta ecuación y de la dada, se obtiene la envolvente: $x=2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=2\alpha+\sin 2\alpha$, $y=-2\cos^2\alpha=-1-\cos 2\alpha$. Luego: $x'_\alpha=2+2\cos 2\alpha$, $y'_\alpha=2\sin 2\alpha$, $ds=\sqrt{4+4\cos^2 2\alpha+8\cos 2\alpha+4\sin^2 2a}\,d\alpha=50\sin\left(\frac{2\pi t}{45}-\frac{2\pi}{3}\right)=$ $=2\sqrt{2+2\cos 2\alpha}\,d\alpha=4\cos\alpha d\alpha$. Por tanto: $s=\int_0^\alpha 4\cos\alpha d\alpha=4\sin\alpha$. 2º) $x''_{\alpha 2}=-4\sin 2\alpha$, $y''_{\alpha^2}=4\cos 2\alpha$. De donde: $R=\frac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y''-y'x''}=\frac{64\cos^3\alpha}{8(1+\cos 2\alpha)}=4\cos\alpha$.

I 114- ¿Sobre qué curva debe hacerse girar una cardioide para que su polo describa una línea recta?

Solución: La ecuación de la cardioide referida a su polo, es: $\rho=a(1+\cos\theta)$. Sea el eje de las X el descrito por el polo doble. La normal a la trayectoria en O, cortará a la cardioide en A, punto de contacto con la curva incógnita. Siendo P el origen de coordenadas, se tiene que las coordenadas de A son PO y OA, siendo $OA=\rho=a(1+\cos\theta)$. Como las diferenciales de arco han de ser iguales, se tiene: $(dx)^2+(dy)^2=(\rho^2+\rho'^2)(d\theta)^2$. Sabiendo que $y=a(1+\cos\theta)=\rho$, de donde: $dy=\rho' d\theta$, se tiene que: $(dx)^2=(\rho^2+\rho'^2)(d\theta)^2-\rho'^2(d\theta)^2=\rho^2(d\theta)^2$. Luego se tiene: $dx=\rho d\theta=a(1+\cos\theta)d\theta$. Integrando: $x=a(\theta+\sin\theta)+C$. Por tanto, las ecuaciones buscadas son: $x=a(\theta+\sin\theta)+C$, $y=a(1+\cos\theta)$, que corresponden a una cicloide, en la que a es el radio del círculo generador.

I 115- Hallar las curvas cuyo radio de curvatura es proporcional al cubo de la normal.

Solución: El radio de curvatura es: $R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$. La normal mide: $y\sqrt{1+y'^2}$. Luego se tiene que: $\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}=k\left(y\sqrt{1+y'^2}\right)^3$, de donde: $ky^3y''=1$. Haciendo $y'=p$, $y''=pp'$, se tiene: $ky^3pp'=1$, es decir: $kpdp=\frac{dy}{y^3}$. Integrando, se tiene que: $\frac{kp^2}{2}=\frac{-1}{2y^2}+C_1$, es decir: $kp^2=\frac{-1}{y^2}+C_2$, de donde:

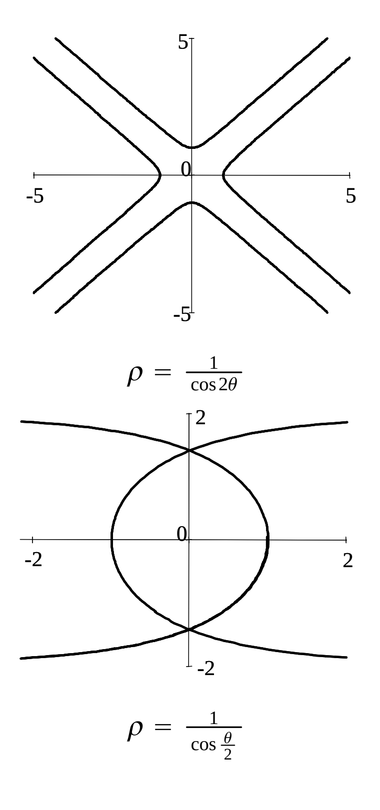
$p = y' = \sqrt{\frac{-1}{ky^2}+\frac{C_2}{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}\,y}\sqrt{C_2y^2-1} = \frac{dy}{dx}$, $dx = \frac{\sqrt{k}\,ydy}{\sqrt{C_2y^2-1}} = \sqrt{\frac{k}{C_2}}\frac{ydy}{\sqrt{y^2-\frac{1}{C_2}}}$. Integrando: $x = \sqrt{\frac{k}{C_2}}\sqrt{y^2-\frac{1}{C_2}}+C_3$, de donde: $(x-C_3)^2 = x^2-2C_3x+C_3^2 = \frac{k}{C_2}\left(y^2-\frac{1}{C_2}\right) = \frac{k}{C_2^2}(C_2y^2-1)$. Por tanto: $C_2^2x^2-kC_2y^2-2C_2^2C_3x+C_2^2C_3^2+k = 0$, o bien: $x^2-Ay^2-2Bx+C = 0$.

I 116- Dada una curva cerrada sin puntos dobles, hallar el lugar geométrico de los puntos $P(a,b)$ tales que su podaria respecto de P, tenga área constante.

Solución: Sea la curva dada la envolvente de $x\cos\theta+y\sin\theta+f(\theta) = 0$, que referida al punto P, es: $(x+a)\cos\theta+(y+b)\sin\theta+f(\theta) = 0$. La distancia a P, cuyas coordenadas son ahora $(0,0)$, es: $\rho = a\cos\theta+b\sin\theta+f(\theta)$. Siendo constante el área S de la podaria, se tiene que: $S = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\rho^2d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a\cos\theta+b\sin\theta+f(\theta)]^2d\theta = k$. Como $S = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta+\frac{b^2}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta+$ $+ab\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta d\theta+a\int_0^{2\pi}\cos\theta f(\theta)d\theta+b\int_0^{2\pi}\sin\theta f(\theta)d\theta+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}f^2(\theta)d\theta$. Se sabe que: $\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta =$ $= \int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta = \pi$, y $\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta d\theta = 0$, luego $S = \frac{\pi}{2}(a^2+b^2)+a\int_0^{2\pi}\cos\theta f(\theta)d\theta+b\int_0^{2\pi}\sin\theta f(\theta)d\theta+$ $+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}f^2(\theta)d\theta = k$. Haciendo $a = x$, $b = y$, se tiene: $\frac{\pi}{2}(x^2+y^2)+Ax+By+C = 0$, que es un círculo.

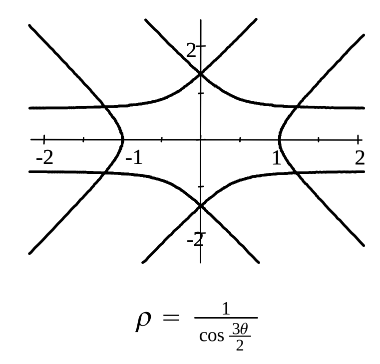
I 117- Hallar la curva cuyo radio de curvatura está en una relación dada con la longitud de la normal. Estudiar los casos en que la relación sea +1, –1, +2, –2.

Solución: El radio de curvatura es: $R = \frac{(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}$. La normal mide: $(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{1}{2}}$. Luego: $\rho^2(\lambda-1)+\rho'^2(2\lambda-1)-\lambda\rho\rho'' = 0$. Haciendo $\rho' = z\rho$, $\rho'' = \rho(z'+z^2)$, sustituyendo y operando: $z^2-\frac{\lambda}{\lambda-1}z'+1 = 0$, es decir: $\frac{\lambda-1}{\lambda}d\theta = \frac{dz}{z^2+1}$. De donde: $z = \tan\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\theta+k\right) = \frac{\rho'}{\rho} = \frac{d\rho}{\rho d\theta}$, $\frac{d\rho}{\rho} = \tan\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\theta+k\right)d\theta$. Luego: $\ln(C\rho) = -\ln\cos\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\theta+k\right) = \ln\frac{1}{\cos\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\theta+k\right)}$. Por tanto: $\rho = \frac{A}{\cos\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\theta+B\right)}$. Para el caso $\lambda = 1$, ρ es constante. Para $\lambda = -1$, $\rho = \frac{A}{\cos(2\theta+B)}$. Para $\lambda = 2$, $\rho = \frac{A}{\cos\left(\frac{\theta}{2}+B\right)}$. Para $\lambda = -2$, $\rho = \frac{A}{\cos\left(\frac{3\theta}{2}+B\right)}$. En los dibujos siguientes se han representado estas tres últimas curvas.



$\rho = \frac{1}{\cos 2\theta}$

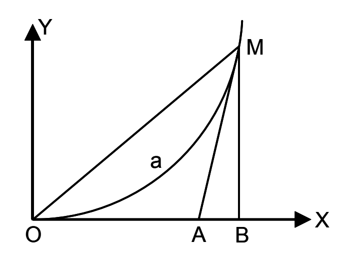
$\rho = \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}$



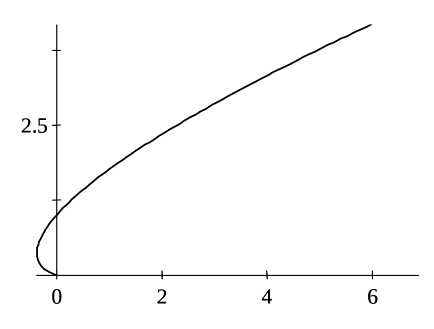
$$\rho = \frac{1}{\cos\frac{3\theta}{2}}$$

E 118- Encontrar una curva que pase por el origen y tal que si se designa por M un punto cualquiera de la curva, el área comprendida entre la curva y el radio vector OM, sea igual al área limitada por la curva, el eje OX y la tangente en M.

Solución:



Se ha de tener que: $S_{OaMO} = S_{OaMAO}$. Como $S_{OaMBO} = \int_0^x y dx$, $MA \equiv Y - y = y'(X - x)$, $A\left(\frac{xy' - y}{y'}, 0\right)$, $AB = x - \frac{xy' - y}{y'} = \frac{y}{y'}$, se tiene que: $S_{OaMO} = \frac{1}{2}xy - \int_0^x y dx$, $S_{OaMAO} = \int_0^x y dx - \frac{1}{2}\frac{y}{y'}y$. Es decir: $2\int_0^x y dx = \frac{xy}{2} + \frac{y^2}{2y'}$. Derivando y operando: $\frac{-y''}{y'^2} = \frac{y - xy'}{y^2}$. Integrando: $\frac{1}{y'} = \frac{x}{y} + C$, es decir: $\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} - C = 0$. Luego: $x = y(A\ln y + B)$. En el dibujo se ha representado esta curva para $A = 1$, $B = 0$.



I 119- Sean M y M' dos puntos de una curva $y = f(x)$, correspondientes a las abscisas x y $x + \Delta x$. La tangente en M' corta en T a la ordenada en M. La tangente en M corta en T' a la ordenada en M'. Se pide el orden del infinitésimo $MT - M'T'$, siendo Δx el infinitésimo principal.

Solución: Coordenadas de M: $[x, f(x)]$. Coordenadas de M': $[x + \Delta x, f(x + \Delta x)]$. Ecuación de la tangente en M: $Y - f(x) = f'(x)(X - x)$. Ecuación de la tangente en M': $Y - f(x + \Delta x) = f'(x + \Delta x)(X - x - \Delta x)$. Luego las coordenadas de los puntos de intersección, son: $T[x, f(x + \Delta x) - \Delta x f'(x + \Delta x)]$, $T'[x + \Delta x, f(x) + \Delta x f'(x)]$. Luego la distancia MT es igual a $f(x + \Delta x) - \Delta x f'(x + \Delta x) - f(x)$, y la distancia $M'T'$ es igual a $f(x) + \Delta x f'(x) - f(x + \Delta x)$. De donde se tiene: $MT - M'T' = 2f(x + \Delta x) - 2f(x) - -\Delta x[f'(x + \Delta x) + f'(x)]$. Desarrollando en serie esta expresión, se tiene que la diferencia $MT - M'T' = = 2\left[f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}(\Delta x)^2 + \frac{f'''(x)}{3!}(\Delta x)^3 + \ldots\right] - 2f(x) - -\Delta x\left[2f'(x) + f''(x)\Delta x + \frac{f'''(x)}{2!}(\Delta x)^2 + \ldots\right]$. Luego: $MT - M'T' = \frac{1}{3}f'''(x)(\Delta x)^3 - \frac{1}{2}f'''(x)(\Delta x)^3 + \ldots = = -\frac{f'''(x)}{6}(\Delta x)^3 + \ldots$. Por tanto, el infinitésimo es de tercer orden.

I 120- Hallar las trayectorias ortogonales de una familia de cónicas homofocales.

Solución: Sea la ecuación de las cónicas homofocales: $\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1$. Derivando, se tiene: $\frac{x}{a^2+\lambda}+\frac{yy'}{b^2+\lambda}=0$. Luego: $\frac{1}{a^2+\lambda}=\frac{y'}{x^2y'-xy}$, $\frac{1}{b^2+\lambda}=\frac{1}{y^2-xyy'}$. Eliminando λ entre estas dos ecuaciones, se tiene: $a^2-b^2=\frac{x^2y'-xy}{y'}-y^2+xyy'$. Es decir: $xyy'^2+y'(x^2-y^2-a^2+b^2)-xy=0$. Sustituyendo y' por $\frac{-1}{y'}$, se obtiene la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales, que es: $xyy'^2+y'(x^2-y^2-a^2+b^2)-xy=0$, que coincide con la ecuación anterior. Por tanto, las trayectorias ortogonales de una familia de cónicas homofocales, son ellas mismas.

I 121- En los extremos M y N de un arco de curva, se trazan las tangentes hasta su punto de encuentro A. Hallar el orden y la parte principal de la distancia de A a la secante MN, y del ángulo $\widehat{NMA}$.

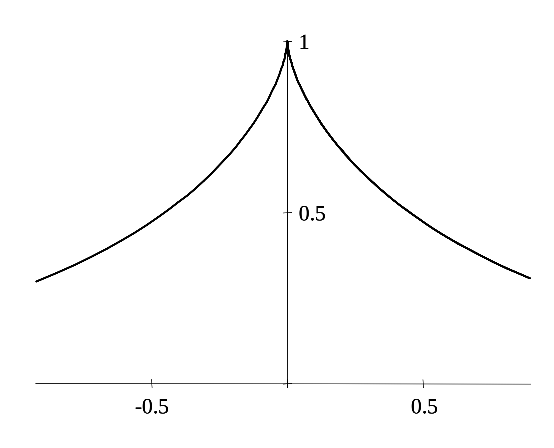
Solución: Las ecuaciones intrínsecas de la curva (ver problema I 82), son: $x=s-\frac{s^3}{6R^2}+\ldots$, $y=\frac{s^2}{2R}-\frac{R's^3}{6R^2}+\ldots$. Sea el punto $M(0,0)$, siendo su tangente: $y=0$. Sea el punto $N\left(s,\frac{s^2}{2R}\right)$, siendo su tangente: $y-\frac{s^2}{2R}=\frac{s}{R}(x-s)$. Las coordenadas de su punto de intersección son: $A\left(\frac{s}{2},0\right)$. La ecuación de MN es: $y=\frac{s}{2R}x$. La distancia de A a MN, es: $\frac{s^2}{2\sqrt{s^2+4R^2}}=\frac{s^2}{4R}$. Luego la distancia es un infinitésimo de 2º orden, siendo su parte principal: $\frac{1}{4R}$. Como, $\tan\widehat{NMA}=\frac{s}{2R}$, el ángulo es un infinitésimo de 1º orden, siendo su parte principal: $\frac{1}{2R}$.

I 122- Hallar una curva que pasando por el origen, sea tal que el centro de gravedad del área limitada por la curva, el eje OX y una ordenada variable, sea constantemente igual a $\frac{3x}{4}$.

Solución: Se ha de tener que: $\frac{\int_0^x xydx}{\int_0^x ydx}=\frac{3x}{4}$. Derivando: $xy=\frac{3}{4}\left(\int_0^x ydx+xy\right)$. Luego: $xy=3\int_0^x ydx$. Derivando: $y+xy'=3y$, es decir: $\frac{2dx}{x}=\frac{dy}{y}$. Integrando: $\ln y=\ln Cx^2$. Luego la curva pedida es: $y=Cx^2$, que es una parábola.

I 123- Hallar el lugar geométrico de los puntos P tales que el segmento MP de la tangente comprendida entre el punto de contacto P y una recta dada (directriz), sea de longitud constante.

Solución: Sea $P(x,y)$ y sea la tangente: $Y-y=y'(X-x)$. Sea la recta dada: $Y=0$. Luego se tiene: $M\left(\frac{xy'-y}{y'},0\right)$. Por tanto: $\left(x-\frac{xy'-y}{y'}\right)^2+y^2=a^2$. De donde: $y'=\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}$. Separando variables: $dx=\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}dy$. Integrando: $x=\sqrt{a^2-y^2}-a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}+C$, que es la ecuación de la tractriz.(involuta de la catenaria). En el dibujo se ha representado la tractriz para $a=1$, $C=0$.



Sección J - GEOMETRÍA DIFERENCIAL EN EL ESPACIO

J 1- Demostrar que el contacto en el origen $(t=0)$ entre la curva $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$, y el paraboloide $x^2+z^2=y$, es de 5º orden.

Solución: $f(x,y,z)=x^2-y+z^2=0$, de donde: $f(t)=t^2-t^2+t^6=t^6$. Luego: $f'(t)=6t^5$, $f''(t)=30t^4$, $f'''(t)=120t^3$, $f^{(4)}=360t^2$, $f^{(5)}=720t$, $f^{(6)}=720$. Como: $f'(0)=f''(0)=f'''(0)=f^{(4)}(0)=f^{(5)}(0)=0$, $f^{(6)}(0)=720$, el contacto es de 5º orden.

J 2- En ejes ortogonales, se considera la curva $y=2(1-\cos x)$, $z=3(x^2-\sin^2 x)$. 1º) Determinar el plano osculador en $x=0$, y el orden del contacto con la curva. 2º) Determinar la esfera osculatriz en dicho punto y el orden del contacto de dicha esfera con la curva.

Solución: 1º) Por desarrollo en serie, se tiene que: $y=2(1-\cos x)=2\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^6}{720}\ldots\right)=$ $=x^2-\frac{x^4}{12}+\frac{x^6}{360}\ldots$, $z=3\left[x^2-\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\ldots\right)^2\right]=x^4-\frac{2}{15}x^6\ldots$. Siendo el plano osculador: $Ax+By+Cz=0$, se tiene: $Ax+B\left(x^2-\frac{x^4}{12}\ldots\right)+C\left(x^4-\frac{2}{15}x^6\ldots\right)=0$. Luego: $Ax=0$, $A=0$; $Bx^2=0$, $B=0$. El plano osculador es $z=0$, siendo el contacto de tercer orden. 2º) Siendo la esfera: $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz=0$, se tiene que: $x^2+\left(x^2-\frac{x^4}{12}+\frac{x^6}{360}\ldots\right)^2+\left(x^4-\frac{2}{15}x^6\ldots\right)^2+ax+$ $+b\left(x^2-\frac{x^4}{12}+\frac{x^6}{360}\ldots\right)+c\left(x^4-\frac{2}{15}x^6\ldots\right)=0$. Luego: $ax=0$, $a=0$; $x^2(1+b)=0$, $b=-1$; $x^4\left(1-\frac{b}{12}+c\right)=0$, $c=\frac{-13}{12}$; $x^6\left(\frac{-2}{12}+\frac{b}{360}-\frac{2c}{15}\right)\neq 0$. Por tanto el contacto es de quinto orden, siendo la esfera osculatriz: $x^2+y^2+z^2-y-\frac{13}{12}z=0$.

J 3- Se considera la curva C de ecuaciones $x=\frac{t^3}{t^2+1}$, $y=\frac{t^2}{t^2+1}$, $z=\frac{t}{t^2+1}$. 1º) Hallar la ecuación del cilindro cuádrico real que la contiene. 2º) Demostrar que por todo punto M del espacio pasan tres planos osculadores, y que el plano que pasa por los puntos de osculación contiene a M.

Solución: 1º) En el plano $x=0$, se tiene: $y=\frac{t^2}{t^2+1}$, $z=\frac{t}{t^2+1}$, de donde $t=\frac{y}{z}$. La ecuación pedida es: $y^2+z^2-y=0$. 2º) La ecuación de los planos que pasan por $M(\alpha,\beta,\gamma)$ es: $x-\alpha+A(y-\beta)+B(z-\gamma)=0$. Este plano corta a la curva en: $\frac{t^3}{t^2+1}-\alpha+A\left(\frac{t^2}{t^2+1}-\beta\right)+$ $+B\left(\frac{t}{t^2+1}-\gamma\right)=0$. Es decir: $t^3+(-\alpha+A-A\beta-B\gamma)t^2+Bt-\alpha-A\beta-B\gamma=0$, luego corta a la curva en tres puntos: t_1,t_2,t_3. Para que el plano sea osculador ha de tenerse que: $t_1=t_2=t_3$. Por tanto: $3t=\alpha-A+A\beta+B\gamma$, $3t^2=B$, $t^3=\alpha+A\beta+B\gamma$. Operando y eliminando A y B, se tiene la ecuación de tercer grado: $(\beta-1)t^3+3\gamma t^2-3\beta t+\alpha=0$. Por tanto, dado un punto $M(\alpha,\beta,\gamma)$, hay tres planos osculadores correspondientes a las tres raíces de t en la ecuación anterior, y los tres pasan por M.

J 4- Dada la curva $x=t^2$, $y=t^3$, $z=t^4$, hallar la condición para que cuatro puntos sean coplanarios, y hallar la ecuación del plano osculador.

Solución: Sea el plano: $Ax+By+Cz+1=0$. Luego: $Ct^4+Bt^3+At^2+1=0$. De donde: $t_1+t_2+t_3+t_4=\Sigma t=S_1=\frac{-B}{C}$, $\Sigma t_it_j=S_2=\frac{A}{C}$, $\Sigma t_it_jt_k=S_3=0$, $\Pi=t_1t_2t_3t_4=\frac{1}{C}$. La condición pedida es: $S_3=\Sigma t_it_jt_k=0$. La ecuación del plano osculador es: $\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}=$

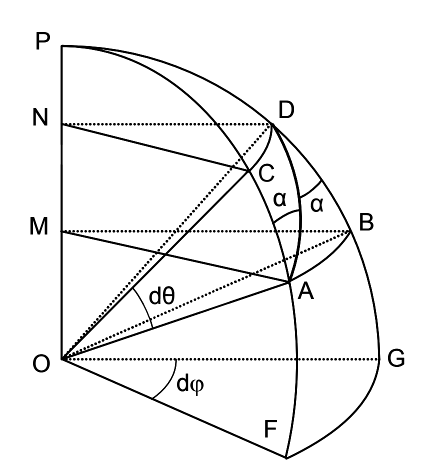
$$=\begin{vmatrix} X-t^2 & Y-t^3 & Z-t^4 \\ 2t & 3t^2 & 4t^3 \\ 2 & 6t & 12t^2 \end{vmatrix}=0.$$

J 5- Hallar las tangentes en el origen, de la curva: $x^2+y^2+z^2-2ax=0$, $x^2+y^2-ax=0$.

Solución: Diferenciando ambas expresiones: $xdx+ydy+zdz-adx=0$, $2xdx+2ydy-adx=0$. Para $x=y=z=0$, se obtiene $dx=0$, mientras que dy, dz están indeterminadas. Para hallar su verdadero valor, se vuelven a diferenciar: $(dx)^2+xd^2x+(dy)^2+yd^2y+(dz)^2+zd^2z-ad^2x=0$, $2(dx)^2+2xd^2x+$ $+2(dy)^2+2yd^2y-ad^2x=0$. Luego para: $x=y=z=dx=0$, se tiene que: $(dy)^2+(dz)^2-ad^2x=0$, $2(dy)^2-ad^2x=0$. Eliminando d^2x, se tiene: $(dy)^2-(dz)^2=0$, luego: $dy=\pm dz$. Por tanto, las tangentes en el origen son: $x=0$, $y=\pm z$.

J 6- Hallar la ecuación de una curva situada en una esfera, que partiendo de un punto situado en el ecuador, corta a los meridianos bajo ángulo de 60º. Hallar su longitud.

Solución:



Se trata de la loxodroma (ver problemas J 8 y J 58). Sean las ecuaciones de la esfera: $x=R\sin\theta\cos\varphi$, $y=R\sin\theta\sin\varphi$, $z=R\cos\theta$, siendo su centro O, su ecuador FG, dos meridianos infinitamente cercanos $FACP$ y $GBDP$, $d\varphi=\widehat{FOG}=\widehat{AMB}=\widehat{CND}$, $d\theta=\widehat{AOC}=\widehat{BOD}$. Sea AD la diferencial de arco de loxodroma, siendo $\alpha=\widehat{CAD}=\widehat{ADB}$. Por tanto, se tiene: $\tan\alpha=\dfrac{AB}{DB}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AMd\varphi}{Rd\theta}=\dfrac{R\sin\theta d\varphi}{Rd\theta}$, $d\varphi=\dfrac{\tan\alpha d\theta}{\sin\theta}$, $\varphi=\tan\alpha\ln\tan\dfrac{\theta}{2}+C$; como para $\theta=\dfrac{\pi}{2}$, $\varphi=0$, luego $C=0$. Despejando el valor de θ, se tiene: $\ln\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\varphi}{\tan\alpha}=\varphi\cot\alpha=k\varphi$, $\sin\theta=\dfrac{1}{\cosh k\varphi}$, $\cos\theta=\tanh k\varphi$. Sustituyendo estos valores en la ecuación de la esfera, se tiene la ecuación paramétrica de la loxodroma: $x=\dfrac{R\cos\varphi}{\cosh k\varphi}$, $y=\dfrac{R\sin\varphi}{\cosh k\varphi}$, $z=R\tanh k\varphi$. Como $k=\cot\alpha=\cot 30º=\sqrt{3}$, introduciendo este valor, se tiene que: $x=\dfrac{R\cos\varphi}{\cosh\sqrt{3}\,\varphi}$, $y=\dfrac{R\sin\varphi}{\cosh\sqrt{3}\,\varphi}$, $z=R\tanh\sqrt{3}\,\varphi$. La longitud de la curva viene dada por: $L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,d\theta=$ $=\dfrac{R}{\cos\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\pi R$. La longitud total teniendo en cuenta los dos hemisferios es $2\pi R$.

J 7- Hallar el área de la superficie cónica barrida por el vector OM cuando M describe el arco $0\le\theta\le 2\pi$ de la curva $x=a\cos\theta$, $y=a\sin\theta$, $z=be^{\theta}$.

Solución: Se tiene que: $\dfrac{y}{x}=\tan\theta$, $z=be^{\arctan\frac{y}{x}}$, $z'_x=\dfrac{-by}{x^2+y^2}e^{\arctan\frac{y}{x}}$, $z'_y=\dfrac{bx}{x^2+y^2}e^{\arctan\frac{y}{x}}$. Luego: $z_x'^2+z_y'^2=\dfrac{b^2}{x^2+y^2}e^{\arctan\frac{y}{x}}$. Haciendo $\rho^2=x^2+y^2$, se tiene que: $1+z_x'^2+z_y'^2=1+\dfrac{b^2}{\rho^2}e^{2\theta}$. Por tanto: $S=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\sqrt{1+\dfrac{b^2}{\rho^2}e^{2\theta}}\,\rho d\rho$, ya que $0\le\rho\le a$, $0\le\theta\le 2\pi$. Operando, se tiene que:

$$S=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\sqrt{\rho^2+b^2e^{2\theta}}\,d\rho=\int_0^{2\pi}d\theta\left|\frac{\rho}{2}\sqrt{\rho^2+b^2e^{2\theta}}+\frac{b^2e^{2\theta}}{2}\ln\left(\rho+\sqrt{\rho^2+b^2e^{2\theta}}\right)\right|_0^a=$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{a}{2}\sqrt{a^2+b^2e^{2\theta}}\,d\theta+\int_0^{2\pi}\frac{b^2e^{2\theta}}{2}\ln\left(a+\sqrt{a^2+b^2e^{2\theta}}\right)d\theta-\int_0^{2\pi}\frac{b^2e^{2\theta}}{2}\ln(be^{\theta})d\theta.$$

Como $\int_0^{2\pi}\dfrac{b^2e^{2\theta}}{2}\ln(be^{\theta})d\theta=\dfrac{b^2\ln b}{2}\int_0^{2\pi}e^{2\theta}d\theta+\dfrac{b^2}{2}\int_0^{2\pi}\theta e^{2\theta}d\theta$, se tiene que: $S=\dfrac{a}{2}I_1|_0^{2\pi}+\dfrac{b^2}{2}I_2|_0^{2\pi}-$ $-\dfrac{b^2\ln b}{2}I_3|_0^{2\pi}-\dfrac{b^2}{2}I_4|_0^{2\pi}$, donde $I_1=\int\sqrt{a^2+b^2e^{2\theta}}\,d\theta$, $I_2=\int e^{2\theta}\ln\left(a+\sqrt{a^2+b^2e^{2\theta}}\right)d\theta$, $I_3=\int e^{2\theta}d\theta$, $I_4=\int\theta e^{2\theta}d\theta$. Haciendo $e^{\theta}=t$, $e^{\theta}d\theta=dt$, $d\theta=\dfrac{dt}{t}$, para $\theta=0$, $t=1$, para $\theta=2\pi$, $t=e^{2\pi}$.

Luego: $S=\dfrac{a}{2}I_{1'}|_1^{e^{2\pi}}+\dfrac{b^2}{2}I_{2'}|_1^{e^{2\pi}}-\dfrac{b^2\ln b}{2}I_{3'}|_1^{e^{2\pi}}-\dfrac{b^2}{2}I_{4'}|_1^{e^{2\pi}}$. En esta expresión: $I_{1'}=\int\dfrac{\sqrt{a^2+b^2t^2}}{t}dt$,

$I_{2'} = \int t \ln\left(a + \sqrt{a^2 + b^2t^2}\right)dt$, $I_{3'} = \int t dt$, $I_{4'} = \int t \ln t dt$. Resolviendo las integrales, se tiene:

$I_{1'} = \int \frac{\sqrt{a^2+b^2t^2}}{t}dt = b\sqrt{t^2 + \frac{a^2}{b^2}} - a\ln\frac{\frac{a}{b}+\sqrt{b^2+\frac{a^2}{b^2}}}{t}$, $I_{2'} = \int t\ln\left(a+\sqrt{a^2+b^2t^2}\right)dt =$

$= \frac{t^2}{2}\ln\left(a+\sqrt{a^2+b^2t^2}\right) - \frac{a^2+b^2t^2}{4b^2} + \frac{a+\sqrt{a^2+b^2t^2}}{2b^2}$, $I_{3'} = \int t dt = \frac{t^2}{2}$, $I_{4'} = \int t\ln t dt = \frac{t^2\ln t}{2} - \frac{t^2}{4}$.

Luego: $I_{1'}|_1^{e^{2\pi}} = \sqrt{b^2e^{4\pi}+a^2} - a\ln\frac{a+\sqrt{a^2+b^2e^{4\pi}}}{be^{2\pi}} - \sqrt{a^2+b^2} + a\ln\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}$,

$I_{2'}|_1^{e^{2\pi}} = \frac{e^{4\pi}}{2}\ln\left(a+\sqrt{a^2+b^2e^{4\pi}}\right) - \frac{a^2+b^2e^{4\pi}}{4b^2} + \frac{a+\sqrt{a^2+b^2e^{4\pi}}}{2b^2} - \frac{1}{2}\ln\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right) +$

$+\frac{a^2+b^2}{4b^2} - \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{2b^2}$, $I_{3'}|_1^{e^{2\pi}} = \frac{1}{2}(e^{4\pi}-1)$, $I_{4'}|_1^{e^{2\pi}} = e^{4\pi}\left(\pi - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{16}$.

Por tanto: $S = \frac{a}{2}I_{1'}|_1^{e^{2\pi}} + \frac{b^2}{2}I_{2'}|_1^{e^{2\pi}} - \frac{b^2\ln b}{2}I_{3'}|_1^{e^{2\pi}} - \frac{b^2}{2}I_{4'}|_1^{e^{2\pi}} = \left(\frac{e^{4\pi}}{2} - a\right)\ln\left(a+\sqrt{a^2+b^2e^{4\pi}}\right) +$
$+\left(a-\frac{1}{2}\right)\ln\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right) + \frac{a}{2}\left(1+\frac{1}{b^2}\right)\sqrt{a^2+b^2e^{4\pi}} - \left(1+\frac{a}{2b^2}\right)\sqrt{a^2+b^2} - 2a\ln b - 2\pi a +$
$+e^{4\pi}\left(\pi - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{16}$.

J 8- Dada la loxodroma que corta a los meridianos bajo ángulo α en la esfera $x^2+y^2+z^2 = R^2$, y que pasa por $(R,0,0)$, hallar la ecuación de las aristas del triedro intrínseco (en su forma continua), y el radio de curvatura en dicho punto.

Solución: Siendo $k = \cot\alpha$, las ecuaciones de la loxodroma son (ver problemas J 6 y J 58): $x = \frac{R\cos\theta}{\cosh(k\theta)}$, $y = \frac{R\sin\theta}{\cosh(k\theta)}$, $z = R\tanh(k\theta)$. Sus derivadas particularizadas para el punto $(R,0,0)$, son: $x_1' = 0$, $y_1' = R$, $z_1' = Rk$, $x_1'' = R(1+k^2)$, $y_1'' = 0$, $z_1'' = 0$. Las aristas del triedro intrínseco son:

a) Tangente: $\frac{x-x_1}{x_1'} = \frac{y-y_1}{y_1'} = \frac{z-z_1}{z_1'}$; es decir: $\frac{x-R}{0} = \frac{y}{R} = \frac{z}{Rk}$.

b) Binormal: $\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$, siendo $a = \begin{vmatrix} y_1' & z_1' \\ y_1'' & z_1'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R & Rk \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $b = \begin{vmatrix} z_1' & x_1' \\ z_1'' & x_1'' \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} Rk & 0 \\ 0 & R(1+k^2) \end{vmatrix} = R^2k(1+k^2)$, $c = \begin{vmatrix} x_1' & y_1' \\ x_1'' & y_1'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & R \\ R(1+k^2) & 0 \end{vmatrix} = -R^2(1+k^2)$; por tanto: $\frac{x-R}{0} = \frac{y}{k} = \frac{z}{-1}$.

c) Normal principal: $\frac{x-x_1}{\begin{vmatrix} b & y_1' \\ c & z_1' \end{vmatrix}} = \frac{y-y_1}{\begin{vmatrix} c & z_1' \\ a & x_1' \end{vmatrix}} = \frac{z-z_1}{\begin{vmatrix} a & x_1' \\ b & y_1' \end{vmatrix}}$; es decir:

$\frac{x-R}{\begin{vmatrix} R^2k(1+k^2) & R \\ -R^2(1+k^2) & Rk \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} -R^2(1+k^2) & Rk \\ 0 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ R^2k(1+k^2) & R \end{vmatrix}}$; por tanto: $\frac{x-R}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}$.

El radio de curvatura es: $\frac{(x_1'^2+y_1'^2+z_1'^2)^{\frac{3}{2}}}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(R^2+R^2k^2)^{\frac{3}{2}}}{\left[R^4k^2(1+k^2)^2+R^4(1+k^2)^2\right]^{\frac{1}{2}}} = R$.

J 9- Dada una curva tal que la indicatriz de binormales está contenida en el plano $ax+by+cz+d = 0$, se pide determinar la superficie rectificante.

Solución: Las binormales forman un ángulo constante con: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{d}$. Luego la curva es una hélice, y su superficie rectificante es un cilindro de generatrices paralelas a dicha recta.

J 10- Se considera una curva C definida en coordenadas rectangulares por $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = aU$. 1º) Determinar la función U de modo que las tangentes a esas curvas encuentren al plano $z = 0$, según un círculo de centro el origen y radio R. 2º) Determinar la función U de manera que el plano osculador en un punto cualquiera de C, forme un ángulo constante con el eje OZ.

Solución: 1º) $x' = -a\sin t$, $y' = a\cos t$, $z' = aU'$. La tangente es: $\frac{x-a\cos t}{-a\sin t} = \frac{y-a\sin t}{a\cos t} = \frac{z-aU}{aU'}$. Su intersección con $z = 0$, es el punto definido por: $x = \frac{aU\sin t}{U'} + a\cos t$, $y = \frac{-aU\cos t}{U'} + a\sin t$. Luego: $\left(\frac{aU\sin t}{U'} + a\cos t\right)^2 + \left(\frac{-aU\cos t}{U'} + a\sin t\right)^2 = R^2$, de donde $\frac{U}{U'} = \sqrt{\frac{R^2}{a^2} - 1}$, $\frac{dU}{U} = \frac{adt}{\sqrt{R^2-a^2}}$, $\ln U = \frac{at}{\sqrt{R^2-a^2}} + k$, $U = e^{\frac{at}{\sqrt{R^2-a^2}}+k}$. 2º) El plano osculador es $\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ -a\sin t & a\cos t & aU' \\ -a\cos t & -a\sin t & aU'' \end{vmatrix} = 0$, y como la ecuación del eje OZ en forma continua es: $\frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$, siendo θ el ángulo que forman, se tiene:

$$\sin\theta = \frac{\begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t \\ -a\cos t & -a\sin t \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} a\cos t & aU' \\ -a\sin t & aU'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -a\sin t & aU' \\ -a\cos t & aU'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t \\ -a\cos t & -a\sin t \end{vmatrix}^2}} = \frac{1}{\sqrt{U''^2 + U'^2 + 1}}.$$

De donde: $U''^2 + U'^2 = \cot^2\theta$. Haciendo: $U' = p$, $U'' = p'$, se tiene: $p'^2 + p^2 = \cot^2\theta$, $p' = \sqrt{\cot^2\theta - p^2}$, $dt = \frac{dp}{\sqrt{\cot^2\theta - p^2}}$, $t + A = \arcsin\frac{p}{\cot\theta}$, $p = \cot\theta\sin(t+A) = \frac{dU}{dt}$, $dU = \cot\theta\sin(t+A)dt$. Luego la función pedida es: $U = -\cot\theta\cos(t+A) + B$.

J 11- Se da la curva $x = 6t + 6t^2 + 2t^3$, $y = 2 + 2t^3$, $z = -3 - 6t$. 1º) Hallar la longitud entre $t = 0$ y $t = 1$. 2º) Hallar la diferencial de arco de la indicatriz de pendientes. 3º) Hallar los cosenos directores de la tangente y de la normal principal.

Solución: 1º) $dx = 6(1+t)^2dt$, $dy = 6t^2dt$, $dz = -6dt$. Luego: $ds = 6\sqrt{2}(t^2+t+1)dt$. Integrando: $s = 6\sqrt{2}\int_0^1(t^2+t+1)dt = 11\sqrt{2}$. 2º) Si θ es el ángulo de contingencia, $\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R}$. Como $d\theta$ es la diferencial de arco de la indicatriz de pendientes, $d\sigma$, se tiene: $d\sigma = \frac{ds}{R} = \frac{6\sqrt{2}(1+t+t^2)dt}{6\sqrt{2}(1+t+t^2)^2} = \frac{dt}{t^2+t+1}$. 3º) Los cosenos directores de la tangente, son: $\alpha = \frac{(1+t)^2}{\sqrt{2}(1+t+t^2)}$, $\beta = \frac{t^2}{\sqrt{2}(1+t+t^2)}$, $\gamma = \frac{1}{-\sqrt{2}(1+t+t^2)}$. Como $\alpha' = \rho\frac{d\alpha}{ds}$ (Frenet), los cosenos directores de la normal principal, son: $\alpha' = \frac{1-t^2}{\sqrt{2}(1+t+t^2)}$, $\beta' = \frac{t(t+2)}{\sqrt{2}(1+t+t^2)}$, $\gamma' = \frac{2t+1}{\sqrt{2}(1+t+t^2)}$.

J 12- Determinar una curva con la condición de que la normal principal en un punto M cualquiera de dicha curva, encuentre al eje OZ, y que el segmento comprendido entre el punto M y el punto N (intersección con OZ), se proyecte sobre dicho eje según una longitud constante k.

Solución: La ecuación de la normal principal es: $\frac{X-x}{a_1} = \frac{Y-y}{b_1} = \frac{Z-z}{c_1}$, siendo: $a_1 = \begin{vmatrix} b & y' \\ c & z' \end{vmatrix}$, $b_1 = \begin{vmatrix} c & z' \\ a & x' \end{vmatrix}$, $c_1 = \begin{vmatrix} a & x' \\ b & y' \end{vmatrix}$, $a = \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}$, $b = \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}$, $c = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}$.

Siendo: $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$, $x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0$, se tiene que: $a_1 = x''$, $b_1 = y''$, $c_1 = z''$. Por tanto la normal principal es: $\frac{X-x}{x''} = \frac{Y-y}{y''} = \frac{Z-z}{z''}$. Para que encuentre a OZ: $\frac{-x}{x''} = \frac{-y}{y''}$. Es decir: $x\frac{d^2y}{ds^2} - y\frac{d^2x}{ds^2} = 0$. Integrando: $x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds} = C$. Es decir: $xdy - ydx = Cds$ (**I**). El punto N se obtiene de: $\frac{-x}{x''} = \frac{-y}{y''} = \frac{Z-z}{z''} = \frac{k}{z''}$. Luego: $x'' = \frac{-xz''}{k}$, $y'' = \frac{-yz''}{k}$. Sustituyendo estos valores en $x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0$, se tiene: $xx' + yy' - kz' = 0$. Integrando: $\frac{x^2+y^2}{2} - kz = C'$ (**II**). Sustituyendo en

$x'^2+y'^2+z'^2=1$, el valor de $z'=\dfrac{xx'+yy'}{k}$, se tiene: $x'^2+y'^2+\dfrac{(xx'+yy')^2}{k^2}=1$, o bien: $(dx)^2+(dy)^2+\dfrac{(xdx+ydy)^2}{k^2}=(ds)^2$ (**III**). Pasando las ecuaciones señaladas a coordenadas cilíndricas, teniendo en cuenta las igualdades: $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $x^2+y^2=r^2$, $dx=\cos\theta dr-r\sin\theta d\theta$, $dy=\sin\theta dr+r\cos\theta d\theta$, $xdy-ydx=r^2d\theta$, $(dx)^2+(dy)^2+\dfrac{(xdx+ydy)^2}{k^2}=(dr)^2+r^2(d\theta)^2+\dfrac{r^2(dr)^2}{k^2}$, se tiene respectivamente: $Cds=r^2d\theta$ (**I**); $\dfrac{r^2}{2}-kz=C'$ (**II**); $(ds)^2=(dr)^2+r^2(d\theta)^2+\dfrac{r^2(dr)^2}{k^2}$ (**III**). Eliminando ds, se tiene: $(\dfrac{r^2d\theta}{C})^2=(dr)^2+r^2(d\theta)^2+\dfrac{r^2(dr)^2}{k^2}$. Luego, $d\theta=\sqrt{\dfrac{1+r^2/k^2}{-r^2+r^4/C^2}}\,dr$. Y como: $r^2=2kz+2C'$, se tiene: $d\theta=\sqrt{\dfrac{1+\dfrac{2kz+2C'}{k^2}}{\dfrac{(2kz+2C')^2}{C^2}-2kz-2C'}}\,dr$. Por tanto, las ecuaciones de la curva son:

$$r^2-2kz-2C'=0,\ \theta=\sqrt{\dfrac{1+\dfrac{2kz+2C'}{k^2}}{\dfrac{(2kz+2C')^2}{C^2}-2kz-2C'}}\,(r+C'').$$

J 13- Dada una curva alabeada C, definida por el vector $\overrightarrow{OM}=\vec{\rho}$, función de un parámetro, demostrar que si el arco s de C está ligado a ρ por la relación $s=\vec{\rho}\bullet\vec{u}$, siendo $\vec{u}$ un vector dado, las tangentes de C forman con el soporte de $\vec{u}$, un ángulo constante.

Solución: $s\bullet\vec{u}=\vec{\rho}\bullet\vec{u}\bullet\vec{u}=\vec{\rho}\bullet u^2$, $\vec{\rho}=\dfrac{s\bullet\vec{u}}{u^2}$, $\dfrac{d\vec{\rho}}{ds}=\vec{t}=\dfrac{\vec{u}}{u^2}$. Por otra parte, se tiene que: $\vec{t}\bullet\vec{u}=t\bullet u\bullet\cos\left(\vec{t},\vec{u}\right)$. De donde: $\cos\left(\vec{t},\vec{u}\right)=\dfrac{\vec{t}\bullet\vec{u}}{t\bullet u}=\dfrac{\vec{u}\bullet\vec{u}}{u^2\bullet\dfrac{u}{u^2}\bullet u}=1$. Luego el ángulo $\widehat{\vec{t},\vec{u}}$es constante, igual a 0º.

J 14- Dada la curva $x=t^3+3$, $y=t^2+1$, $z=t-2$, hallar en el punto $t=2$, la tangente, la normal principal, la binormal, el plano osculador, el plano normal y el plano rectificante.

Solución: Derivando la ecuación de la curva y particularizando para el punto $t=2$, $(11,5,0)$, se tiene: $x'=3t^2=12$, $x''=6t=12$, $y'=2t=4$, $y''=2$, $z'=1$, $z''=0$; $\begin{vmatrix} a & b & c\\ 12 & 4 & 1\\ 12 & 2 & 0\end{vmatrix}$, $a=\begin{vmatrix} 4 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-2$, $b=\begin{vmatrix} 1 & 12\\ 0 & 12\end{vmatrix}=12$, $c=\begin{vmatrix} 12 & 4\\ 12 & 2\end{vmatrix}=-24$; $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ -2 & 12 & -24\\ 12 & 4 & 1\end{vmatrix}$, $a_1=\begin{vmatrix} 12 & -24\\ 4 & 1\end{vmatrix}=108$, $b_1=\begin{vmatrix} -24 & -2\\ 1 & 12\end{vmatrix}=-286$, $c_1=\begin{vmatrix} -2 & 12\\ 12 & 4\end{vmatrix}=-152$.

Tangente: $\dfrac{x-11}{12}=\dfrac{y-5}{4}=\dfrac{z}{1}$. Normal principal: $\dfrac{x-11}{108}=\dfrac{y-5}{-286}=\dfrac{z}{-152}$.
Binormal: $\dfrac{x-11}{-2}=\dfrac{y-5}{12}=\dfrac{z}{-24}$. Plano osculador: $-2(x-11)+12(y-5)-24z=0$.
Plano normal: $12(x-11)+4(y-5)+z=0$. Plano rectificante: $108(x-11)-286(y-5)-152z=0$.

J 15- Se da la curva C cuyas ecuaciones son $x=2m\cos^2\dfrac{z}{m}$, $y=2m\sin\dfrac{z}{m}\cos\dfrac{z}{m}$. Demostrar que proyectando un punto M de la curva sobre el eje OZ en P, y tomando como intersección S de la normal principal en M a la curva con el plano Π perpendicular en P a la recta PM, si se traza un vector OL equipolente al MS, el punto L describe un círculo situado en XOY y con centro en O.

Solución: Haciendo $\theta=\dfrac{2z}{m}$, se tiene: $x=m(1+\cos\theta)$, $y=m\sin\theta$, $z=\dfrac{m\theta}{2}$. Luego las coordenadas de

M y P son: $M\left(m(1+\cos\theta), m\sin\theta, \frac{m\theta}{2}\right)$, $P\left(0,0,\frac{m\theta}{2}\right)$. Derivando se obtienen los siguientes valores: $x' = -m\sin\theta$, $y' = m\cos\theta$, $z' = \frac{m}{2}$, $x'' = -m\cos\theta$, $y'' = -m\sin\theta$, $z'' = 0$, $a = \begin{vmatrix} m\cos\theta & \frac{m}{2} \\ -m\sin\theta & 0 \end{vmatrix} =$ $= \frac{m^2}{2}\sin\theta$, $b = \begin{vmatrix} \frac{m}{2} & -m\sin\theta \\ 0 & -m\cos\theta \end{vmatrix} = \frac{-m^2}{2}\cos\theta$, $c = \begin{vmatrix} -m\sin\theta & m\cos\theta \\ -m\cos\theta & -m\sin\theta \end{vmatrix} = m^2$,

$a_1 = \begin{vmatrix} -\frac{m^2}{2}\cos\theta & m^2 \\ m\cos\theta & \frac{m}{2} \end{vmatrix} = \frac{-5m^3}{4}\cos\theta$, $b_1 = \begin{vmatrix} m^2 & \frac{m^2}{2}\sin\theta \\ \frac{m}{2} & -m\sin\theta \end{vmatrix} = \frac{-5m^3}{4}\sin\theta$,

$c_1 = \begin{vmatrix} \frac{m^2}{2}\sin\theta & -\frac{m^2}{2}\cos\theta \\ -m\sin\theta & m\cos\theta \end{vmatrix} = 0.$

La ecuación de la normal principal es: $\frac{x-m(1+\cos\theta)}{-\frac{5m^3}{4}\cos\theta} = \frac{y-m\sin\theta}{-\frac{5m^3}{4}\sin\theta} = \frac{z-\frac{m\theta}{2}}{0}$, es decir: $z = \frac{m\theta}{2}$, $x\sin\theta - y\cos\theta - m\sin\theta = 0$. La recta PM es: $\frac{x}{m(1+\cos\theta)} = \frac{y}{m\sin\theta} = \frac{z-\frac{m\theta}{2}}{0}$, es decir: $z = \frac{m\theta}{2}$, $x\sin\theta - y(1+\cos\theta) = 0$. El plano Π es: $(1+\cos\theta)x + y\sin\theta = 0$. Las coordenadas de S son: $\left[m(1-\cos\theta), -m\sin\theta, \frac{m\theta}{2}\right]$. Por tanto $|MS|^2 = 4m^2$. Luego L describe la circunferencia: $x^2+y^2 = 4m^2$, $z = 0$.

J 16- Se da la curva C cuyas ecuaciones son $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$. 1º) Hallar las ecuaciones de la tangente en un punto M de la curva, y determinar los puntos A y B en que la tangente corta a los planos XOY, XOZ. 2º) Demostrar que $\frac{MA}{MB}$ es constante y hallar el lugar geométrico de A y B cuando M describe la curva C. 3º) Hallar la longitud del arco OM. 4º) Desde M se traza la perpendicular MP a XOY, y se lleva MQ en el sentido de M a P, e igual al arco OM. Hallar el lugar geométrico de Q.

Solución: 1º) Derivando: $x' = 3$, $y' = 6t$, $z' = 6t^2$. La tangente en un punto genérico de la curva, es: $\frac{x-3t}{3} = \frac{y-3t^2}{6t} = \frac{z-2t^3}{6t^2}$. Las coordenadas de los puntos de corte con XOY, XOZ, son: $A(2t, t^2, 0)$ y $B\left(\frac{3t}{2}, 0, -t^3\right)$. 2º) $\frac{MA}{MB} = \sqrt{\frac{t^2+4t^4+4t^6}{\frac{9t^2}{4}+9t^4+9t^6}} = \frac{2}{3}$. Como $t = \frac{y}{x}$, el punto A describe la parábola: $x^2-4y = 0$, $z = 0$, y el punto B describe la parábola cúbica: $8x^3+27z = 0$, $y = 0$. 3º) Como: $ds = \sqrt{9+36t^2+36t^4}\,dt = = 6\left(t^2+\frac{1}{2}\right)dt$, $s = 6\int_0^t\left(t^2+\frac{1}{2}\right)dt = 2t^3+3t = z+x$. 4º) Las coordenadas de Q son: $(x, y, z-x-z)$, es decir: $(x, y, -x)$. Luego el lugar geométrico de Q es: $x+z = 0$, $x^2-3y = 0$.

J 17- Sobre la curva C se elige un origen de abscisas curvilíneas y un sentido positivo. En cada punto M de C, se toma sobre la tangente un punto P tal que el valor algebraico de MP (referido al vector unitario T) sea opuesto a la abscisa curvilínea de M. Calcular las coordenadas de P. Aplicar: 1º) A la curva plana $y = \cosh x$. 2º) A la curva alabeada $y = \cosh x$, $z = \sinh x$.

Solución: Sea la curva: $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$. Sea para $t = 0$, $x(0) = 0, y(0) = 0, z(0) = 0$. Y sean las derivadas: $x' = x'(t), y' = y'(t), z' = z'(t)$. Sea $M[x(t), y(t), z(t)]$ y sea la ecuación de la tangente en M: $\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'} = \lambda$. Las coordenadas de P son: $X = x-\lambda x', Y = y-\lambda y', Z = z-\lambda z'$, de forma que: $PM =$arco OM. Como $PM = \sqrt{\lambda^2x'^2+\lambda^2y'^2+\lambda^2z'^2} = \lambda\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$, y como el arco $OM =$ $= \int_0^t\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt = I(t)-I(0) = I(t)$, se tiene que: $\lambda\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} = I(t)$, $\lambda = \frac{I(t)}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$.

Luego $P\left(x-\frac{I(t)}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}x', y-\frac{I(t)}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}y', z-\frac{I(t)}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}z'\right)$. 1º) La ecuación de la curva es: $x = t$, $y = \cosh t$. Luego se tiene: $x' = 1$, $y' = \sinh t$, $I = \int_0^t\sqrt{1+\sinh^2 t}\,dt = \int_0^t\cosh t\,dt = \sinh t$,

$\lambda = \dfrac{\sinh t}{\sqrt{1+y'^2}} = \dfrac{\sinh t}{\cosh t} = \tanh t$. Luego: $P(t-\tanh t, \cosh t - \tanh t \sinh t)$, o bien: $P\left(t-\tanh t, \operatorname{sech} t\right)$.

2º) La curva es: $x = t$, $y = \cosh t$, $z = \sinh t$. Luego, $x' = 1$, $y' = \sinh t$, $z' = \cosh t$. Por tanto, se tiene que: $I = \int_0^t \sqrt{1+\sinh^2 t+\cosh^2 t}\,dt = \sqrt{2}\int_0^t \cosh t dt = \sqrt{2}\sinh t$, $\lambda = \dfrac{\sqrt{2}\sinh t}{\sqrt{1+\sinh^2 t+\cosh^2 t}} = \tanh t$. Luego se deduce: $P(t-\tanh t, \cosh t-\tanh t\sinh t, \sinh t-\tanh t\cosh t)$, o bien: $P\left(t-\tanh t, \operatorname{sech} t, 0\right)$.

J 18- Demostrar que la curva $x = \sin^2 t$, $y = \sin t\cos t$, $z = \cos t$, está sobre una esfera y que sus planos normales pasan por un punto fijo.

Solución: Como: $x^2+y^2+z^2 = \sin^4 t+\sin^2 t\cos^2 t+\cos^2 t = 1$, la curva está sobre la esfera de centro el origen y radio la unidad. Los planos normales son: $x'(X-x)+y'(Y-y)+z'(Z-z) = 0$, es decir: $X\sin 2t+Y\cos 2t-Z\sin t = 0$. Luego todos los planos normales pasan por el origen $(0,0,0)$.

J 19- Un punto P invariablemente unido a un triedro móvil de una curva C, determina al ser unido con el punto correspondiente de C, una superficie reglada de generatrices OP. Hallar las condiciones que han de ligar la curvatura ρ y la torsión τ de C, para que la curva descrita por P corte según un ángulo constante a OP.

Solución: El ángulo constante θ está definido por $x(s)$ y el vector $\overrightarrow{OP}$. Siendo $\overrightarrow{OP} = a_1\vec{t}+a_2\vec{n}+a_3\vec{b}$, y siendo el punto P solidario con el triedro móvil, se tiene que: $\vec{P} = \vec{s}+a_1\vec{t}+a_2\vec{n}+a_3\vec{b}$. Diferenciando: $\dfrac{d\vec{P}}{ds} = \dfrac{d\left(\vec{s}+a_1\vec{t}+a_2\vec{n}+a_3\vec{b}\right)}{ds} = \vec{t}+a_1\dfrac{\vec{n}}{R}-a_2\left(\dfrac{\vec{t}}{R}+\dfrac{\vec{b}}{T}\right)+a_3\dfrac{\vec{n}}{T} = \left(1-\dfrac{a_2}{R}\right)\vec{t}+\left(\dfrac{a_1}{R}+\dfrac{a_3}{T}\right)\vec{n}-$ $-\dfrac{a_2}{T}\vec{b}$, donde $R = \dfrac{1}{\rho}$ es el radio de curvatura, y $T = \dfrac{1}{\tau}$, el radio de torsión.

Como $\cos\theta = \dfrac{\frac{dP}{ds}\cdot\overrightarrow{OP}}{\left|\frac{dP}{ds}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OP}\right|}$, $\cos^2\theta = \dfrac{\left(\frac{dP}{ds}\cdot\overrightarrow{OP}\right)^2}{\left|\frac{dP}{ds}\right|^2\cdot\left|\overrightarrow{OP}\right|^2} =$

$$= \frac{\left[a_1\left(1-\frac{a_2}{R}\right)+a_2\left(\frac{a_1}{R}+\frac{a_3}{T}\right)-a_3\frac{a_2}{T}\right]^2}{\left[\left(1-\frac{a_2}{R}\right)^2+\left(\frac{a_1}{R}+\frac{a_3}{T}\right)^2+\left(\frac{a_2}{T}\right)^2\right](a_1^2+a_2^2+a_3^2)} =$$

$$= \frac{a_1^2}{\left[\left(1-\frac{a_2}{R}\right)^2+\left(\frac{a_1}{R}+\frac{a_3}{T}\right)^2+\left(\frac{a_2}{T}\right)^2\right](a_1^2+a_2^2+a_3^2)}.$$ Luego se tiene que:

$\dfrac{a_1^2}{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)\cos^2\theta} = \left(1-\dfrac{a_2}{R}\right)^2+\left(\dfrac{a_1}{R}+\dfrac{a_3}{T}\right)^2+\left(\dfrac{a_2}{T}\right)^2$. Operando se tiene la condición pedida: $\dfrac{a_1^2+a_2^2}{R^2}+\dfrac{a_2^2+a_3^2}{T^2}+\dfrac{2a_1a_3}{RT}-\dfrac{2a_2}{R} = k$. O bien: $(a_1^2+a_2^2)\rho^2+(a_2^2+a_3^2)\tau^2+2a_1a_3\rho\tau-2a_2\rho = k$.

J 20- Demostrar que la curva $x = t$, $y = \dfrac{1+t}{t}$, $z = \dfrac{1-t^2}{t}$, es plana.

Solución: Las sucesivas derivadas son: $x' = 1$, $x'' = x''' = 0$, $y' = \dfrac{-1}{t^2}$, $y'' = \dfrac{2}{t^3}$, $y''' = \dfrac{-6}{t^4}$, $z' = \dfrac{-t^2-1}{t^2}$, $z'' = \dfrac{2}{t^3}$, $z''' = \dfrac{-6}{t^4}$. Luego: $\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{-1}{t^2} & \frac{-t^2-1}{t^2} \\ 0 & \frac{2}{t^3} & \frac{2}{t^3} \\ 0 & \frac{-6}{t^4} & \frac{-6}{t^4} \end{vmatrix} = 0$. Por tanto, la torsión τ es nula (el radio de torsión $T = \infty$), siendo la curva plana.

J 21- Hallar el orden y la parte principal del infinitésimo diferencia entre el arco y la cuerda en un punto de una curva, cuando se toma dicho arco como infinitésimo principal.

Solución: Como: $\overline{r}(s) = \overline{r}(0)+s\cdot\overline{r'}(0)+\dfrac{s^2}{2!}\overline{r''}(0)+\dfrac{s^3}{3!}\overline{r'''}(0)+\dfrac{s^4}{4!}\overline{r^{(4)}}(0)+0(s^4)$, aplicando las fórmulas de Frenet para las derivadas de r, se tiene: $\overline{r} = s\cdot\overline{t_0}+\dfrac{s^2}{2!}\dfrac{\overline{n_0}}{R_0}-\dfrac{s^3}{3!}\left(\dfrac{\overline{t_0}}{R_0^2}-\dfrac{\overline{b_0}}{R_0T_0}+\dfrac{R_0'}{R_0^2}\overline{n_0}\right)+$

$+\frac{s^4}{4!}\left[\frac{3R_0'}{R_0^3}\overline{t_0}-\left(\frac{R_0''R_0-2R_0'+1}{R_0^3}+\frac{1}{R_0T_0^2}\right)\overline{n_0}-\left(\frac{2R_0'}{R_0^2T_0}+\frac{T_0'}{R_0T_0^2}\right)\overline{b_0}\right]+0(s^4).$

Su equivalente en coordenadas cartesianas es: $x=s-\frac{s^3}{6R^2}+\frac{R's^4}{8R^3}+0(s^4)$, $y=\frac{s^2}{2R}-\frac{R's^3}{6R^2}-\left[\frac{RR''-2R'^2+1}{24R^3}+\frac{1}{24RT^2}\right]s^4+0(s^4)$, $z=\frac{s^3}{6RT}-\frac{(2R'T+RT')s^4}{24R^2T^2}+0(s^4)$. La diferencia Δ entre el arco y la cuerda, es: $\Delta=s-\sqrt{\left(s-\frac{s^3}{6R^2}\right)^2+\left(\frac{s^2}{2R}-\frac{R's^3}{6R^2}\right)^2+\left(\frac{s^3}{6RT}\right)^2}=s-\sqrt{s^2-\frac{s^4}{12R^2}}=$ $=s-s+\frac{s^3}{24R^2}+0(s^3)=\frac{s^3}{24R^2}+0(s^3)$. Luego la diferencia entre el arco y la cuerda es un infinitésimo de tercer orden, siendo su parte principal: $\frac{s^3}{24R^2}$.

J 22- Hallar el centro de curvatura en el origen, de la curva $y=x^2$, $z=f(x)$, siendo $f(x)$ nula para $x=0$. Demostrar que el lugar geométrico del punto obtenido es un círculo al variar $f(x)$ sometida a las condiciones $f(0)=0$, $f'(0)=\tan\theta$, constante.

Solución: Las ecuaciones de la curva son: $x=t$, $y=t^2$, $z=f(t)$. Derivando y particularizando para $(0,0,0)$, se tienen los siguientes valores: $x'=1$, $y'=2t=0$, $z'=\tan\theta=k$, $x''=0$, $y''=2$, $z''=f''=m$, $a=y'z''-z'y''=-2k$, $b=z'x''-x'z''=-m$, $c=x'y''-y'x''=2$, $a_1=bz'-cy'=-mk$, $b_1=cx'-az'=$ $=2+2k^2$, $c_1=ay'-bx'=m$. Las coordenadas del centro de curvatura son:
$\alpha=x+\frac{x'^2+y'^2+z'^2}{a^2+b^2+c^2}a_1=\frac{1+k^2}{4k^2+m^2+4}(-mk)$, $\beta=y+\frac{x'^2+y'^2+z'^2}{a^2+b^2+c^2}b_1=\frac{1+k^2}{4k^2+m^2+4}2(1+k^2)$,
$\gamma=z+\frac{x'^2+y'^2+z'^2}{a^2+b^2+c^2}c_1=\frac{1+k^2}{4k^2+m^2+4}k$. Eliminando m entre las tres ecuaciones, resulta: $\alpha=-k\gamma$, $2\beta^2+2(1+k^2)\gamma^2-(1+k^2)\beta=0$. Se trata de comprobar que el plano $\alpha=-k\gamma$, produce secciones cíclicas en la cuádrica $2\beta^2+2(1+k^2)\gamma^2-(1+k^2)\beta=0$. La ecuación en S de esta cuádrica, es: $\begin{vmatrix}-S&0&0\\0&2-S&0\\0&0&2(1+k^2)-S\end{vmatrix}=-S(2-S)[2(1+k^2)-S]=0$, cuya raiz intermedia es $S=2$. Por tanto, los planos que producen secciones cíclicas, son: $\varphi(\alpha,\beta,\gamma)-2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=2\beta^2+2(1+k^2)\gamma^2-$ $-2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=-2\alpha^2+2k^2\gamma^2=0$. Es decir, $\alpha=\pm k\gamma$. Luego el plano $\alpha=-k\gamma$, produce secciones cíclicas. El lugar geométrico del centro de curvatura en las condiciones del enunciado, es una circunferencia.

J 23- Determinar la función $f(u)$ tal que las curvas $f(u)\cdot v^2=\lambda$, de la superficie $x=vf(u)$, $y=v[af(u)+b]$, $z=u+v$, sean curvas planas.

Solución: Cortando la superficie dada por el plano $Ax+By+Cz+D=0$, se obtiene la ecuación: $Avf(u)+Bv[af(u)+b]+C(u+v)+D=0$, deduciéndose que: $v=\frac{-Cu-D}{(A+aB)f(u)+Bb+C}=\sqrt{\frac{\lambda}{f(u)}}$. Por tanto: $(Cu+D)^2f(u)=\lambda[(A+aB)f(u)+Bb+C]^2$. Es decir que la función $f(u)$ está definida por la ecuación: $\lambda(A+aB)^2f^2(u)+\left[2\lambda(A+aB)(Bb+C)-(Cu+D)^2\right]f(u)+\lambda(Bb+C)^2=0$, o lo que es lo mismo, por: $K_1^2f^2(u)+\left[2K_1K_2-(u+K)^2\right]f(u)+K_2^2=0$.

Otra forma de resolver el problema es la siguiente: Se elimina u, teniéndose que: $x=\frac{\lambda}{v}$, $y=\frac{a\lambda}{v}+bv$, $z=\psi(v)+v$, siendo $u=\psi(v)$. Siendo la torsión nula, se tiene que: $\begin{vmatrix}x'&y'&z'\\x''&y''&z''\\x'''&y'''&z'''\end{vmatrix}=0$. Por tanto:
$\begin{vmatrix}-\lambda v^{-2}&-a\lambda v^{-2}+b&\psi'+1\\2\lambda v^{-3}&2a\lambda v^{-3}&\psi''\\-6\lambda v^{-4}&-6a\lambda v^{-4}&\psi'''\end{vmatrix}=\lambda v^{-8}\begin{vmatrix}-v^2&-a\lambda v^2+bv^4&\psi'+1\\2v&2a\lambda v&\psi''\\-6&-6a\lambda&\psi'''\end{vmatrix}=0$. Operando y simplificando: $\lambda\begin{vmatrix}-v^2&-av^2&\psi'+1\\2v&2av&\psi''\\-6&-6a&\psi'''\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-v^2&bv^4&\psi'+1\\2v&0&\psi''\\-6&0&\psi'''\end{vmatrix}=-2bv^4(3\psi''+v\psi''')=0$. De donde: $\frac{\psi'''}{\psi''}+\frac{3}{v}=0$.

Integrando sucesivamente: $\ln\frac{\psi''}{C}+3\ln v=0$, $\frac{\psi''}{C}=\frac{1}{v^3}$, $\frac{\psi'}{C}=-\frac{1}{2v^2}+C_1$, $\frac{\psi}{C}=\frac{1}{2v}+C_1v+C_2$, $\psi=\frac{k_1}{v}+k_2v+k_3=u$. Eliminando v entre esta ecuación y $f(u)=\frac{\lambda}{v^2}$, se tiene que: $(u+c)^2f(u)=$ $=[c_1f(u)+c_2]^2$. Es decir: $c_1^2f^2(u)+\left[2c_1c_2-(u+c)^2\right]f(u)+c_2^2=0$.

J 24- Se da la curva $x=3t-t^3$, $y=3t^2$, $z=3t+t^3$. Hallar el radio de curvatura y el de torsión, en función del parámetro t.

Solución: Las fórmulas a aplicar son: $R=\dfrac{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\sum\begin{vmatrix}x' & y'\\ x'' & y''\end{vmatrix}^2}}$, $T=\dfrac{\sum\begin{vmatrix}x' & y'\\ x'' & y''\end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix}x' & y' & z'\\ x'' & y'' & z''\\ x''' & y''' & z'''\end{vmatrix}}$. Derivando se tiene: $x'=3-3t^2$, $x''=-6t$, $x'''=-6$, $y'=6t$, $y''=6$, $y'''=0$, $z'=3+3t^2$, $z''=6t$, $z'''=6$. Introduciendo estos valores en las fórmulas anteriores, se tiene: $R=3(t^2+1)^2$, $T=3(t^2+1)^2$.

J 25- Hallar la relación existente entre el radio de curvatura y el de torsión en la curva $x=3t-t^3$, $y=3t^2$, $z=3t+t^3$.

Solución: En el problema J 24, se ha obtenido que $R=T=3(t^2+1)^2$. Luego ambos radios son iguales.

J 26- Siendo nulo el radio de torsión de la curva $x=t$, $y=\frac{t+1}{t}$, $z=\frac{1-t^2}{t}$ (ver problema J 20), hallar la ecuación del plano en que se encuentra la curva.

Solución: El plano en el que se encuentra la curva es: $x-y+z+1=0$.

J 27- Dada la curva $x=t$, $y=\frac{t^2}{2}$, $z=\frac{t^3}{3}$, hallar el radio de curvatura en el punto $t=1$.

Solución: Derivando y particularizando para $t=1$, se tiene: $x'=1$, $x''=0$, $y'=t=1$, $y''=1$, $z'=t^2=1$, $z''=2t=2$. Luego $R=\dfrac{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\sum\begin{vmatrix}x' & y'\\ x'' & y''\end{vmatrix}^2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

J 28- Hallar la longitud de la loxodroma de la esfera, que parte del ecuador, y corta bajo ángulo constante α a los meridianos, y se arrolla en torno al polo.

Solución: Las ecuaciones de la loxodroma (ver problemas J 6 y J 58), son: $x=\frac{R\cos\varphi}{\cosh k\varphi}$, $y=\frac{R\sin\varphi}{\cosh k\varphi}$, $z=R\tanh k\varphi$, siendo $k=\cot\alpha$. La longitud es: $L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,d\theta=\frac{R}{\cos\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta==\frac{\pi R}{2}\sec\alpha$.

J 29- Hallar el radio de curvatura y el de torsión, de la curva $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$.

Solución: Derivando: $x'=1$, $x''=x'''=0$, $y'=2t$, $y''=2$, $y'''=0$, $z'=3t^2$, $z''=6t$, $z'''=6$. Luego:

$$R=\frac{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\sum\begin{vmatrix}x' & y'\\ x'' & y''\end{vmatrix}^2}}=\frac{(1+4t^2+9t^4)^{\frac{3}{2}}}{2(1+9t^2+9t^4)^{\frac{1}{2}}},\ T=\frac{\sum\begin{vmatrix}x' & y'\\ x'' & y''\end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix}x' & y' & z'\\ x'' & y'' & z''\\ x''' & y''' & z'''\end{vmatrix}}=\frac{1+9t^2+9t^4}{3}.$$

J 30- Dada la curva $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $z=e^t$, obtener su ecuación en función del parámetro s (longitud de su arco).

Solución: $x'=e^t\cos t-e^t\sin t$, $y'=e^t\sin t+e^t\cos t$, $z'=e^t$, $s=\int_0^t\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt=\int_0^t\sqrt{3}\,e^tdt=$ $=\sqrt{3}\,(e^t-1)$, $t=\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)$. Por tanto, las ecuaciones paramétricas de la curva dada, son:

$$x=\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\cos\left[\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\right],\ y=\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\sin\left[\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\right],\ z=\frac{s}{\sqrt{3}}+1.$$

J 31- Dada la curva $x=3t-t^3$, $y=3t^2$, $z=3t+t^3$, hallar el triedro intrínseco.

Solución: $x'=3-3t^2$, $x''=-6t$, $y'=6t$, $y''=6$, $z'=3+3t^2$, $z''=6t$, $a=y'z''-y''z'=18(t^2-1)$, $b=z'x''-z''x'=-36t$, $c=x'y''-x''y'=18(t^2+1)$, $a_1=cy'-bz'=216t(1+t^2)$, $b_1=az'-cx'=$ $=216(1+t^2)(t^2-1)$, $c_1=bx'-ay'=0$, $\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}=3\sqrt{2}(t^2+1)$, $\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}=108(t^2+1)^2$, $\sqrt{a^2+b^2+c^2}=18\sqrt{2}(t^2+1)$. Por tanto, el triedro intrínseco es: $\overline{t}\left(\frac{1-t^2}{\sqrt{2}(t^2+1)},\frac{2t}{\sqrt{2}(t^2+1)},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\overline{n}\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{t^2-1}{1+t^2},0\right)$, $\overline{b}\left(\frac{t^2-1}{\sqrt{2}(t^2+1)},\frac{-2t}{\sqrt{2}(t^2+1)},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

J 32- El vector binormal de una curva es $\left(\frac{-\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{2}},\frac{-t}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, siendo el radio de torsión constante e igual a la unidad. Obtener los vectores tangente y normal principal del triedro intrínseco, y la ecuación de la curva.

Solución: Aplicando las fórmulas de Frenet, se tiene: $\frac{d\overline{b}}{ds}=\frac{\overline{n}}{T}$. Al ser $T=1$, $\overline{n}=\frac{d\overline{b}}{ds}=\frac{d\overline{b}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}$. Como: $\frac{d\overline{b}}{dt}=\left(\frac{t}{\sqrt{2(1-t^2)}},\frac{-1}{\sqrt{2}},0\right)$, $\left|\frac{d\overline{b}}{dt}\right|=\frac{1}{\sqrt{2(1-t^2)}}$, $\frac{1}{T}=1=\left|\frac{d\overline{b}}{ds}\right|=\left|\frac{d\overline{b}}{dt}\right|\cdot\frac{dt}{ds}$. Luego: $\frac{dt}{ds}=\sqrt{2(1-t^2)}$. Por tanto: $\frac{d\overline{b}}{ds}=\frac{d\overline{b}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\left(\frac{t}{\sqrt{2(1-t^2)}},\frac{-1}{\sqrt{2}},0\right)\sqrt{2(1-t^2)}=$ $=\left(t,-\sqrt{1-t^2},0\right)$. Es decir: $\overline{n}=\left(t,-\sqrt{1-t^2},0\right)$. Como $\overline{t}=\overline{n}\wedge\overline{b}$, se tiene que:

$$\overline{t}=\begin{vmatrix}\overline{i}&\overline{j}&\overline{k}\\ t&-\sqrt{1-t^2}&0\\ \frac{-\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{2}}&\frac{-t}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{vmatrix}=\left(-\sqrt{\frac{1-t^2}{2}},\frac{t}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right).$$ Como: $\frac{d\overline{x}}{dt}=\frac{d\overline{x}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=$ $=\overline{t}\frac{ds}{dt}=\left(-\sqrt{\frac{1-t^2}{2}},\frac{t}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2(1-t^2)}}=\left(\frac{-1}{2},\frac{t}{2\sqrt{1-t^2}},\frac{-1}{2\sqrt{1-t^2}}\right)$, se tiene que: $x=\int\frac{-1}{2}dt=\frac{-t}{2}+C_1$, $y=\int\frac{t}{2\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{-t}{2\sqrt{1-t^2}}+C_2$, $z=\int\frac{-1}{2\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{-1}{2}\arcsin t+C_3$.

J 33- Dada la curva $x=3t$, $y=3t^2$, $z=2t^3$, hallar el triedro intrínseco, el radio de curvatura y el de torsión.

Solución: $x'=3$, $x''=x'''=0$, $y'=6t$, $y''=6$, $y'''=0$, $z'=6t^2$, $z''=12t$, $z'''=12$, $a=y'z-y''z'=$ $=36t^2$, $b=z'x''-z''x'=-36t$, $c=x'y''-x''y'=18$, $a_1=cy'-bz'=108t(1+2t^2)$, $b_1=az'-cx'=$ $=54(4t^4-1)$, $c_1=bx'-ay'=-108t(1+2t^2)$, $\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}=3(1+2t^2)$, $\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}=$ $=54(1+2t^2)^2$, $\sqrt{a^2+b^2+c^2}=18(1+2t^2)$. El triedro intrínseco es: $\overline{t}\left(\frac{1}{2t^2+1},\frac{2t}{2t^2+1},\frac{2t^2}{2t^2+1}\right)$, $\overline{n}\left(\frac{2t}{2t^2+1},\frac{2t^2-1}{2t^2+1},\frac{-2t}{2t^2+1}\right)$, $\overline{b}\left(\frac{2t^2}{2t^2+1},\frac{-2t}{2t^2+1},\frac{1}{2t^2+1}\right)$. El radio de curvatura es: $R=\frac{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{3}{2}(1+2t^2)^2$. El radio de torsión es: $T=\frac{a^2+b^2+c^2}{\begin{vmatrix}x'&y'&z'\\x''&y''&z''\\x'''&y'''&z'''\end{vmatrix}}=\frac{3}{2}(1+2t^2)^2$.

J 34- Dada la curva $x=3t$, $y=3t^2$, $z=2t^3$, hallar las ecuaciones de los planos osculador, normal y rectificante, en un punto genérico de la curva.

Solución: En el problema anterior J 33, se han calculado las sucesivas derivadas.
Plano normal: $x'(X-x)+y'(Y-y)+z'(Z-z)=0$, es decir: $X-3t+2t(Y-3t^2)+2t^2(Z-2t^3)=0$.
Plano osculador: $a(X-x)+b(Y-y)+c(Z-z)=0$, es decir: $2t^2(X-3t)-2t(Y-3t^2)+Z-2t^3=0$.

Plano rectificante: $a_1(X-x)+b_1(Y-y)+c_1(Z-z)=0$, es decir : $2t(X-3t)+(2t^2-1)(Y-3t^2)-2t(Z-2t^3)=0$

J 35- Obtener el radio de curvatura R de la elipse $x^2+y^2-z=0,\ x+y+z=\frac{1}{2}$.

Solución: Eliminando z entre las dos ecuaciones, se obtiene la proyección de la elipse sobre el plano $z=0$: $x^2+y^2+x+y-\frac{1}{2}=0$, es decir: $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-1=0$. Pasando a paramétricas: $x=-\frac{1}{2}+\cos\theta$, $y=-\frac{1}{2}+\sin\theta$, $z=\frac{3}{2}-\sin\theta-\cos\theta$. Derivando: $x'=-\sin\theta$, $x''=-\cos\theta$, $y'=\cos\theta$, $y''=-\sin\theta$, $z'=-\cos\theta+\sin\theta$, $z''=\sin\theta+\cos\theta$, $a=y'z''-y''z'=1$, $b=z'x''-z''x'=1$, $c=x'y''-x''y'=1$. Luego: $R=\frac{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}(1-\sin\theta\cos\theta)^{\frac{3}{2}}$.

J 36- Dada la curva $x=\frac{2a}{1+z^2}$, $y=xz$, se pide: 1º) Sus proyecciones sobre los planos coordenados. 2º) Ecuaciones de la curva en paramétricas. 3º) Coordenadas de los puntos de intersección del plano osculador con el eje OZ. 4º) Radios de curvatura y de torsión en el punto en el que la curva corta al plano $z=0$.

Solución: 1º) La proyección sobre $z=0$ se obtiene eliminando z entre las dos ecuaciones de la curva, obteniéndose: $x^2+y^2-2ax=0$. La proyección sobre $y=0$, es: $x(1+z^2)-2a=0$. La proyección sobre $x=0$, es: $y(1+z)^2-2az=0$. 2º) Haciendo $z=t$, se tiene la ecuación en paramétricas: $x=\frac{2a}{1+t^2}$, $y=\frac{2at}{1+t^2}$, $z=t$. 3º) $x'=\frac{-4at}{(1+t^2)^2}$, $x''=\frac{-4a(1-3t^2)}{(1+t^2)^3}$, $y'=\frac{2a(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$, $y''=\frac{4at(-3+t^2)}{(1+t^2)^3}$, $z'=1$, $z''=0$, $y'z''-y''z'=\frac{4at(3-t^2)}{(1+t^2)^3}$, $z'x''-z''x'=\frac{4a(3t^2-1)}{(1+t^2)^3}$, $x'y''-x''y'=\frac{8a^2}{(1+t^2)^3}$. La ecuación del plano osculador es: $4at(3-t^2)\left(x-\frac{2a}{1+t^2}\right)+4a(3t^2-1)\left(y-\frac{2at}{1+t^2}\right)+8a^2(z-t)=0$. El eje OZ es: $x=y=0$, luego el punto de intersección es: $(0,0,3t)$. 4º) La curva corta a $z=0$, en $t=0$. Luego: $x=2a$, $x'=0$, $x''=-4a$, $x'''=0$, $y=0$, $y'=2a$, $y''=0$, $y'''=-12a$, $z=0$, $z'=1$, $z''=0$, $z'''=0$, $y'z''-y''z'=0$, $z'x''-z''x'=-4a$, $x'y''-x''y'=8a^2$. Se obtiene que el radio de curvatura es:

$$R=\frac{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\Sigma(x'y''-x''y')^2}}=\frac{4a^2+1}{4a},\ \text{y el radio de torsión es: } T=\frac{\Sigma(x'y''-x''y')^2}{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}=\frac{4a^2+1}{3}.$$

J 37- Dada la curva $x=\frac{1}{t^2+t+1}$, $y=\frac{t-1}{t^2+t+1}$, $z=\frac{t^2}{t^2+t+1}$, demostrar que es plana, y obtener la ecuación del plano que la contiene.

Solución: Sea el plano: $Ax+By+Cz+1=0$. Sustituyendo y operando, se tiene: $A+(t-1)B+t^2C+t^2+t+1\equiv 0$, es decir: $(C+1)t^2+(B+1)t+A-B+1\equiv 0$. Por tanto: $C=-1$, $B=-1$, $A=-2$. La curva está contenida en el plano: $2x+y+z-1=0$, luego es plana. También se puede resolver el problema obteniendo el radio de torsión, que como es infinito, la curva es plana.

J 38- Dada la superficie $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $z=r$, hallar la curva situada sobre ella, tal que su tangente forme un ángulo constante con el plano XY.

Solución: La tangente es: $\frac{x-r\cos\theta}{r'\cos\theta-r\sin\theta}=\frac{y-r\sin\theta}{r'\sin\theta+r\cos\theta}=\frac{z-r}{r'}$. Siendo V el ángulo que forma con $z=0$, se tiene: $\cos V=\frac{r'}{\sqrt{(r'\cos\theta-r\sin\theta)^2+(r'\sin\theta+r\cos\theta)^2+r'^2}}=\frac{r'}{\sqrt{r^2+2r'^2}}=k$. Luego: $r=\pm\frac{r'}{A}=\pm\frac{dr}{Ad\theta}$, $\frac{dr}{r}=\pm Ad\theta$, $\ln r=\pm A\theta+C$, $r=Be^{\pm A\theta}$. Las ecuaciones de la curva pedida son: $x=Be^{\pm A\theta}\cos\theta$, $y=Be^{\pm A\theta}\sin\theta$, $z=Be^{\pm A\theta}$.

J 39- Demostrar que la curva $x=e^t$, $y=e^{-t}$, $z=t\sqrt{2}$, es una hélice.

Solución: Una curva es hélice si su tangente forma un ángulo constante con una dirección fija. Se tiene:

$x' = e^t,\ y' = -e^{-t},\ z' = \sqrt{2}$. Siendo a,b,c la dirección fija, el coseno del ángulo formado por las tangentes y esta dirección, es: $\cos V = \dfrac{ax'+by'+cz'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} = \dfrac{ae^t - be^{-t} + \sqrt{2}\,c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,(e^t+e^{-t})} = k$. De donde: $e^{2t}\left(a - k\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right) + e^t\sqrt{2}\,c - \left(b + k\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right) = 0$. Para que se cumpla la igualdad con independencia del valor de t, ha de verificarse que: $a = k\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, $c = 0$, $b = -k\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Luego: $a = 1$, $b = -1$, $k = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\theta = 45^{\circ}$. Luego es una hélice, pues sus tangentes forman un ángulo constante de 45º con la dirección $(1,-1,0)$.

J 40- Dada la función $z = \arctan\dfrac{y}{x}$, hallar: 1º) La dz en el punto $A(1,2)$. 2º) Dirección y valor de la máxima derivada. 3º) Indicatriz de pendientes de esta superficie en el punto $(1,2)$. 4º) Dirección para que la derivada sea nula.

Solución: 1º) $dz = z'_x dx + z'_y dy = \dfrac{\frac{-y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}dx + \dfrac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}dy = \dfrac{-y}{x^2+y^2}dx + \dfrac{x}{x^2+y^2}dy = \dfrac{-2}{5}dx + \dfrac{1}{5}dy.$

2º) $\tan\alpha = \dfrac{z'_x}{z'_y} = -2$, $\alpha = \arctan(-2) = -63^{\circ}26'05''8$. El gradiente es: $\sqrt{z'^2_x + z'^2_y} = \sqrt{\dfrac{4}{25}+\dfrac{1}{25}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$, que es la máxima derivada. 3º) La indicatriz es una circunferencia, cuyo centro O tiene por coordenadas: $O_x = x + \dfrac{z'_x}{2} = 1 + \dfrac{-2/5}{2} = \dfrac{4}{5}$, $O_y = y + \dfrac{z'_y}{2} = 2 + \dfrac{1/5}{2} = \dfrac{21}{10}$, siendo su radio: $OA = \dfrac{\sqrt{5}}{10}$. Luego la ecuación de la indicatriz de pendientes, es: $\left(x - \dfrac{4}{5}\right)^2 + \left(y - \dfrac{21}{10}\right)^2 - \dfrac{1}{20} = 0$. 4º) La dirección de la derivada nula es la perpendicular a AO, pasando por A. La ecuación de AO es: $\dfrac{x-1}{\frac{4}{5}-1} = \dfrac{y-2}{\frac{21}{10}-2}$, es decir: $x + 2y - 3 = 0$. Luego la pendiente de su perpendicular es 2. Por tanto, la dirección de la derivada nula es: $\arctan 2 = 63^{\circ}26'05''8$.

J 41- Dada la función $z = xy + \arctan(x+y)$, hallar: 1º) La diferencial total primera en el punto $x = y = \dfrac{1}{2}$. 2º) Derivada primera en el mismo punto según la dirección de la segunda bisectriz.

Solución: 1º) $z'_x = x + \dfrac{1}{1+(x+y)^2} = 1$, $z'_y = x + \dfrac{1}{1+(x+y)^2} = 1$. La diferencial total primera es: $dz = z'_x dx + z'_y dy = dx + dy$. 2º) $\dfrac{\delta z}{\delta\rho} = z'_x\cos\alpha + z'_y\cos\beta$, siendo ρ la dirección de la segunda bisectriz. Luego: $\dfrac{\delta z}{\delta\rho} = \cos\alpha + \cos\beta == \cos 135^{\circ} + \cos(90^{\circ} - 135^{\circ}) = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0.$

J 42- Dada la función $U = f(x,y,z)$, hallar $\dfrac{\delta^2 U}{\delta r_1^2}$, $\dfrac{\delta^2 U}{\delta r_1 r_2}$, siendo r_1 y r_2 las direcciones cuyos cosenos directores son, respectivamente, $(\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3)$ y $(\cos\beta_1, \cos\beta_2, \cos\beta_3)$.

Solución: $\dfrac{\delta^2 U}{\delta r_1^2} = (U'_x\cos\alpha_1 + U'_y\cos\alpha_2 + U'_z\cos\alpha_3)^{(2} = U''_{x^2}\cos^2\alpha_1 + U''_{y^2}\cos^2\alpha_2 + U''_{z^2}\cos^2\alpha_3 +$
$+2U''_{xy}\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + 2U''_{xz}\cos\alpha_1\cos\alpha_3 + 2U''_{yz}\cos\alpha_2\cos\alpha_3.$
$\dfrac{\delta^2 U}{\delta r_1 r_2} = ((U'_x\cos\alpha_1 + U'_y\cos\alpha_2 + U'_z\cos\alpha_3))((U'_x\cos\beta_1 + U'_y\cos\beta_2 + U'_z\cos\beta_3)) =$
$= U''_{x^2}\cos\alpha_1\cos\beta_1 + U''_{y^2}\cos\alpha_2\cos\beta_2 + U''_{z^2}\cos\alpha_3\cos\beta_3 + U''_{xy}(\cos\alpha_1\cos\beta_2 + \cos\alpha_2\cos\beta_1) +$
$+U''_{xz}(\cos\alpha_1\cos\beta_3 + \cos\alpha_3\cos\beta_1) + U''_{yz}(\cos\alpha_2\cos\beta_3 + \cos\alpha_3\cos\beta_2).$

J 43- Hallar las líneas de máxima pendiente de $ax^2 + by^2 + cz^2 = k$.

Solución: Las líneas de máxima pendiente son las ortogonales a las líneas de nivel. La proyección sobre $z = 0$, es $ax^2 + by^2 = k$. Derivando: $2ax + 2byy' = 0$, $y' = \dfrac{-ax}{by}$. La pendiente ortogonal es: $y' = \dfrac{by}{ax}$. De donde: $\dfrac{dy}{by} = \dfrac{dx}{ax}$, $\dfrac{\ln y}{b} = \dfrac{\ln kx}{a}$, $\sqrt[b]{y} = \sqrt[a]{kx}$. La ecuación pedida es: $ax^2 + by^2 + cz^2 = k$, $y^a = Cx^b$.

J 44- Hallar en función de los coeficientes de Gauss, E,F,G, el coseno del ángulo que forman las dos líneas coordenadas de la superficie S que pasan por el punto (u,v). ¿Qué ocurre si $F \equiv 0$?

Solución: Las ecuaciones de S son: $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$. Las curvas coordenadas se obtienen haciendo: $u =$ constante, $v =$ constante. Los parámetros directores de las tangentes a las curvas coordenadas que pasan por (u,v) son: (x'_u, y'_u, z'_u), (x'_v, y'_v, z'_v). El coseno del ángulo que forman es $\cos V = \dfrac{x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v}{\sqrt{x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u}\,\sqrt{x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v}} = \dfrac{F}{\sqrt{EG}}$. Si $F = 0$, se obtienen curvas ortogonales.

J 45- Se considera el helicoide $z = p\arctan\dfrac{y}{x}$. El plano tangente en un punto $A(a,0,0)$ lo corta según una recta y una curva C, que se proyecta en el plano XOY según una curva C_0. Hallar el área barrida por el radio vector desde A al primer punto de intersección con el eje OY.

Solución: La ecuación dada es: $f(x,y,z) \equiv y - x\tan\dfrac{z}{p} = 0$. Luego: $f'_x = -\tan\dfrac{z}{p}$, $f'_y = 1$, $f'_z = \dfrac{-x}{p\cos^2\dfrac{z}{p}}$, que particularizadas para el punto A, son: $f'_x = 0$, $f'_y = 1$, $f'_z = \dfrac{-a}{p}$. La ecuación del plano tangente en A es: $f'_x(X-a) + f'_y Y + f'_z Z = Y - \dfrac{a}{p}Z = 0$, es decir: $pY - aZ = 0$. La intersección de este plano con el helicoide da el eje OX, $Y = 0$, $Z = 0$, y la curva C que se proyecta en $z = 0$ según la curva $C_0 \equiv Y = X\tan\dfrac{Y}{a}$, o bien: $Y = a\arctan\dfrac{Y}{X} = a\theta$. En polares: $Y = \rho\sin\theta$, luego: $\rho = \dfrac{a\theta}{\sin\theta}$. El área buscada es: $S = \dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 d\theta = \dfrac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\theta}{\sin\theta}\right)^2 d\theta = \dfrac{a^2}{2} I\,(*) = \dfrac{\pi a^2 \ln 2}{2}$.

$(*)$ Resolución de $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\theta}{\sin\theta}\right)^2 d\theta$:

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\theta}{\sin\theta}\right)^2 d\theta = |-\cot x \cdot x^2|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cot x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cot x dx = 2\left[|x\ln\sin x|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx\right] =$
$= -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx = -2I_1$. Haciendo el cambio: $x = \dfrac{\pi}{2} - t$, $dx = -dt$, se tiene que: $I_1 = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln\cos t dt =$
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos t dt = J$. Por tanto: $2I_1 = I_1 + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln cox dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln\sin x + \ln\cos x) dx =$
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x \cdot \cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\dfrac{\sin 2x}{2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin 2x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin 2x dx - \dfrac{\pi\ln 2}{2}$.
Haciendo el cambio: $2x = t$, $2dx = dt$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin 2x dx = \int_0^{\pi} \dfrac{1}{2}\sin t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t dt = I_1$. Por tanto: $I = -2I_1 = -(I_1 + J) = -\left(I_1 - \dfrac{\pi\ln 2}{2}\right)$, $I_1 = \dfrac{-\pi\ln 2}{2}$, $I = \pi\ln 2$.

J 46- Se da una recta R cuyas ecuaciones son $P = 0$, $Q = 0$. Se considera la superficie S de ecuación $\alpha P^2 + \beta PQ + \gamma Q^2 = 0$, donde α, β, γ son polinomios en x,y,z, e independientes de $P = 0$ y de $Q = 0$.. Demostrar que todos los puntos de la recta R son puntos dobles de la superficie.

Solución: Todo punto de R verifica a S. Derivando, se tiene: $S'_x = \alpha'_x P^2 + 2\alpha PP'_x + \beta'_x PQ + \beta P'_x Q + {}$ $+\beta PQ'_x + \gamma'_x Q^2 + 2\gamma QQ'_x$. Luego todo punto de R anula a S'_x, e igualmente a S'_y y a S'_z, por lo que son puntos dobles de S si no anulan a las derivadas segundas. Como $S''_{x^2} = \ldots + 2\alpha P'^2_x + 2\beta P'_x Q'_x + 2\gamma Q'^2_x$, esta expresión no se anula para los puntos de R, puesto que las coordenadas de estos no satisfacen a los polinomios α, β, γ, sucediendo lo mismo para las otras derivadas segundas de S. Luego los puntos de R son puntos dobles de S.

J 47- Hallar el lugar geométrico de las proyecciones del centro del elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, sobre sus planos tangentes.

Solución: Eliminando x,y,z entre las ecuaciones: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $\dfrac{Xx}{a^2} + \dfrac{Yy}{b^2} + \dfrac{Zz}{c^2} = 1$, $\dfrac{Xa^2}{x} = \dfrac{Yb^2}{y} = \dfrac{Zc^2}{z} = \dfrac{1}{\lambda}$, se obtiene la ecuación: $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$, que es la superficie podaria del elipsoide respecto a su centro. Esta superficie, que es un "ovaloide", se llama "superficie de elasticidad de Fresnel".

J 48- Sea $OXYZ$ un triedro de referencia. Se hace corresponder a cada punto $P(x,y,z)$, tres números $(\varepsilon, \eta, \theta)$ definidos por las siguientes condiciones: θ es el ángulo de los planos POZ y XOZ; ε^2, η^2 son los parámetros de los dos paraboloides de revolución de eje OZ y foco O, que contienen el punto P (se entiende por parámetro del paraboloide la mitad del coeficiente de z en la ecuación reducida). 1º) Expresar las coordenadas (x,y,z) en función de las parabólicas $(\varepsilon, \eta, \theta)$. 2º) Formular en las coordenadas parabólicas, la condición a la que deban satisfacer dos ecuaciones $P(\varepsilon,\eta,\theta) = k_1$, $Q(\varepsilon,\eta,\theta) = k_2$, para

que las superficies que representan se corten ortogonalmente. 3º) Verificar en estas coordenadas, que las superficies coordenadas del sistema parabólico constituyen un sistema triple ortogonal.

Solución: 1º) La ecuación de los paraboloides es: $x^2+y^2+z^2=(z-\lambda)^2$. Luego la mitad del coeficiente de z es: $\lambda=z\pm\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Se tiene que: $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$, $\varepsilon^2=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\eta^2=z-\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Luego: $z=\dfrac{\varepsilon^2+\eta^2}{2}$, $x=\varepsilon\eta i\cos\theta$, $y=\varepsilon\eta i\sin\theta$. 2º) Para que las superficies P y Q sean ortogonales, ha de verificarse que: $P'_xQ'_x+P'_yQ'_y+P'_zQ'_z=0$, luego la condición pedida es:

$$\left(P'_\varepsilon\cdot\frac{\delta\varepsilon}{\delta x}+P'_\eta\cdot\frac{\delta\eta}{\delta x}+P'_\theta\cdot\frac{\delta\theta}{\delta x}\right)\left(Q'_\varepsilon\cdot\frac{\delta\varepsilon}{\delta x}+Q'_\eta\cdot\frac{\delta\eta}{\delta x}+Q'_\theta\cdot\frac{\delta\theta}{\delta x}\right)+$$
$$+\left(P'_\varepsilon\cdot\frac{\delta\varepsilon}{\delta y}+P'_\eta\cdot\frac{\delta\eta}{\delta y}+P'_\theta\cdot\frac{\delta\theta}{\delta y}\right)\left(Q'_\varepsilon\cdot\frac{\delta\varepsilon}{\delta y}+Q'_\eta\cdot\frac{\delta\eta}{\delta y}+Q'_\theta\cdot\frac{\delta\theta}{\delta y}\right)+$$
$$+\left(P'_\varepsilon\cdot\frac{\delta\varepsilon}{\delta z}+P'_\eta\cdot\frac{\delta\eta}{\delta z}+P'_\theta\cdot\frac{\delta\theta}{\delta z}\right)\left(Q'_\varepsilon\cdot\frac{\delta\varepsilon}{\delta z}+Q'_\eta\cdot\frac{\delta\eta}{\delta z}+Q'_\theta\cdot\frac{\delta\theta}{\delta z}\right)=0.$$

3º) Hay que demostrar que el sistema: $\varepsilon=0$, $\eta=0$, $\theta=0$, es un sistema triple ortogonal.

a) Estudio de $\varepsilon=0$, $\eta=0$. Para que sean ortogonales ha de tenerse que: $\varepsilon'_x\eta'_x+\varepsilon'_y\eta'_y+\varepsilon'_z\eta'_z=0$. Llamando $\sigma=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, se tiene: $\varepsilon'_x=\dfrac{x}{2(z+\sigma)^{\frac{1}{2}}\sigma}$, $\varepsilon'_y=\dfrac{y}{2(z+\sigma)^{\frac{1}{2}}\sigma}$, $\varepsilon'_z=\dfrac{z+\sigma}{2(z+\sigma)^{\frac{1}{2}}\sigma}$, $\eta'_x=\dfrac{-x}{2(z-\sigma)^{\frac{1}{2}}\sigma}$, $\eta'_y=\dfrac{-y}{2(z-\sigma)^{\frac{1}{2}}\sigma}$, $\eta'_z=\dfrac{-z+\sigma}{2(z-\sigma)^{\frac{1}{2}}\sigma}$. Luego, en efecto:

$$\varepsilon'_x\eta'_x+\varepsilon'_y\eta'_y+\varepsilon'_z\eta'_z=\frac{-x^2}{4(z^2-\sigma^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{-y^2}{4(z^2-\sigma^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{\sigma^2-z^2}{4(z^2-\sigma^2)^{\frac{1}{2}}}=0.$$

b) Estudio de $\varepsilon=0$, $\theta=0$. Para que sean ortogonales ha de tenerse que: $\varepsilon'_x\theta'_x+\varepsilon'_y\theta'_y+\varepsilon'_z\theta'_z=0$. Se tiene: $\theta'_x=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$, $\theta'_y=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $\theta'_z=0$. Luego, en efecto, se cumple que:

$$\varepsilon'_x\theta'_x+\varepsilon'_y\theta'_y+\varepsilon'_z\theta'_z=\frac{-xy}{2(z+\sigma)^{\frac{1}{2}}\sigma(x^2+y^2)}++\frac{xy}{2(z+\sigma)^{\frac{1}{2}}\sigma(x^2+y^2)}=0.$$

c) Estudio de $\eta=0$, $\theta=0$. Ha de verificarse que: $\eta'_x\theta'_x+\eta'_y\theta'_y+\eta'_z\theta'_z=0$. En efecto:

$$\eta'_x\theta'_x+\eta'_y\theta'_y+\eta'_z\theta'_z=\frac{xy}{2(z+\sigma)^{\frac{1}{2}}\sigma(x^2+y^2)}+\frac{-xy}{2(z+\sigma)^{\frac{1}{2}}\sigma(x^2+y^2)}=0.$$

Luego el sistema: $\varepsilon=0$, $\eta=0$, $\theta=0$, es un sistema triple ortogonal.

J 49- Determinar la naturaleza de la superficie $(x^2+y^2+z^2+12)^2=64(x^2+y^2)$.

Solución: La ecuación es función de (x^2+y^2) y de z^2, por lo que es una superficie de revolución de eje OZ. La sección por $y=0$, es: $x^2+z^2+12\pm8x=0$, que corresponde a dos círculos simétricos. La superficie es un toro de revolución.

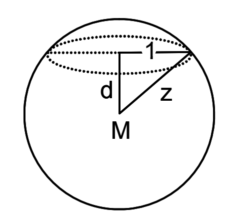
J 50- Hallar la ecuación diferencial de la familia de superficies engendrada por círculos de radio constante R, de centro arbitrario sobre OZ, y cuyos planos pasan por el eje OZ.

Solución: La superficie está formada por la intersección de las esferas: $x^2+y^2+z^2-2az+a^2-R^2=0$, con los planos: $x-by=0$, siendo $a=f(b)=f\left(\dfrac{x}{y}\right)$. Luego: $x^2+y^2+z^2-2zf\left(\dfrac{x}{y}\right)+f^2\left(\dfrac{x}{y}\right)-R^2=0$. De donde: $f\left(\dfrac{x}{y}\right)=z\pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. Como el jacobiano de $\dfrac{x}{y}$ y de $f\left(\dfrac{x}{y}\right)=z\pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, ha de ser nulo, se tiene: $\begin{vmatrix} p\mp x(R^2-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} & q\mp y(R^2-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} \\ \dfrac{1}{y} & \dfrac{-x}{y^2}\end{vmatrix}=0$, donde $p=z'_x$, $q=z'_y$.

Operando, se obtiene la ecuación diferencial buscada: $px+qy=\dfrac{x^2+y^2}{\pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$.

J 51- Se considera la esfera $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\gamma^2$, siendo (α,β,γ) un punto M de una curva C. Al moverse, la esfera tiene una envolvente. 1º) Determinar el círculo característico. 2º) Suponiendo dado un cilindro en el que está la curva C, y tomando como variable el arco de la proyección de C sobre XOY, hallar la curva que resulta al desarrollar el cilindro sobre un plano, en el caso en el que el círculo característico tenga radio constante igual a 1.

Solución:



1º) Sean las ecuaciones de la curva C: $X = x(s), Y = y(s), Z = z(s)$. Las ecuaciones del círculo característico son: $[X-x(s)]^2 + [Y-y(s)]^2 + [Z-z(s)]^2 = z(s)^2$, $[X-x(s)]x'(s) + [Y-y(s)]y'(s) + +[Z-z(s)]z'(s) - z(s)z'(s) = 0$. 2º) Siendo d la distancia del centro de la esfera al plano, se tiene: $d = \left|\frac{[x(s)-x(s)]x' + [y(s)-y(s)]y' + [z(s)-z(s)]z' - z(s)z'(s)}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\right| = \left|\frac{-zz'}{\sqrt{1+z'^2}}\right| = \left|\frac{zz'}{\sqrt{1+z'^2}}\right|$. Como, $z^2 = d^2 + 1 = \frac{z^2z'^2}{1+z'^2} + 1$, se tiene que: $z'^2 = z^2 - 1$, es decir: $ds = \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}$. Integrando, se tiene: $s + k = \arg\cosh z$. Es decir: $z = \cosh(s+k)$, que es un catenaria.

J 52- Hallar la envolvente de las esferas de radio R con centro en el eje Y.

Solución: Sea $f(x,y,z) = x^2 + (y-t)^2 + z^2 = R^2$. Se tiene: $f'_t = -2(y-t) = 0$, $f''_{t^2} = 2$ (no hay puntos característicos). Eliminando t entre f y f', se tiene la ecuación de la envolvente: $x^2 + z^2 = R^2$, que es un cilindro.

J 53- Hallar la envolvente de las esferas concéntricas $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$.

Solución: $f(t) = x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$, $f'_t = -2t = 0$, $f''_{t^2} = -2$. No existe envolvente.

J 54- Hallar la envolvente de los cilindros $(y-t)^2 - x^3 - x^2 = 0$.

Solución: $f = (y-t)^2 - x^3 - x^2 = 0$, $f'_t = -2(y-t) = 0$, $f''_{t^2} = -2$. Eliminando t entre f y f', se tiene la envolvente: $x^2(x+1) = 0$, es decir: $x = -1$, y también $x = 0$ de la línea de nodos.

J 55- Calcular la indicatriz de pendientes en un punto cualquiera del helicoide $z = c\arctan\frac{y}{x}$.

Solución: Derivando se tiene: $z'_x = p = \frac{-cy}{x^2+y^2}$, $z'_y = q = \frac{cx}{x^2+y^2}$, $z''_{x^2} = r = \frac{2cxy}{(x^2+y^2)^2}$, $z''_{xy} = s = \frac{c(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$, $z''_{y^2} = t = \frac{-2cxy}{(x^2+y^2)^2}$. La ecuación pedida es: $rX^2 + 2sXY + tY^2 - 1 = 0$, es decir: $\frac{2cxy}{(x^2+y^2)^2}X^2 + \frac{2c(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}XY - \frac{2cxy}{(x^2+y^2)^2}Y^2 - 1 = 0$.

J 56- Hallar la ecuación de la envolvente de los planos que determinan con los tres planos coordenados, un tetraedro de volumen constante.

Solución: Siendo a,b,c las aristas del tetraedro con vértice el origen, el volumen del tetraedro es $V = \frac{1}{6}abc = k$. La ecuación de los planos que forman con los planos coordenados, el citado tetraedro, es: $P \equiv \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$, o bien: $P \equiv \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{abz}{6k} - 1 = 0$. Derivando respecto a los parámetros a,b, se tiene: $P'_a = \frac{-x}{a^2} + \frac{bz}{6k} = 0$, $P'_b = \frac{-y}{b^2} + \frac{az}{6k} = 0$. De donde: $a = \sqrt[3]{\frac{6kx^2}{yz}}$, $b = \sqrt[3]{\frac{6ky^2}{xz}}$. Sustituyendo estos valores en P, y operando, se tiene la ecuación de la envolvente: $9xyz - 2k = 0$.

J 57- Dada la superficie $z = xy$, determinar en el punto $(1,1,1)$, la ecuación de la indicatriz de Dupin y los radios de curvatura principales.

Solución: Derivando: $z'_x = p = y$, $z'_y = q = x$, $z''_{x^2} = r = 0$, $z''_{xy} = s = 1$, $z''_{y^2} = t = 0$. Los coeficientes de las formas cuadráticas de Gauss, para el punto $(1,1,1)$, son: $E = 1 + p^2 = 1 + y^2 = 2$, $F = pq = xy = 1$, $G = 1 + q^2 = 1 + x^2 = 2$, $H = \sqrt{1+p^2+q^2} = \sqrt{1+x^2+y^2} = \sqrt{3}$, $E' = \frac{r}{H} = 0$, $F' = \frac{s}{H} = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

$G' = \frac{t}{H} = 0$. La ecuación de la indicatriz de Dupin es: $\frac{E'}{E}x^2 + \frac{2F'}{\sqrt{EG}}xy + \frac{G'}{G}y^2 = 1$, es decir: $xy = \sqrt{3}$ (ejes oblicuos de ángulo $\varphi = 60^o$, puesto que $\cos\varphi = \frac{F}{\sqrt{EG}} = \frac{1}{2}$). La fórmula de los radios de curvatura principales, es: $(E'G' - F'^2)\rho^2 - (EG' + E'G - 2FF')\rho + (EG - F^2) = \frac{-1}{3}\rho^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\rho + 3 = 0$, de donde: $\rho_1 = 3\sqrt{3}$, $\rho_2 = -\sqrt{3}$, siendo la ecuación canónica de la indicatriz: $\frac{x^2}{3\sqrt{3}} - \frac{y^2}{\sqrt{3}} = 1$.

J 58- Las loxodromas sobre una esfera, son las curvas que cortan a los planos que pasan por un diámetro, y por tanto a los meridianos, bajo ángulo constante α. Hallar su ecuación mediante la fórmula que da el ángulo de dos curvas situadas sobre una misma superficie, utilizando los coeficientes de Gauss.

Solución: Sea la ecuación de la esfera: $x = R\cos\varphi\cos\theta$, $y = R\sin\varphi\cos\theta$, $z = R\sin\theta$. Sus derivadas son: $x'_\theta = -R\cos\varphi\sin\theta$, $x'_\varphi = -R\sin\varphi\cos\theta$, $y'_\theta = -R\sin\varphi\sin\theta$, $y'_\varphi = R\cos\varphi\cos\theta$, $z'_\theta = R\cos\theta$, $z'_\varphi = 0$. Luego: $E = x'^2_\theta + y'^2_\theta + z'^2_\theta = R^2$, $F = x'_\theta x'_\varphi + y'_\theta y'_\varphi + z'_\theta z'_\varphi = 0$, $G = x'^2_\varphi + y'^2_\varphi + z'^2_\varphi = R^2\cos^2\theta$. Como la ecuación de los meridianos corresponde a la de la esfera, con φ constante, se tiene que $d\varphi = 0$. La fórmula a emplear es: $\cos\alpha = \frac{Ed\theta\delta\theta + F(d\theta\delta\varphi + d\varphi\delta\theta) + Gd\varphi\delta\varphi}{\sqrt{E(d\theta)^2 + 2Fd\theta d\varphi + G(d\varphi)^2}\sqrt{E(\delta\theta)^2 + 2F\delta\theta\delta\varphi + G(\delta\varphi)^2}}$. Sustituyendo en la ecuación anterior, los valores hallados de E, F, G y $d\varphi$, se tiene: $\cos\alpha = \frac{R^2 d\theta\delta\theta}{\sqrt{R^2(d\theta)^2}\sqrt{R^2(\delta\theta)^2 + R^2\cos^2\theta(\delta\varphi)^2}} = \frac{\delta\theta}{\sqrt{(\delta\theta)^2 + \cos^2\theta(\delta\varphi)^2}}$. De donde se obtiene que: $\cos^2\alpha\left[(\delta\theta)^2 + \cos^2\theta(\delta\varphi)^2\right] = (\delta\theta)^2$, es decir: $\delta\varphi = \pm\frac{\tan\alpha\delta\theta}{\cos\theta}$. Integrando esta expresión: $\varphi + C = \pm\tan\alpha\left[\ln\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$. Como para $\theta = 0$, $\varphi = 0$, $C = \pm\tan\alpha\ln 1 = 0$. El signo $\pm$, indica que la loxodroma puede arrollarse sobre la esfera en dos sentidos distintos, hacia la derecha o hacia la izquierda. Tomando el signo positivo, las ecuaciones son: $x = R\cos\left[\tan\alpha\ln\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]\cos\theta$, $y = R\sin\left[\tan\alpha\ln\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]\cos\theta$, $z = R\sin\theta$. Para obtener estas ecuaciones en función de φ, como $\varphi = \tan\alpha\left[\ln\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$, $\cos\theta = \frac{1}{\cosh(\varphi\cot\alpha)}$, y llamando $k = \cot\alpha$, se tiene: $x = \frac{R\cos\varphi}{\cosh k\varphi}$, $y = \frac{R\sin\varphi}{\cosh k\varphi}$, $z = R\tanh k\varphi$. (Ver problema J 6).

J 59- Calcular la indicatriz de Dupin de la superficie $z = xy$, en el punto $(1,2,2)$.

Solución: En forma paramétrica la superficie es: $x = u$, $y = v$, $z = uv$. Derivando y particularizando, se tiene: $x'_u = 1$, $x'_v = 0$, $x''_{u^2} = x''_{uv} = x''_{v^2} = 0$, $y'_u = 0$, $y'_v = 1$, $y''_{u^2} = y''_{uv} = y''_{v^2} = 0$, $z'_u = v = 2$, $z'_v = u = 1$, $z''_{u^2} = z''^2_u = 0$, $z''_{uv} = 1$, $E = 1 + (z'_u)^2 = 1 + v^2 = 5$, $F = z'_u z'_v = uv = 2$, $G = 1 + (z'_v)^2 = 1 + u^2 = 2$, $H = \sqrt{1 + (z'_u)^2 + (z'_v)^2} = \sqrt{1 + u^2 + v^2} = \sqrt{6}$, $E' = \frac{z''_{u^2}}{H} = 0$, $F' = \frac{z''_{uv}}{H} = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $G' = \frac{z''_{v^2}}{H} = 0$. Luego la indicatriz es: $\frac{E'}{E}\zeta^2 + \frac{2F'}{\sqrt{EG}}\zeta\eta + \frac{G'}{G}\eta^2 = 1$, es decir: $\zeta\eta = \sqrt{15}$. Siendo la indicatriz una hipérbola, el punto $(1,2,2)$ es un punto hiperbólico, lo que indica que el plano tangente corta a la superficie, cambiando la curvatura de signo. La ecuación de la hipérbola está referida a sus asíntotas que forman un ángulo θ, siendo $\cos\theta = \frac{F}{\sqrt{EG}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

J 60- Se da la superficie $x = tz + t^2$, $y = t^2 z + t^4$. 1º) Comprobar si es desarrollable. 2º) Hallar el plano tangente, el central y el asintótico. 3º) Hallar la línea de estricción.

Solución: 1º) Superficie desarrollable es la superficie reglada tal que el plano tangente en un punto de una generatriz, lo es a lo largo de toda la generatriz. Es decir, siendo $\vec{M} = \vec{a} + \vec{b}u$, es desarrollable si el triple producto escalar $\left(\vec{b}, \vec{a}', \vec{b}'\right) = 0$. Como $\frac{t'}{(t^2)'} \neq \frac{(t^2)'}{(t^4)'}$, la superficie no es desarrollable. 2º) Siendo las ecuaciones de la superficie: $X = uv + u^2$, $Y = u^2 v + u^4$, $Z = v$, la ecuación del plano tangente es:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \frac{da_1}{dv}+u\frac{db_1}{dv} & \frac{da_2}{dv}+u\frac{db_2}{dv} & \frac{da_3}{dv}+u\frac{db_3}{dv} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-uv-u^2 & Y-u^2v-u^4 & Z-v \\ v+2u & 2uv+4u^3 & 0 \\ u & u^2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= (X-uv-u^2)(2uv+4u^3)-(Y-u^2v-u^4)(v+2u)+(Z-v)(-vu^2+2u^2-4u^4) = 0$. O bien, como de la ecuación de la superficie se puede obtener que: $t = u$, $z = v$, la ecuación del plano es: $(X-tz-t^2)(2tz+4t^3)-(Y-t^2z-t^4)(z+2t)+(Z-z)(-zt^2+2t^2-4t^4) = 0$. La ecuación del plano central es: $\begin{vmatrix} X-t^2 & Y-t^4 & Z \\ t & t^2 & 1 \\ \begin{vmatrix} t^2 & 1 \\ 2t & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \end{vmatrix} \end{vmatrix} = (X-t^2)(t^4-1)-(Y-t^4)(t^3+2t)+Z(t+2t^3) = 0.$

La ecuación del plano asintótico es: $\begin{vmatrix} X-t^2 & Y-t^4 & Z \\ t & t^2 & 1 \\ 1 & 2t & 0 \end{vmatrix} = -2t(X-t^2)+Y-t^4+t^2Z = 0$. 3º) El punto central es: $\begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ t & t^2 & 1 \\ 1 & 2t & 0 \end{vmatrix} = (-2t,1,t^2)$. Como $\xi = -\frac{8t^4+2t+4t^6-2t^5}{4t^2+1+t^4}$, la línea de estricción es: $x = t^2+\xi t, y = t^4+\xi t^2, z = \xi$.

J 61- Se da la recta $x = tz+u$, $y = uz+\frac{t^3}{3}$, donde $u = f(t)$. 1º) Determinar u de forma que la recta engendre una superficie desarrollable. 2º) Hallar la arista de retroceso y su lugar geométrico.

Solución: 1º) Siendo: $x = az+c$, $y = bz+d$, la condición de desarrollable es: $\frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'}$. Luego, $\frac{1}{u'} = \frac{u'}{t^2}$, $u' = \pm t$. Integrando: $u = \pm\frac{t^2}{2}+C$. 2º) La arista de retroceso viene dada por: $x = az+c$, $y = bz+d$, $a'z+c' = 0$. Luego: $x = tz\pm\frac{t^2}{2}+C$, $y = \left(\pm\frac{t^2}{2}+C\right)z+\frac{t^3}{3}$, $z\pm t = 0$. Eliminando t se tiene la arista de retroceso: $x = \mp\frac{z^2}{2}+C$, $y = \pm\frac{z^3}{6}+Cz$. Eliminando C se tiene su lugar geométrico: $\pm\frac{2}{3}z^3+xz-y = 0$.

J 62- Determinar la proyección sobre ZOY de las líneas asintóticas de $x+y^2z = \int_0^y (y-t)e^{-\sqrt{t}}dt$. Entre estas curvas hay una, y solo una, que delimita con $+OY$ y $-OZ$ una región de área finita. Calcular esta área.

Solución: La ecuación de las líneas asintóticas es: $\frac{\delta^2 x}{\delta y^2}(dy)^2+2\frac{\delta^2 x}{\delta y\delta z}dydz+\frac{\delta^2 x}{\delta z^2}(dz)^2 = 0$. Siendo: $x = -y^2z+\int_0^y (y-t)e^{-\sqrt{t}}dt$, $x'_z = -y^2$, $x'_y = -2zy+\int_0^y e^{-\sqrt{t}}dt$, $x''_{z^2} = 0$, $x''_{zy} = -2y$, $x''_{y^2} = -2z+e^{-\sqrt{y}}$, se tiene que la ecuación de las líneas asintóticas es: $4y\frac{dz}{dy}+2z = e^{-\sqrt{y}}$, cuya solución es: $z = \frac{k-\frac{1}{2}e^{-\sqrt{y}}}{\sqrt{y}}$.

El área viene dada por $S = \int_0^\infty zdy = \int_0^\infty \frac{kdy}{\sqrt{y}}-\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{y}}}{\sqrt{y}}dy = k\int_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{y}}+1$. Como $\int_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{y}} \to \infty$, la curva que delimita una región de área finita viene definida por $k = 0$, es decir: $S = 1$.

J 63- Se considera el paraboloide $z = x^2+y^2$. 1º) ¿Cómo se proyecta sobre $z = 0$ una red conjugada sobre dicha superficie? 2º) Sean C las curvas de intersección del paraboloide con los planos trazados por una recta R de ecuaciones $z = h$, $x = 0$. ¿Cuáles son las curvas conjugadas de las curvas C? Hallar la proyección sobre $z = 0$, de la red conjugada así obtenida.

Solución: 1º) La ecuación de las líneas conjugadas es: $rdx_1dx_2+s(dx_1dy_2+dy_1dx_2)+tdy_1dy_2 = 0$. Como: $z'_x = p = 2x$, $z'_y = q = 2y$, $z''_{x^2} = r = 2$, $z''_{xy} = s = 0$, $z''_{y^2} = t = 2$, se tiene: $dx_1dx_2+dy_1dy_2 = 0$, es decir: $1+y'_1\cdot y'_2 = 0$. Luego las proyecciones de las líneas conjugadas sobre $z = 0$, son ortogonales.

2º) La ecuación de los planos que pasan por R es: $z-h+\lambda x=0$. Luego: $x^2+y^2+\lambda x-h=0$. Derivando: $2x+2yy'+\lambda=0$, $\lambda=-2x-2yy'$. Por tanto, se tiene que: $x^2+y^2+(-2x-2yy')x-h=0$, $y'=\dfrac{x^2-y^2+h}{-2xy}$. Sus conjugadas tienen por ecuación diferencial: $y'=\dfrac{2xy}{x^2-y^2+h}$. Haciendo: $x^2=v$, $y^2=u$, se tiene: $2xdx=dv$, $2ydy=2u$, $y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xdu}{ydv}$. Por tanto: $\dfrac{xdu}{ydv}=\dfrac{2xy}{v-u+h}$, $(v-u+h)\dfrac{du}{dv}=$ $=2y^2=2u$. Haciendo: $v+h=w$, $dv=dw$, $(w-u)\dfrac{du}{dw}=2u$, $\dfrac{du}{dw}=\dfrac{2u}{w-u}=\dfrac{\frac{2u}{w}}{1-\frac{u}{w}}$. Haciendo: $\dfrac{u}{w}=t$, $du=wdt+tdw$, se tiene: $\dfrac{dw}{w}=\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{2}{1+t}\right)dt$. Integrando esta expresión, se obtiene: $\ln\dfrac{w}{C}=\ln t-2\ln(1+t)=\ln\dfrac{t}{(1+t)^2}$. De donde, operando: $\ln\dfrac{x^2+h}{C}=\ln\dfrac{y^2}{(x^2+h)\left(1+\dfrac{y^2}{x^2+h}\right)^2}=$ $=\ln\dfrac{y^2(x^2+h)}{(x^2+y^2+h)^2}$. Luego: $x^2+y^2+h=C_1y$. Las ecuaciones de las curvas conjugadas son: $x^2+y^2+h=C_1y$, $z=x^2+y^2$. O bien: $z=-h+C_1y=x^2+y^2$, siendo su proyección sobre $z=0$, la circunferencia: $x^2+y^2-C_1y+h=0$.

J 64- Hallar la superficie desarrollable cuya arista de retroceso es $x=6\lambda$, $y=3\lambda^2$, $z=2\lambda^3$.

Solución: Derivando respecto al parámetro λ, se tiene: $x'=6$, $y'=6\lambda$, $z'=6\lambda^2$. Por tanto: $\dfrac{x-6\lambda}{6}=$ $=\dfrac{y-3\lambda^2}{6\lambda}=\dfrac{z-2\lambda^3}{6\lambda^2}$. Eliminando el parámetro λ, se tiene: $x^3z-x^2y^2-18xyz+16y^3+27z^2=0$.

J 65- Se da la superficie $x=2\lambda p\cos\theta$, $y=2\lambda q\sin\theta$, $z=2\lambda^2(p\cos^2\theta+q\sin^2\theta)$. 1º) Hallar la relación entre λ y θ para que la curva trazada en la superficie sea tal que el plano tangente a la superficie en los puntos de la curva, forme un ángulo constante con el plano $z=0$. 2º) Hallar la arista de retroceso de la superficie envolvente de estos planos tangentes.

Solución: 1º) El plano tangente es: $\begin{vmatrix} x-2\lambda p\cos\theta & y-2\lambda q\sin\theta & z-2\lambda^2(p\cos^2\theta+q\sin^2\theta) \\ 2p\cos\theta & 2q\sin\theta & 4\lambda(p\cos^2\theta+q\sin^2\theta) \\ -2\lambda p\sin\theta & 2\lambda q\cos\theta & 2\lambda^2(-p+q)\sin\theta\cos\theta \end{vmatrix}=0.$ Luego: $2x\lambda\cos\theta+2y\lambda\sin\theta-z-2\lambda^2(p\cos^2\theta+q\sin^2\theta)=0$ (**I**). Siendo V el ángulo que este plano forma con $z=0$, se tiene que: $\cos V=\dfrac{-1}{\sqrt{4\lambda^2+1}}=k$, luego: $\lambda=\dfrac{\sqrt{1-k^2}}{2k}$, por lo que λ es constante e independiente de θ. 2º) Derivando la ecuación del plano (**I**) dos veces respecto a θ, se tiene: $-x\sin\theta+y\cos\theta+C(p-q)\sin 2\theta=0$ (**II**); $-x\cos\theta-y\sin\theta+2C(p-q)\cos 2\theta=0$ (**III**). Del sistema formado por las ecuaciones (**I**), (**II**), (**III**), se deducen los valores de x,y,z que dan la arista de retroceso de la superficie envolvente de los planos tangentes a la superficie dada en los puntos en que λ es constante: $x=2\lambda(p-q)\cos^3\theta$, $y=-2\lambda(p-q)\sin^3\theta$, $z=2\lambda^2[(q-2p)\sin^\theta+(p-2q)\cos^2\theta]$.

J 66- Obtener la ecuación de la superficie desarrollable cuya arista de retroceso es la curva $x=\dfrac{t^3}{3}$, $y=t^2$, $z=2t$.

Solución: La superficie desarrollable es la superficie tangencial de la arista de retroceso. Luego siendo $\overline{t}=(t^2,2t,2)$, la ecuación pedida es: $f(u,v)=\left(\dfrac{t^3}{3},t^2,2t\right)+v(t^2,2t,2)$.

J 67- Dada la curva $x=tz-t^3$, $y=t^3x-t^6$, comprobar si es desarrollable y calcular su arista de retroceso.

Solución: $x=tz-t^3$, $y=t^3(tz-t^3)-t^6=t^4z-t^6$. Luego: $a=t$, $p=-t^3$, $b=t^4$, $q=-t^6$, $a'=1$, $p'=-3t^2$, $b'=4t^3$, $q'=-6t^5$. Como $a'q'=-12t^5$, es igual a $b'p'=-12t^5$, la curva es desarrollable. La ecuación de la arista de retroceso es: $x=-a\dfrac{p'}{a'}+p=2t^3$, $y=-b\dfrac{p'}{a'}+q=t^6$, $z=-\dfrac{p'}{a'}=3t^2$, es decir $(2t^3,t^6,3t^2)$.

J 68- Dada la superficie S de ecuaciones $x=tz+t^2-f(t)$, $y=3zf(t)+t^3$, $z=z$, determinar la función $f(t)$ para que S sea desarrollable, calculando su arista de retroceso. Comprobar que para $f(t)=0$, S no es

desarrollable, y calcular su línea de estricción.

Solución: Siendo la ecuación genérica: $x = az + p$, $y = bz + q$, $z = z$, se tiene: $a = t$, $p = t^2 - f(t)$, $b = 3f(t)$, $q = t^3$. La condición para ser desarrollable es: $a'q' = b'p'$. Es decir: $3t^2 = 3f'(t)[2t - f'(t)]$, de donde: $f'(t) = t$, $f(t) = \frac{t^2}{2} + C$. Las ecuaciones de la arista de retroceso son: $x = -a\frac{p'}{a'} + p = \frac{-t^2}{2} - C$, $y = -b\frac{p'}{a'} + q = \frac{-t^3}{2} - Ct$, $z = -\frac{p'}{a'} = -t$. Para $f(t) = 0$, se tiene: $a = t$, $p = t^2$, $b = 0$, $q = t^3$, $a' = 1$, $p' = 2t$, $b' = 0$, $q' = 3t^2$. Como en este caso, $a'q' \neq b'p'$, la superficie S no es desarrollable. Su línea de estricción es: $x = -t \cdot 2t + t^2 = -t^2$, $y = 0 + t^3 = t^3$, $z = -2t$.

J 69- Dada la superficie $x = uv + u^2$, $y = u^2 v + u$, $z = u + v$, determinar la ecuación del plano asintótico de una generatriz cualquiera, y en particular para $u = 1$.

Solución: El plano asintótico es el tangente a la superficie en el punto del infinito. La superficie dada es reglada: $x = u^2 + vu$, $y = u + vu^2$, $z = u + v$. Siendo $\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ u & u^2 & 1 \\ 1 & 2u & 0 \end{vmatrix} = (-2u, 1, u^2)$, la ecuación del plano asintótico es: $-2u(x - u^2) + y - u + u^2(z - u) = -2ux + y + u^2 z + u^3 - u = 0$. Para $u = 1$, este plano es: $-2x + y + z = 0$.

J 70- Hallar las trayectorias ortogonales de $z = x^2 + y^2$, $z = \lambda$.

Solución: La condición de ortogonalidad de dos curvas situadas en una superficie, es: $Edu\delta u + F(du\delta v + \delta u dv) + Gdv\delta v = 0$. En la superficie dada, haciendo: $x = u$, $y = v$, $z = u^2 + v^2$, se tiene: $E = 1 + (z'_u)^2 = 1 + 4u^2$, $F = z'_u z'_v = 4uv$, $G = 1 + (z'_v)^2 = 1 + 4v^2$. En la curva dada, se tiene que: $x^2 + y^2 = \lambda$, o bien: $u^2 + v^2 = \lambda$. Diferenciando, se tiene: $2udu + 2vdv = 0$, es decir: $du = \frac{-v}{u}dv$. Sustituyendo los valores obtenidos, en la condición de ortogonalidad, se tiene: $(1 + 4u^2)(\frac{-v}{u}dv)\delta u + $ $+4uv[(\frac{-v}{u}dv)\delta v + \delta u dv] + (1 + 4v^2)dv\delta v = 0$. Simplificando: $v\delta u - u\delta v = 0$. De donde: $\frac{\delta u}{u} = \frac{\delta v}{v}$. Integrando: $\ln u = \ln v + C$. Es decir: $u = \mu v$, o bien: $x = \mu y$. Las trayectorias ortogonales pedidas son: $z = x^2 + y^2$, $x = \mu y$.

J 71- Dada la superficie $x = u^2 + vu$, $y = u + vu^2$, $z = u + v$, hallar la ecuación general del plano central, y en particular para $u = 1$.

Solución: El plano central es perpendicular al plano asintótico, y es tangente a la superficie en el punto central. Siendo $\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ u & u^2 & 1 \\ 1 & 2u & 0 \end{vmatrix} = (-2u, 1, u^2)$, los coeficientes del plano central vienen dados por: $\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ u & u^2 & 1 \\ -2u & 1 & u^2 \end{vmatrix} = (u^4 - 1, -u^3 - 2u, 2u^3 + u)$. Por consiguiente, la ecuación del plano central, es: $(u^4 - 1)(x - u^2) - (u^3 + 2u)(y - u) + (2u^3 + u)(z - u) = 0$. Para $u = 1$, es: $y - z = 0$.

J 72- Dada la superficie $x = u^2 + vu$, $y = u + vu^2$, $z = u + v$, hallar la ecuación de la línea de estricción.

Solución: La línea de estricción es el lugar geométrico de los puntos centrales, es decir de los puntos en los que los planos asintóticos son tangentes a la superficie. Estando dada la ecuación de la superficie, en la forma $\overline{x}(u,v) = \overline{x}(u) + v \cdot \overline{A}(u)$, como es el caso del enunciado, la ecuación de la línea de estricción es: $v = -\frac{\left(\overline{A} \wedge \overline{x'}\right) \cdot \left(\overline{A} \wedge \overline{A'}\right)}{\left(\overline{A} \wedge \overline{A'}\right)^2}$. Como: $\overline{x}(u) = (u^2, u, u)$, $\overline{x'}(u) = (2u, 1, 1)$, $\overline{A} = (u, u^2, 1)$, $\overline{A'} = (1, 2u, 0)$, $\left(\overline{A} \wedge \overline{x'}\right) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ u & u^2 & 1 \\ 2u & 1 & 1 \end{vmatrix} = (u^2 - 1, u, u - 2u^3)$, $\left(\overline{A} \wedge \overline{A'}\right) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ u & u^2 & 1 \\ 1 & 2u & 0 \end{vmatrix} = (-2u, 1, u^2)$,

$\left(\overline{A}\wedge\overline{A'}\right)^2 = u^4+4u^2+1$, se tiene que: $v = \dfrac{2u^5+u^3-3u}{u^4+4u^2+1} = U$. Luego las ecuaciones paramétricas de la línea de estricción son: $x = u^2+Uu$, $y = u+Uu^2$, $z = u+U$.

J 73- Dada la superficie $x = u^2+vu$, $y = u+vu^2$, $z = u+v$, hallar la ecuación del parámetro de distribución.

Solución: Se denomina parámetro de distribución a la relación de la mínima distancia entre dos generatrices infinitamente próximas y el ángulo que forman, es decir, es la relación de la distancia del punto central al de contacto de un plano tangente cualquiera, dividida por la tangente del ángulo que forma con el plano central. Su fórmula es: $\lambda = \dfrac{\left(\overline{x'},\overline{A},\overline{A'}\right)\overline{A}^2}{\left(\overline{A}\wedge\overline{A'}\right)^2}$. Como $\overline{x}(u) = (u^2,u,u)$, $\overline{x'} = (2u,1,1)$, $\overline{A} = (u,u^2,1)$, $\overline{A'} = (1,2u,0)$, se tiene:

$$\lambda = \frac{\begin{vmatrix} 2u & 1 & 1\\ u & u^2 & 1\\ 1 & 2u & 0\end{vmatrix}(u^2+u^4+1)}{\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ u & u^2 & 1\\ 1 & 2u & 0\end{vmatrix}^2} = \frac{(-3u^2+1)(u^4+u^2+1)}{u^4+4u^2+1}.$$

J 74- Dado el paraboloide hiperbólico $P \equiv z = x^2-y^2$, hacer el cambio $x+y = 2u$, $x-y = 2v$, estableciendo las ecuaciones paramétricas de P, y determinar las líneas de estricción de los dos sistemas de generatrices.

Solución: $P = \overline{x}(u,v) = (u+v,u-v,4uv)$. Las curvas en las que u es constante, definen un sistema de generatrices, y en las que v es constante, definen el segundo sistema de generatrices. $\overline{x}(u,v) = \overline{x}(u)+v\overline{A}(u) = (u,u,0)+(1,-1,4u)$, $\overline{x}(u) = (u,u,0)$, $\overline{x'(u)} = (1,1,0)$, $\overline{A(u)} = (1,-1,4u)$,

$$\overline{A'(u)} = (0,0,4),\quad (\overline{A}\wedge\overline{A'}) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 1 & -1 & 4u\\ 0 & 0 & 4\end{vmatrix} = (-4,-4,0),\quad (\overline{A}\wedge\overline{x'}) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 1 & -1 & 4u\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix} = (-4u,4u,2).$$

El punto central viene dado por: $v = -\dfrac{(\overline{A}\wedge\overline{x'})(\overline{A}\wedge\overline{A'})}{(\overline{A}\wedge\overline{A'})^2} = 0$. La línea de estricción correspondiente es: $x = u$, $y = u$, $z = 0$, siendo la generatriz: $x-y = 0$, $z = 0$. Para $u = 0$, se tiene la otra línea de estricción: $x = v$, $y = -v$, $z = 0$, siendo la generatriz: $x+y = 0$, $z = 0$.

J 75- Sea S la superficie envolvente de las superficies F, siendo la ecuación diferencial de F: $z+vy = (v-x)[f'(v)-\varphi'(x)]-2[f(v)+\varphi(x)]$. Hallar la ecuación diferencial de las líneas asintóticas de S. Obtener $f(v)$ y $\varphi(x)$ de manera que las familias de curvas $vx = \lambda$, $\dfrac{v+x}{1-vx} = \mu$, formen una red conjugada de curvas.

Solución: Derivando la ecuación de F, respecto a v, se tiene (f es función de v; φ es función de x): $y = f'-\varphi'+(v-x)f''-2f' = (v-x)f''-f'-\varphi'$. Haciendo $x = u$, se tiene que: $y = (v-u)f''-f'-\varphi'$. Sustituyendo estos valores en la ecuación de F, se tiene: $z = -v(v-u)f''+vf'+v\varphi'+(v-u)(f'-\varphi')-2(f+\varphi) = -v(v-u)f''+2vf'+u\varphi'-uf'-2(f+\varphi)$. Las derivadas parciales son: $x'_u = 1$, $x'_v = 0$, $y'_u = -f''-\varphi''$, $y'_v = f''+(v-u)f'''-f'' = (v-u)f'''$, $z'_u = vf''+\varphi'+u\varphi''-f'-2\varphi' = vf''+u\varphi''-f'-\varphi'$, $z'_v = -(v-u)f''-vf''-v(v-u)f'''+2f'+2vf''-uf''-2f' = -v(v-u)f'''$. De ello se deduce que:

$$\overline{N} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ x'_u & y'_u & z'_u\\ x'_v & y'_v & z'_v\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 1 & -f''-\varphi'' & vf''+u\varphi''-f'-\varphi'\\ 0 & (v-u)f''' & -v(v-u)f'''\end{vmatrix} = (v-u)f'''[(v-u)\varphi''+f'+\varphi',v,1].$$

Haciendo: $\overline{N} = P\cdot\overline{N_1}$, siendo: $P = (v-u)f'''$, luego $\overline{N_1} = [(v-u)\varphi''+f'+\varphi',v,1] = (A,B,C)$, donde: $A = (v-u)\varphi''+f'+\varphi'$, $B = v$, $C = 1$. Las líneas asintóticas están definidas por $d\overline{N_1}\cdot d\overline{M} = (dAdx+dBdy+dCdz) = 0$. Como: $dA = (dv-du)\varphi''+(v-u)\varphi'''du+f''dv+\varphi''du = dv(\varphi''+f'')+ (v-u)\varphi'''du$, $dB = dv$, $dC = 0$, $dx = du$, $dy = (dv-du)f''+(v-u)f'''dv-f''dv-\varphi''du$, se tiene: $d\overline{N_1}\cdot d\overline{M} = dv(\varphi''+f'')du+(v-u)\varphi'''(du)^2+(dv-du)f''dv+(v-u)f'''(dv)^2-f''(dv)^2-\varphi''dudv$. Simplificando: $d\overline{N_1}\cdot d\overline{M} = \varphi'''(du)^2+f'''(dv)^2 = 0$, que es la ecuación diferencial de las líneas asintóticas

de S. La ecuación de las líneas conjugadas es; $d\overline{N_1}\cdot\delta\overline{M}=0$, $\delta\overline{N_1}\cdot d\overline{M}=0$. Por tanto: $\varphi'''du\delta v+f'''\delta udv=0$. Diferenciando la ecuación $uv=\lambda$, se tiene: $v\delta u+u\delta v=0$. Diferenciando la ecuación $\dfrac{v+x}{1-vx}=\mu$, se tiene: $\dfrac{(du+dv)(1-uv)+(u+v)(vdu+udv)}{(1-uv)^2}=0$. Por tanto, de la primera familia se tiene: $\dfrac{\delta v}{\delta u}=-\dfrac{v}{u}$, y de la segunda, operando en el numerador, se tiene: $\dfrac{du}{dv}=-\dfrac{1+u^2}{1+v^2}$. Introduciendo este par de valores en la ecuación de las líneas conjugadas, se tiene que: $\varphi'''+f'''\dfrac{dv\delta v}{du\delta u}=\varphi'''+f'''\dfrac{v(1+v^2)}{u(1+u^2)}=0$. Por tanto, se obtiene que: $u(1+u^2)\varphi'''=-v(1+v^2)f'''=k$. Integrando estas dos ecuaciones diferenciales, se tiene que: $\varphi(u)=\iiint\dfrac{k}{u(1+u^2)}du+au^2+bu+c$, $f(v)=\iiint\dfrac{-k}{v(1+v^2)}dv+a'v^2+b'v+c'$. Con estos valores de φ y de f, las dos familias de curvas dadas forman una red conjugada de curvas en la superficie S.

J 76- Demostrar que la línea de estricción de un hiperboloide de revolución es el círculo de garganta, que este es cortado por las generatrices según un ángulo constante, y que también es constante el parámetro de distribución.

Solución: La ecuación paramétrica del hiperboloide de revolución $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}-1=0$, es: $\overline{x(\theta,\mu)}=\overline{x(\theta)}+\mu\overline{A(\theta)}=(a\cos\theta,a\sin\theta,0)+\mu(a\sin\theta,-a\cos\theta,b)$, es decir: $\overline{x(\theta)}=(a\cos\theta,a\sin\theta,0)$, $\overline{A(\theta)}=(a\sin\theta,-a\cos\theta,b)$. Luego, $\overline{x'(\theta)}=(-a\sin\theta,a\cos\theta,0)$, $\overline{A'(\theta)}=(a\cos\theta,a\sin\theta,0)$,

$$\left(\overline{A}\wedge\overline{A'}\right)=\begin{vmatrix}\overline{i}&\overline{j}&\overline{k}\\a\sin\theta&-a\cos\theta&b\\a\cos\theta&a\sin\theta&0\end{vmatrix}=(-ab\sin\theta,ab\cos\theta,a^2),$$

$$\left(\overline{A}\wedge\overline{x'}\right)=\begin{vmatrix}\overline{i}&\overline{j}&\overline{k}\\a\sin\theta&-a\cos\theta&b\\-a\sin\theta&a\cos\theta&0\end{vmatrix}=(-ab\cos\theta,-ab\sin\theta,0),\quad \left(\overline{A}\wedge\overline{x'}\right)\left(\overline{A}\wedge\overline{A'}\right)=0.$$ Luego el punto central viene dado por: $\mu=\dfrac{\left(\overline{A}\wedge\overline{x'}\right)\left(\overline{A}\wedge\overline{A'}\right)}{\left(\overline{A}\wedge\overline{A'}\right)^2}=0$, siendo la ecuación de la línea de estricción: $\overline{x_e}=(a\cos\theta,a\sin\theta,0)$, que corresponde al círculo de garganta. Su derivada es: $\overline{x'_e}=(-a\sin\theta,a\cos\theta,0)$. Siendo las generatrices: $\overline{x_g}=(a\cos\theta,a\sin\theta,0)+\mu(a\sin\theta,-a\cos\theta,b)$, para θ constante, su derivada es: $\overline{x'_g}=(a\sin\theta,-a\cos\theta,b)$. El coseno del ángulo formado por las generatrices y el círculo de garganta, es: $\cos V=\dfrac{\overline{x'_g}\cdot\overline{x'_e}}{|x'_g|\cdot|x'_e|}=\dfrac{(a\sin\theta,-a\cos\theta,b)\cdot(-a\sin\theta,a\cos\theta,0)}{|a\sin\theta,-a\cos\theta,b|\cdot|-a\sin\theta,a\cos\theta,0|}=\dfrac{-a^2}{(a^2+b^2)a^2}=\dfrac{-1}{a^2+b^2}$, por lo que el ángulo V es constante. El parámetro de distribución es: $\lambda=\dfrac{\left(\overline{x'},\overline{A},\overline{A'}\right)\overline{A}^2}{\left(\overline{A}\wedge\overline{A'}\right)^2}=$

$$=\frac{\begin{vmatrix}-a\sin\theta&a\cos\theta&0\\a\sin\theta&-a\cos\theta&b\\a\cos\theta&a\sin\theta&0\end{vmatrix}(a^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta+b^2)}{a^2b^2\sin^2\theta+a^2b^2\cos^2\theta+a^4}=b,$$ que es constante.

J 77- Hallar el umbílico de $z=x^2+y^2+2x$.

Solución: Umbílico es el punto en que los coeficientes E',F',G' son proporcionales a E,F,G, es decir: $\dfrac{E'}{E}=\dfrac{F'}{F}=\dfrac{G'}{G}$, o bien: $\dfrac{r}{1+p^2}=\dfrac{s}{pq}=\dfrac{t}{1+q^2}$, es decir: $\dfrac{z''_{x^2}}{1+(z'_x)^2}=\dfrac{z''_{xy}}{z'_xz'_y}=\dfrac{z''_{y^2}}{1+(z'_y)^2}$. Luego: $\dfrac{2}{1+(2x+2)^2}=\dfrac{0}{(2x+2)2y}=\dfrac{2}{1+(2y)^2}$. De donde: $y(x+1)=0$. El umbílico es $(-1,0,-1)$. Se trata del punto en que el eje de revolución de la superficie dada, corta a esta.